

文章编号: 1000-3851(2011)06-0237-08

热环境中功能梯度圆板的非线性动力响应分析

张志强, 胡宇达*

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北省重型装备与大型结构力学可靠性实验室, 秦皇岛 066004)

摘 要: 研究了热环境中功能梯度圆板在横向简谐激励作用下的非线性动力响应和动应力问题。针对陶瓷-金属功能梯度圆板, 考虑几何非线性、材料物理性质参数随温度变化及材料组分沿厚度方向按幂律分布的情况, 应用虚功原理给出了热载荷与横向简谐载荷共同作用下的非线性振动偏微分方程。在固支无滑动的边界条件下, 利用伽辽金法得到了达芬型非线性强迫振动方程。通过数值算例, 给出了关于体积分数指数的分岔图, 相图、Poincare 映射等响应图以及动应力变化规律图, 讨论了材料体积分数指数和温度场对功能梯度圆板非线性动力响应的影响。结果表明: 热环境中功能梯度圆板随体积分数指数的变化可使系统出现周期响应、倍周期响应和混沌响应。功能梯度圆板中心处动应力在系统发生分岔或出现混沌响应时出现大幅变化, 而且在混沌响应时具有不可预测性。

关键词: 功能梯度材料; 圆板; 动力响应; 混沌; 动应力

中图分类号: TB333; O322 **文献标志码:** A

Nonlinear dynamic response of circular functionally graded plate in thermal environment

ZHANG Zhiqiang, HU Yuda*

(Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures of Hebei Province,
School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The nonlinear dynamic responses and the dynamic stress of a circular plate in thermal environment were studied. The effect of geometric nonlinearity and temperature-dependent material properties were both taken into account. The material properties of the functionally graded plate were assumed to vary continuously through the thickness according to a power law distribution of the volume fraction of the constituents. Using the principle of virtual work, the nonlinear partial differential equations of functionally graded plate subjected to transverse harmonic excitation and thermal loads were derived. For the circular plate with clamped immovable edge, the Duffing nonlinear forced vibration equation was deduced by using Galerkin method. Through the numerical example given in the paper, the bifurcation diagram for material's volume fraction index, phase portrait, Poincare map and the dynamic stress variation were plotted. Besides, the influences of materials volume fraction index and thermal loads on the nonlinear dynamic response of functionally graded plate were discussed. The results show that periodic, multiplier periodic and chaotic motions exist for the functionally graded plate with the change of the volume fraction index. The dynamic stress at the center of the circular plate varies sharply when the system appears bifurcation or chaos and becomes unpredictable when the system appears chaotic motions.

Keywords: functionally graded material (FGM); circular plate; dynamic response; chaos; dynamic stress

功能梯度材料(FGM)是一种新型非均匀复合材料, 通常由陶瓷和金属两种材料构成, 具有强度高、韧性好、耐高温等优良的使用性能。它最初是作为航空航天工业中的特殊功能材料而开始研究

的, 但近年来已逐渐发展成为高速飞行器、涡轮发动机等高温工作环境中的重要结构元件(如梁、板、壳等)。许多研究者已着手研究功能梯度材料结构在机械载荷和温度载荷共同作用下的动力响应分

收到初稿日期: 2010-11-19; 收到修改稿日期: 2011-03-17; 网络出版时间: 2011-07-20 14:22:00

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20110720.1422.029.html

DOI: CNKI:11-1801/TB.20110720.1422.029

基金项目: 河北省自然科学基金(E2010001254)

通讯作者: 胡宇达, 教授, 主要研究领域: 复合材料结构动力学、电磁固体力学 E-mail: huyuda03@163.com

析。Parveen 和 Reddy^[1]基于一阶剪切变形板理论,研究了一维稳态温度场中功能梯度矩形板的非线性动力响应。Ng 等^[2]研究了受面内简谐载荷作用的功能梯度矩形板参数激振。Yang 和 Shen^[3]研究了受局部侧向脉冲载荷功能梯度圆柱曲板的自由振动和参数共振。陈伟球等^[4-5]讨论了横观各向同性功能梯度材料矩形板、球面各向同性功能梯度材料球壳的自由振动问题。曹志远^[6]给出了不同边界条件下功能梯度矩形板固有频率解的一般表达式,并进一步^[7]研究了考虑物理非线性的振动问题,利用小参数法求出了非线性振动方程的解析解。Allahverdzadeh等^[8]研究了功能梯度薄圆板的非线性自由振动和强迫振动,表明材料组分指数在板的非线性响应中有显著的影响。Hao 和 Zhang 等^[9]研究了在横向荷载和面内激励共同作用下,四边简支板的非线性动力响应、1:1 内共振和主参数共振分岔等问题。最近,王云、丁浩江等^[10]用直接位移法研究了横观各向同性功能梯度圆板的自由振动问题。目前对于热环境中功能梯度圆板的非线性动力响应和动应力分析鲜有报道。本文中主要分析了热环境中功能梯度圆板在横向简谐激励作用下的非线性动力响应和板内的动应力变化情况。

