

## 蔡氏模量与Double-Double铺层设计在混杂纤维层合板中的应用

阮晨龙 贡博文 王欢 彭华新

### Tsai's modulus and Double-Double design in hybrid laminates

RUAN Chenlong, GONG Bowen, WANG Huan, PENG Huaxin

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20250305.001>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 双斜接修补复合材料层合板的拉伸行为及影响因素双斜接修补复合材料层合板的拉伸行为及影响因素

Tensile behavior and effect factors of double scarf-repaired composite laminates

复合材料学报. 2019, 36(6): 1421–1427 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180827.004>

#### 层间混杂复合材料板的拉伸强度预报

Prediction on tensile strength of inter-ply hybrid composite laminates

复合材料学报. 2017, 34(4): 795–800 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20160711.001>

#### 双屏蔽(B<sub>4</sub>C-W)/6061Al层状复合板设计与性能

Design and properties of double shielding (B<sub>4</sub>C-W)/6061Al laminated composite board

复合材料学报. 2021, 38(10): 3387–3393 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20201225.001>

#### 碳纤维增强树脂复合材料-热成型钢超混杂层合板层间力学性能

Interlaminar mechanical properties of carbon fiber reinforced plastics-thermoformed steel super-hybrid laminates

复合材料学报. 2020, 37(10): 2418–2427 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20200215.002>

#### 陶瓷/纤维层间混杂复合材料设计制作及抗弹体冲击性能测试

Design and fabrication of ceramic/fiber interlayer hybrid composites and test of projectile impact resistance

复合材料学报. 2021, 38(8): 2684–2693 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20210513.008>

#### 混杂比对单向碳-玻层间混编复合材料0° 压缩和弯曲性能的影响

Effects of hybrid ratio on the axial compressed and flexural properties of unidirectional inter-layer carbon-glass hybrid composites

复合材料学报. 2017, 34(4): 758–765 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20160630.003>



扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20250305.001

蔡氏模量与 Double-Double 铺层设计在混杂纤维层合板中的应用



分享本文

阮晨龙, 贡博文, 王欢\*, 彭华新

(浙江大学 材料科学与工程学院, 杭州 310027)

**摘 要:** 传统的连续纤维层合板通常由 0°、45°、-45°、90° 角度铺层 (Quad) 构成。但 Quad 铺层的刚度可设计空间有限, 过多的排列顺序也使得铺层优化和减薄设计异常困难。Double-Double (DD) 层合板基于蔡氏模量不变性, 给出了传统铺层的替代方法, 有望简化铺层和结构的设计流程。目前有关 DD 层合板的设计方案主要考虑单一碳纤维的层合板, 对于混杂层合板的研究还有待开展。为了将 DD 层合板的设计扩展到混杂条件下, 根据蔡氏模量不变性, 研究了混杂 DD 层合板的归一化刚度特点与铺层等效设计方法, 并通过实验验证了混杂 DD 层合板的铺层替代可行性和在减薄设计上的优势。结果表明, 混杂 DD 层合板的归一化刚度满足蔡氏模量混杂比例  $p^*$  的混杂定律, 混杂 DD 层合板的铺层参数  $V$  与等效设计范围受到混杂比例和纤维类型的影响。具有更高同质性的混杂 DD 铺层策略为重复构型  $[+\phi_g/-\psi_c/+\psi_c/-\phi_g]_r$  (拉弯一致) 或对称构型  $[\pm\phi_g/\pm\psi_c]_s$  (无耦合效应)。混杂碳纤维/玻璃纤维混杂铺层的拉伸性能等效实验表明, 混杂 DD 层合板及其减薄后的构型可以实现刚度的等效替代 (误差 < 3%), 拉伸强度表现上则受到铺层构型和具体失效模式的影响 (误差 -15.2%~+2.1%)。显示出混杂 DD 层合板铺层等效的可行性, 为混杂层合板的设计提供了新思路。

**关键词:** Double-Double; 蔡氏模量; 混杂复合材料; 层合板; 拉伸性能

**中图分类号:** TB332      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-3851(2025)12-7238-14

Tsai's modulus and Double-Double design in hybrid laminates

RUAN Chenlong, GONG Bowen, WANG Huan\*, PENG Huaxin

(School of Materials Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** Traditional laminates are usually made up of plies with 0°, 45°, -45°, and 90° (Quad). However, the Quad layup has limited design space for stiffness, and the excessive arrangement sequence makes ply optimization and thickness reduction design exceptionally difficult. The Double-Double (DD) laminate, based on the invariance of the Tsai modulus, provided an alternative method to traditional layup. It held promise for simplifying the design process of laminate layups and structures. Currently, research for DD laminates primarily focused on the single carbon fiber types, while further research is needed for hybrid laminate configurations. To extend the design of DD laminates to hybrid conditions, the normalized stiffness and equivalent replacement for hybrid DD laminates were investigated based on the invariance of the Tsai modulus. Experimental verification confirmed the feasibility of ply replacement for hybrid DD laminates and their advantages in thickness reduction design. The results indicated that the normalized stiffness of hybrid DD laminates followed the hybrid law with respect to the Tsai modulus hybrid proportion  $p^*$ . The layup parameters  $V$  and allowable range for equivalent replacement of hybrid DD laminates were influenced by the hybrid proportion and fiber types. A hybrid DD layup strategy with higher homogeneity can be

收稿日期: 2025-01-02; 修回日期: 2025-02-02; 录用日期: 2025-02-15; 网络首发时间: 2025-03-05 19:38:33  
网络首发地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20250305.001>  
基金项目: 浙江省“尖兵”“领雁”研发攻关计划 (2023C01009)  
“Pioneer” and “Leading Goose” R&D Program of Zhejiang (2023C01009)  
通信作者: 王欢, 博士, 实验师, 研究方向为复合材料结构设计与制