1 功能梯度圆板的材料物性参数

对于半径为 R 、厚度为 h 的陶瓷-金属功能梯度材料圆板,建立图 1 所示的坐标系 (r, θ, z) 。功能梯度圆板的材料性质沿厚度方向呈现梯度变化,材料物性参数可表示为

$$P = P_c V_c + P_m V_m \tag{1}$$

式中: P_c 和 P_m 分别为陶瓷和金属材料的物性参数,且随温度变化而变化^[11]

$$P_{c,m} = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \tag{2}$$

其中: P_0 、 P_{-1} 、 P_1 、 P_2 和 P_3 是温度相关系数,由材料自身性质决定; V_c 和 V_m 分别为陶瓷和金属材料的体积分数,且有

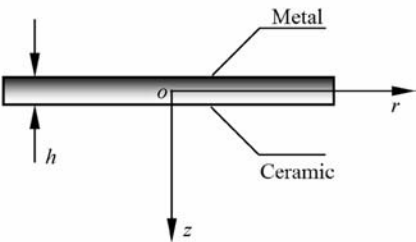


图 1 功能梯度圆板模型和坐标系

Fig. 1 Model of an FGM circular plate and coordinate system

$$V_c + V_m = 1, V_c = (\frac{2z + h}{2h})^n \tag{3}$$

式中: n 为体积分指数(非负实数)。

假定材料的弹性模量 E 、热胀系数 α 依赖于温度的变化,而泊松比 μ 、热传导率 κ 和物质密度 ρ 则与温度无关。由式(1)和式(3)可得

$$E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T))(\frac{2z + h}{2h})^n + E_m(T),$$

$$\alpha(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T))(\frac{2z + h}{2h})^n + \alpha_m(T),$$

$$\mu(z) = (\mu_c - \mu_m)(\frac{2z + h}{2h})^n + \mu_m,$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)(\frac{2z + h}{2h})^n + \rho_m,$$

$$\kappa(z) = (\kappa_c - \kappa_m)(\frac{2z + h}{2h})^n + \kappa_m. \tag{4}$$

假定温度场是只沿厚度方向变化的一维温度场,其分布函数满足热传导方程

$$-\frac{d}{dz}[\kappa(z) \frac{dT}{dz}] = 0 \tag{5}$$

其热边界条件如下: (1) 在陶瓷一侧($z = h/2$)是 $T = \Delta T_c$; (2) 在金属一侧($z = -h/2$) $T = \Delta T_m$ 。式(5)的解可用多项式表示^[12]。

2 功能梯度圆板基本方程

针对圆板轴对称问题,泊松比 μ 取为常数,根据 Kirchhoff 经典薄板理论,有如下应力-应变关系:

$$\sigma_r = \frac{E(z)}{1 - \mu} \left[\frac{1}{1 + \mu} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta) - \alpha(z) \Delta T(z) \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(z)}{1 - \mu} \left[\frac{1}{1 + \mu} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r) - \alpha(z) \Delta T(z) \right]. \tag{6}$$

在考虑几何非线性的情况下,板内各点应变分量的表达式为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^0 \\ \epsilon_\theta^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_r^1 \\ \epsilon_\theta^1 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

式中: $\begin{Bmatrix} \epsilon_r^0 \\ \epsilon_\theta^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w_0}{\partial r})^2 \\ \frac{u_0}{r} \end{Bmatrix}$, 表示中面应变;

$\begin{Bmatrix} \epsilon_r^1 \\ \epsilon_\theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \end{Bmatrix}$, 表示中面曲率及扭率的变化

量; u_0 、 w_0 是板中面位移分量。

针对热载荷与横向简谐均布力共同作用下的功

能梯度圆板, 应用虚功原理, 结合式(4)~式(7)并引入应力函数 $\psi(r, t)$, 可推得如下以应力函数和中面位移表示的非线性振动微分方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = -\frac{B_1 h}{2r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h^3 B_2^2}{B_1 (1 - \mu^2)} - \frac{h^3 B_4}{1 - \mu^2} \right) (\nabla^4 w_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \\ & \frac{h B_2}{B_1 (1 - \mu^2)} \left[r \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + (5 - \mu) \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{3 - 2\mu}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right) \right] + \frac{h^2 B_2}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{2 - \mu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right] + P_z = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (9) \end{aligned}$$

$$u_0 = \frac{r}{B_1 h} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\mu}{B_1 h} \psi + \frac{B_2 h}{B_1} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{r B_3}{B_1} \quad (10)$$

式中: P_z 为激励载荷; δ 为线性阻尼系数; t 为时间变量; $I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$ 为面质量密度; $B_s (s = 1 \sim 4)$ 表示只与材料物性参数和体积分指数有关的常数:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{h} dz, \quad B_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{h^2} z dz, \\ B_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) \Delta T(z)}{h} dz, \quad B_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{h^3} z^2 dz. \end{aligned}$$

3 功能梯度圆板的振动微分方程求解

考虑周边固支无滑动边界约束的功能梯度圆板, 其边界条件为: 在 $r = 0$ 处, $u_0 = 0$, $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$;

在 $r = R$ 处, $w_0 = 0$, $u_0 = 0$, $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$ 。所受的横向简谐激励为 $P_z = q_0 \cos \omega t$ (q_0 为激励幅值, ω 为激励频率)。设满足边界条件的位移解为如下形式:

$$w_0 = f(t) \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (11)$$

将式(11)代入振动微分方程(8)~(10)中, 并应用伽辽金法进行积分, 经过推导, 根据圆板热传导温度场及材料体积分指数变化情况, 可得到如下两种类型的 Duffing 型非线性振动无量纲微分方程:

(1) 渐硬恢复力型 Duffing 方程

$$\ddot{g} + \eta_1 \dot{g} + g + \eta_2 g^3 = \eta_3 \cos \Omega \tau \quad (12)$$

(2) Holmes-Duffing 方程

$$\ddot{g} + \eta_1 \dot{g} - g + \eta_2 g^3 = \eta_3 \cos \Omega \tau \quad (13)$$

式中: $\dot{g}$ 和 $\ddot{g}$ 分别表示 g 对 τ 的一阶和二阶导数; 无量纲变量 $g(\tau) = f/h$, $\tau = \omega_0 t$; 系数 $\Omega = \omega/\omega_0$,

$$\omega_0^2 = \left| \frac{320}{3 I_0 R^4} \left[\frac{h^3 B_3}{B_1 (1 - \mu^2)} - \frac{h^3 B_4}{1 - \mu^2} \right] + \frac{20 B_3 h}{3 R^2} \right|,$$

$$\eta_1 = \frac{\delta}{I_0 \omega_0}, \quad \eta_2 = \frac{h^3 B_1}{I_0 R^4 \omega_0^2} \left[\frac{(50 - 30\mu)}{9(1 - \mu)} - \frac{40}{21} \right],$$

$$\eta_3 = \frac{5 q_0}{3 I_0 h \omega_0^2}.$$

对于渐硬恢复力型 Duffing 方程, 考虑到它的强非线性引入参数 ϵ , 它可以是较大的数, 则方程改写为

$$\ddot{g} + g = -\epsilon \eta'_1 \dot{g} - \epsilon \eta'_2 g^3 + \epsilon \eta'_3 \cos \Omega \tau \quad (14)$$

$$\text{式中: } \eta'_1 = \frac{\eta_1}{\epsilon}, \quad \eta'_2 = \frac{\eta_2}{\epsilon}, \quad \eta'_3 = \frac{\eta_3}{\epsilon}.$$

引入变换

$$\lambda = \frac{\epsilon \omega_1}{1 + \epsilon \omega_1} \quad (15)$$

并考虑主共振情况, 利用改进的 L-P 法经过一系列运算推导可以确定出

$$\omega_1 = \frac{3 \eta'_2 \eta'_3}{4 \eta'_1} \quad (16)$$

由式(15)可知 λ 是一个小参数, 它可将强非线性系统(14)变成一个弱非线性系统

$$\ddot{g}_0 + g + \frac{\lambda \eta'_2}{\omega_1 - \lambda \omega_1} g^3 = \frac{\lambda \eta'_3}{\omega_1 - \lambda \omega_1} \cos \Omega \tau \quad (17)$$

将方程(17)的解展成小参数 λ 的幂级数, 设

$$g(\lambda, \tau) = g_0(T_0, T_1) + \lambda g_1(T_0, T_1) + \dots \quad (18)$$

其中: $T_0 = \tau$; $T_1 = \lambda \tau$ 。

考虑主共振情况, 将式(18)代入式(17)中, 令 λ 同次幂相等得到

$$D_0^2 g_0 + g_0 = 0 \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 g_1 + g_1 &= \frac{\eta'_3}{\omega_1} \cos \Omega \tau - 2 D_0 D_1 g_0 - \frac{\eta'_1}{\omega_1} D_0 g_0 - \frac{\eta'_2}{\omega_1} g_0^3 \\ &\quad (19b) \end{aligned}$$

式中: $D_j = \frac{\partial}{\partial T_j}$ ($j = 0, 1, \dots$)。

设方程(19a)解的形式为

$$g_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0} \quad (20)$$

式中: $\bar{A}$ 为 A 的共轭项; i 是单位虚数。将式(20)代入式(19b)中得到

$$\begin{aligned} D_0^2 g_1 + g_1 &= \left(-2i D_1 A - i \frac{\eta'_1}{\omega_1} A - 3 \frac{\eta'_2}{\omega_1} A^2 \bar{A} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\eta'_3}{2 \omega_1} e^{iT_0} - \frac{\eta'_2}{\omega_1} A^3 e^{3iT_0} + \text{cc} \right) e^{iT_0} \quad (21) \end{aligned}$$

其中: cc 表示共轭项。要消除式(21)中的久期项, 须有

$$-i2D_1A - i\frac{\eta'_1}{\omega_1}A - 3\frac{\eta'_2}{\omega_1}A^2\bar{A} + \frac{\eta'_3}{2\omega_1}e^{i\frac{T_1}{2}} = 0 \quad (22)$$

将 A 写成复数形式: $A = \frac{1}{2}a(\tau)e^{i\vartheta(\tau)}$, 代入式(21)

并分离实部和虚部, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\eta'_1}{2\omega_1}a + \frac{\eta'_3}{2\omega_1}\sin\left(\frac{T_1}{2} - \theta\right) \\ a\dot{\theta} &= \frac{3\eta'_1a^3}{8\omega_1} - \frac{\eta'_3}{2\omega_1}\cos\left(\frac{T_1}{2} - \theta\right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

所以, 方程(12)的一次近似解析解为

$$g = a\cos(\theta + \tau) + \frac{\lambda\eta_1^2}{24\eta_3^2}a^3\cos(\theta + \tau) \quad (24)$$

式中: a 、 θ 由式(23)确定; λ 由式(15)和式(16)确定。

而对于 Holmes-Duffing 方程(13), 显然可通过求解微分方程(13)得到 $g(\tau)$, 将式(11)代入式(8)中可确定应力函数 $\phi(r, t)$, 结合式(10)、式(11)和应力函数 $\phi(r, t)$ 的表达式便得到

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{(5-3\mu)h^2}{6R^2}g(\tau)r - \frac{4B_2h^2}{B_1R^2}g(\tau)r - \\ &\frac{(3-\mu)h^2}{R^4}g^2(\tau)r^3 + \frac{4B_2h^2}{B_1R^4}g^2(\tau)r^3 + \\ &\frac{2(5-\mu)h^2}{3R^6}g^2(\tau)r^5 + \frac{(\mu-7)h^2}{6R^8}g^2(\tau)r^7 \end{aligned} \quad (25)$$

此即圆板动力响应下的中面径向位移表达式, 将其与式(11)同时代入式(7)中得到圆板的应变表达式, 然后利用式(6)便可得到圆板非线性振动时的应力。由于表达式冗长, 在此将不予给出, 将只对其作数值分析。

4 数值算例和讨论

考虑一半径 $R=0.3$ m、厚度 $h=0.004$ m 的功能梯度圆板, 激励幅值 $q_0=100$ N/m², 无量纲频率 $\Omega=1.02$ 。圆板无热应变时的环境温度为 300 K, 金属侧温度 $\Delta T_m=300$ K, 陶瓷侧温度 $\Delta T_c=340$ K。其组分材料由氧化锆和钛合金构成, 记作 $ZrO_2/(Ti-6Al-4V)$ 。材料密度和热传导率为: 对 ZrO_2 , $\rho_c=3000$ kg/m³, $\kappa_c=1.80$ W/(m·K); 对于 $Ti-6Al-4V$, $\rho_m=4429$ kg/m³, $\kappa_m=7.82$ W/(m·K)。弹性模量和热胀系数均随温度的变化而变化, 具体数据见文献[13], 泊松比均为 $\mu=0.3$ 。当不考虑功能梯度圆板所处的外界温度时, 系统刚度项为正, 是渐硬恢复力型 Duffing 系统。而考虑温度效应时, 随着温度的改变, 其系统刚度项有正负之分, 因此

可呈现出两种不同的动力学系统, 即渐硬恢复力型 Duffing 系统和 Holmes-Duffing 系统, 下边分别给予考虑。

4.1 渐硬恢复力型 Duffing 系统

为了研究功能梯度材料体积分数指数和温度场对系统动力特性的影响, 变化材料体积分数指数 n , 可以得到渐硬恢复力型 Duffing 系统振动幅值相对于体积分数指数的无量纲全局分岔图和系统在不同体积分数指数下的相图、Poincare 映射图以及幅值谱。

图 2 给出了体积分数变化时非线性系统的动态特性。从图 2(a)可以看出, 不考虑温度效应时, 系统的响应只表现为单周期响应, 振动幅值只有微小变化, 无明显分岔现象。而考虑温度效应时, 从图 2(b)可以看出, 系统的响应经历了从混沌→倍周期→周期的运动过程, 系统响应的幅值有跳跃现象。

只改变图 2 中的体积分数指数 n , 系统的其它

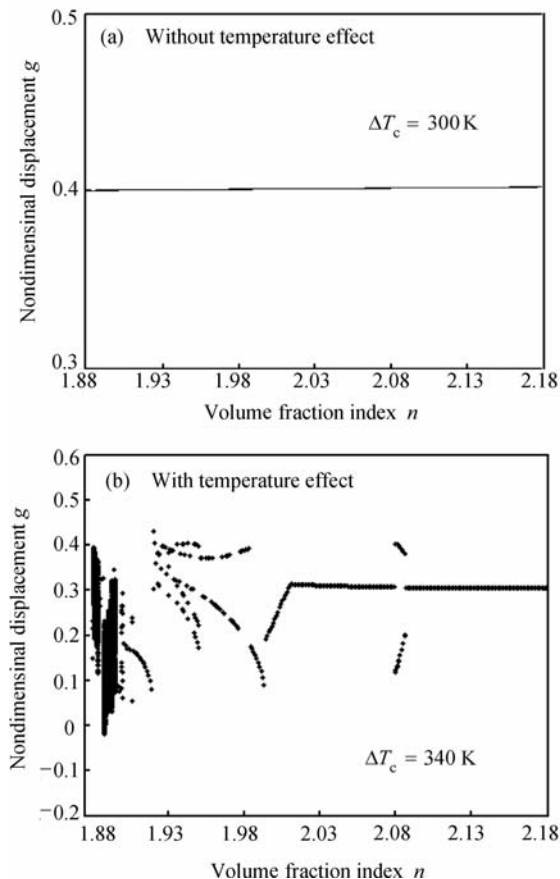


图 2 Duffing 系统体积分数指数 n 的分岔图
Fig. 2 Bifurcation of the Duffing system for the volume fraction index

参数和初始条件不变。首先针对图 2(a)，图 3 给出了 $n = 2$ 时的系统响应图。对于图 2(b)来说，当 $n = 1.89$ ，系统会出现混沌运动，如图 4 所示，图中幅值谱为连续谱且出现噪声背景，Pointcare 映射图具有精细几何结构，混沌特征明显。当 $n = 1.99$ 时，系统变为 2 倍周期运动，如图 5 所示。图中相图呈现两圈相套的形式，幅值谱出现两个主要峰值，Pointcare 映射图上只有两个孤立的点。当 $n = 2.08$ 时，系统由 2 倍周期运动变为 3 倍周期运动并伴随有跳跃现象，Pointcare 映射图上有 3 个孤立的点，如图 6 所示。当体积分数指数 n 越过 2.08 附近区域后，系统变为单周期运动。可见，随着材料体积分数指数的变化，功能梯度圆板出现了一系列复杂的运动形式。

4.2 Holmes - Duffing 系统

在考虑温度效应，其它参数不变的情况下，变化材料体积分数指数 n ，得到了 Holmes - Duffing 系统振动幅值相对于体积分数指数的无量纲全局分岔图(图 7)和系统在不同体积分数指数下的响应图(图 8~图 10)。

从图 7 总体来看，系统经历了从周期→倍周期→混沌的分岔运动过程，其间呈现出从倍周期到混沌的交替现象，且具有阵发现象；在混沌运动过程中，夹杂有周期窗口；在倍周期运动过程中，发生了大量跳跃现象。

针对图 7 中的情况，现讨论不同体积分数指数 n 的系统响应。当体积分数指数 n 在 $[1.45, 1.52]$ 区域时，系统表现为单周期运动，其中 $n = 1.5$ 时

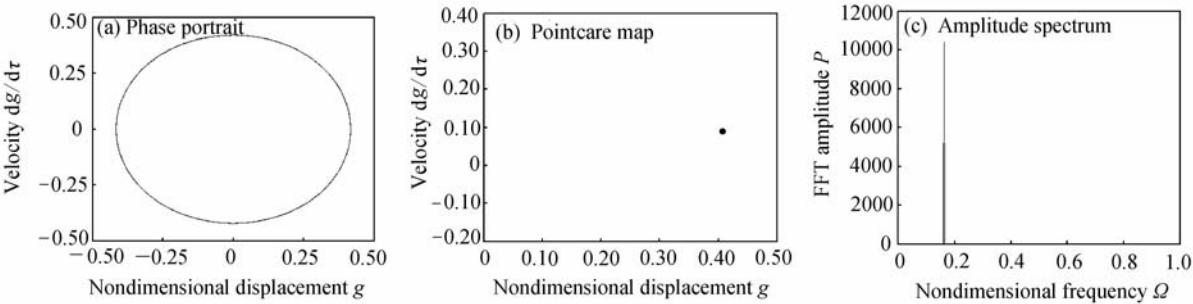


图 3 $n = 2$ 时 Duffing 系统的周期运动
Fig. 3 Period motion of the Duffing system at $n = 2$

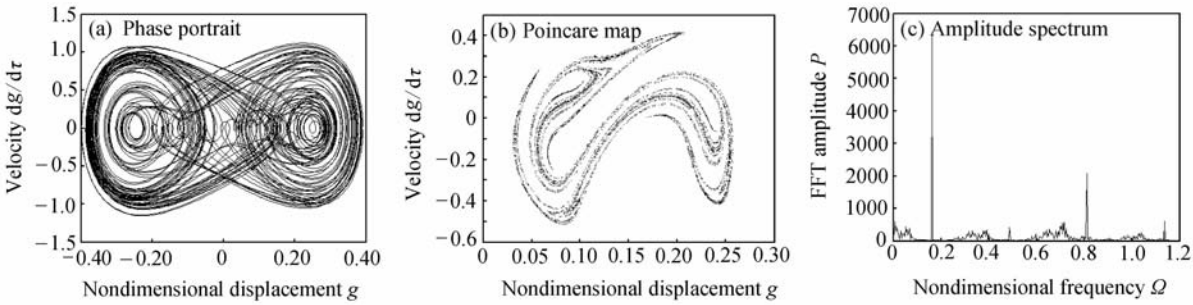


图 4 $n = 1.89$ 时 Duffing 系统的混沌响应
Fig. 4 Chaotic motion of the Duffing system at $n = 1.89$

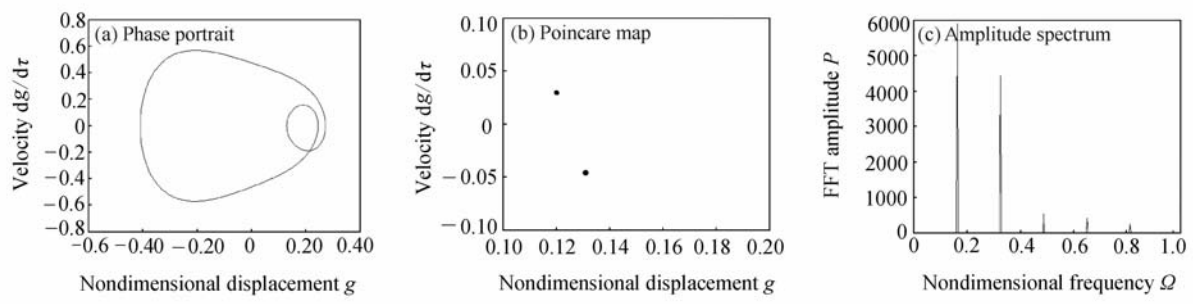


图 5 $n = 1.99$ 时 Duffing 系统的二倍周期运动
Fig. 5 Period-2 motion of the Duffing system at $n = 1.99$

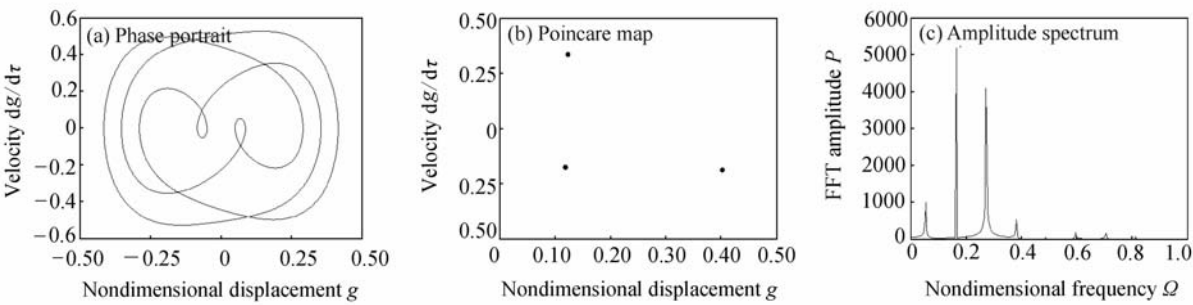


图 6 $n = 2.08$ 时 Duffing 系统的三倍周期运动
Fig. 6 Period-3 motion of the Duffing system at $n = 2.08$

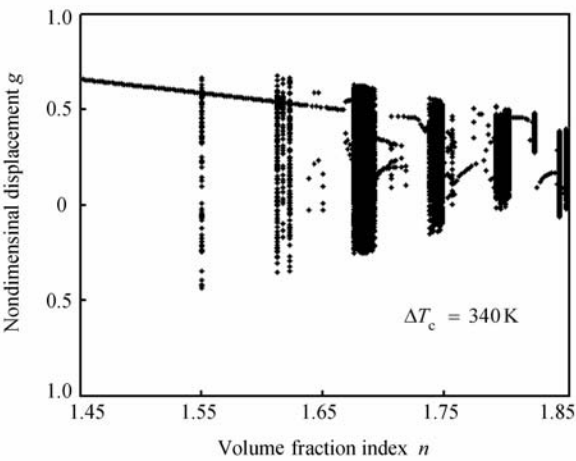


图 7 Holmes-Duffing 系统体积分数指数 n 的分岔图
Fig. 7 Bifurcation of the Holmes-Duffing system with volume fraction index

系统的周期响应如图 8 所示。增大体积分数指数，当 $n = 1.65$ 时，图 9 中的相图上呈现四圈相套形式，Poincaré 映射图则出现 4 个点组成的点集，说明系统表现为典型的四倍周期响应。继续增大 n ，从图 7 中可看出，系统的非线性动力响应十分复杂，倍周期响应和混沌响应交替发生。如图 10 所示，当材料体积分数指数为 $n = 1.85$ 时，时间历程图不具有周期性，相轨迹十分杂乱，而 Poincaré 映射图表现为密集的一片黑点且呈现出精细的几何结构，说明系统表现出明显的混沌运动。

为了更加深入地分析功能梯度圆板的动力响应，图 11 给出了圆板中心动应力随体积分数指数 n 的变化情况。其中，图 11(a)表示圆板中心最大动应力随 n 的变化情况，图 11(b)表示圆板中心发生

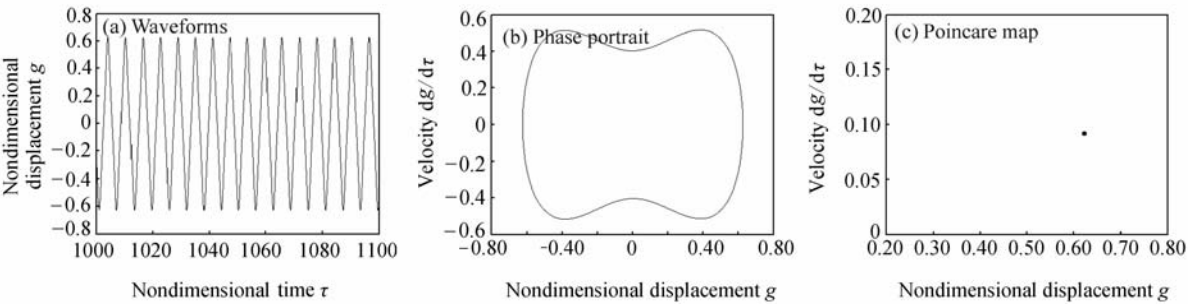


图 8 $n = 1.5$ 时 Holmes-Duffing 系统的周期响应
Fig. 8 Period motion of the Holmes-Duffing system at $n = 1.5$

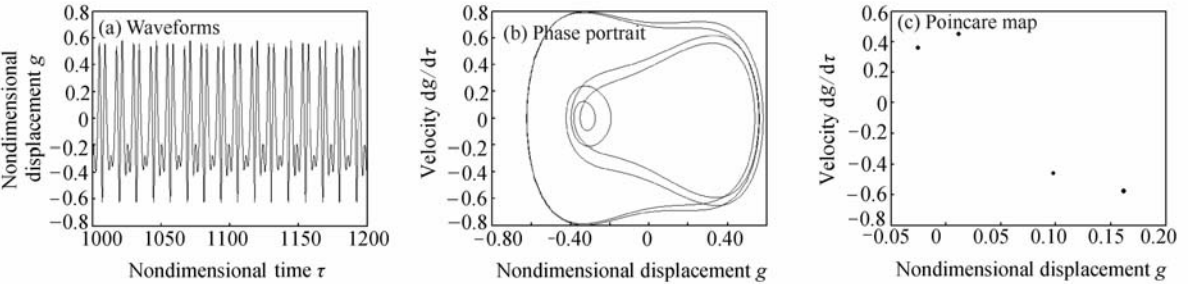


图 9 $n = 1.65$ 时 Holmes-Duffing 系统的四倍周期响应
Fig. 9 Period-4 motion of the Holmes-Duffing system at $n = 1.65$

最大变形时动应力随 n 的变化情况。比较两图不难看出, 圆板在最大变形时其动应力并没有达到最大, 这主要是温度应力所致。结合图 7 可看出, 当系统进行周期或倍周期振动时, 板内动应力的变化是连续的, 曲线十分平滑; 当系统发生分岔或混沌

响应时, 板内动应力出现大幅变化, 呈现出应力跳跃现象, 系统混沌响应时这一现象尤为明显。从图 12 给出的应力时间历程可看出, 系统周期响应时圆板内应力变化十分规律, 而混沌响应时板内应力无规律性且不可预测。

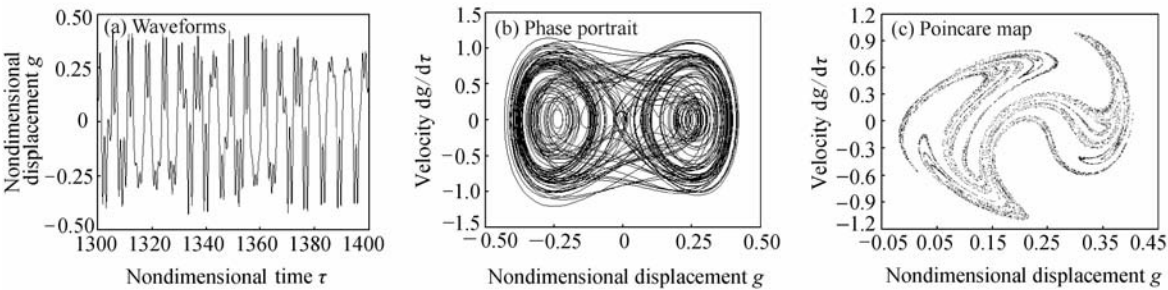


图 10 $n = 1.85$ 时 Holmes-Duffing 系统的混沌响应
Fig. 10 Chaotic motion of the Holmes-Duffing system at $n = 1.85$

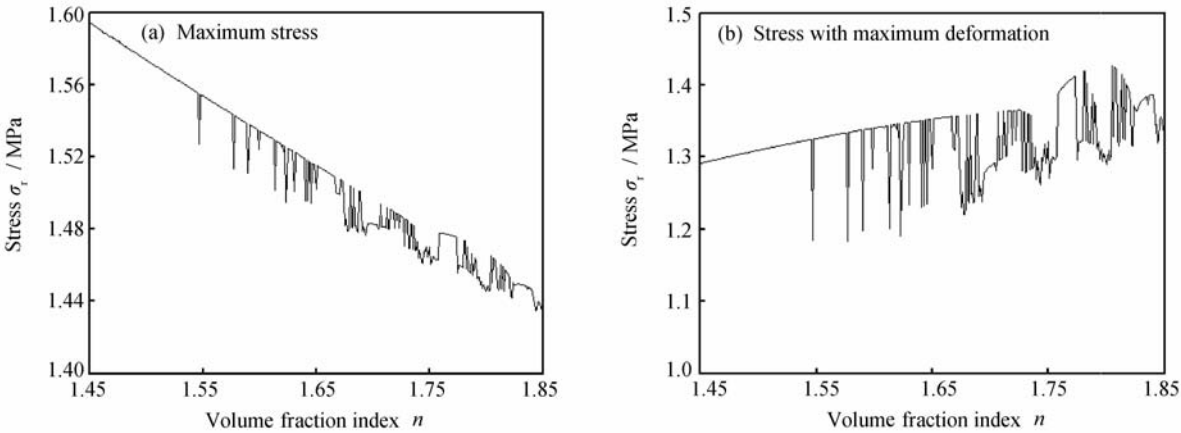


图 11 圆板中心动应力随体积分数指数变化曲线
Fig. 11 Variation of dynamic stress at the center of the circular plate with the volume fraction index

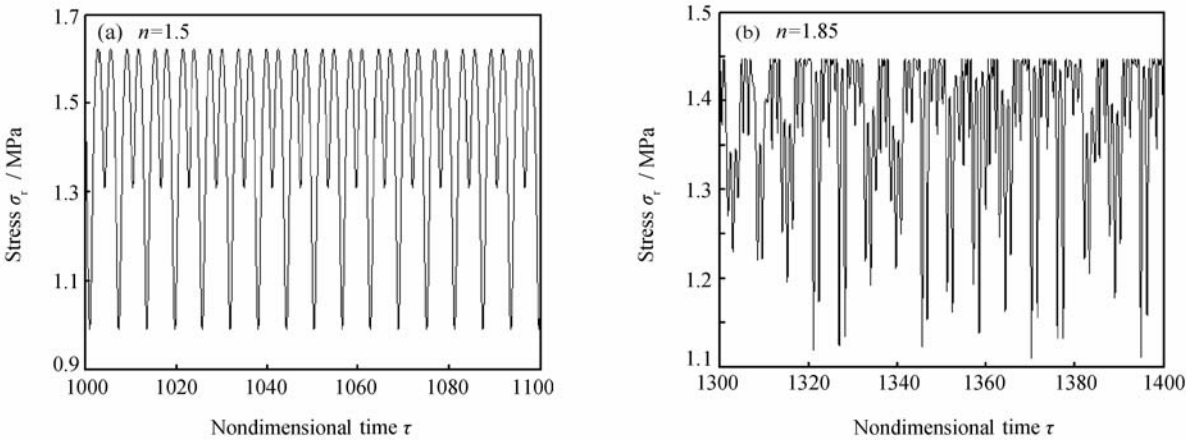


图 12 圆板中心动应力的时间历程图
Fig. 12 Time history of the dynamic stress at the center of the circular plate

5 结 论

(1) 功能梯度圆板所处的热环境对系统有重要影响, 可使圆板呈现出两种动力系统且表现出复杂的分岔现象, 而不考虑温度时则没有分岔现象发生。

(2) 热环境中功能梯度圆板随体积分数指数的变化可使系统出现周期响应、倍周期响应和混沌响应。

(2) 功能梯度圆板中心处动应力在系统发生分岔或出现混沌响应时出现大幅变动, 且在混沌响应时具有不可预测性。在实际应用中应当选取适当参数以避免发生混沌响应, 防止其发生难以预料的疲劳破坏。

参考文献:

- [1] Parveen G N, Reddy J N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic - metal plates [J]. *International Journal of Solids Structures*, 1998, 35 (33): 4457-4476.
- [2] Ng T Y, Lam K Y, Liew K M. Effect of FGM materials on the parametric resonance of plate structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 19(8/9/10): 953-962.
- [3] Yang J, Shen H S. Free vibration and parametric resonance of shear deformable functionally graded cylindrical panels [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261(5): 871-893.
- [4] 陈伟球, 叶贵如, 蔡金标, 等. 横向各向同性功能梯度材料矩形板的自由振动 [J]. *振动工程学报*, 2001, 14(3): 263-267.
Chen Weiqiu, Ye Guiru, Cai Jinbiao, et al. Free vibration of transversely isotropic FGM rectangular plates [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 14(3): 263-267.
- [5] 陈伟球, 叶贵如, 蔡金标, 等. 球面各向同性功能梯度球壳的自由振动 [J]. *力学学报*, 2001, 33(4): 768-775.
Chen Weiqiu, Ye Guiru, Cai Jinbiao, et al. Free vibrations of a functionally graded spherically isotropic hollow sphere [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2001, 33(6): 768-775.
- [6] 曹志远. 不同条件功能梯度矩形板固有频率解的一般表达式 [J]. *复合材料学报*, 2005, 22(5): 172-177.
Cao Zhiyuan. Unified expression of natural frequency solutions for functionally graded composite rectangular plates under various boundary conditions [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(5): 172-177.
- [7] 曹志远. 功能梯度板的非线性动力分析 [J]. *固体力学学报*, 2006, 27(1): 21-25.
Cao Zhiyuan. Nonlinear dynamic analysis of functionally graded material plates [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, 27(1): 21-25.
- [8] Allahverdizadeh A, Naei M H, Nikkiah B M. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 310 (4/5): 966-984.
- [9] Hao Y X, Chen L H, Zhang W. Nonlinear oscillations, bifurcations and chaos of functionally graded materials plate [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 312(4/5): 862-892.
- [10] 王 云, 徐荣桥, 丁浩江. 功能梯度圆板的自由振动 [J]. *应用力学和数学*, 2009, 30(9): 1009-1014.
Wang Yun, Xu Rongqiao, Ding Haojiang. Free axisymmetric vibration of FGM circular plates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 30(9): 1009-1014.
- [11] Touloukian Y S. Thermo physical properties of high temperature solid materials [M]. New York: McMillan, 1967.
- [12] Shen H S. Thermal post bulking behavior of shear deformable FGM plates with temperature - dependent properties [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49(4): 466-478.
- [13] Reddy J N, Chin C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates [J]. *Journal of Thermal Stress*, 1998, 21(6): 593-629.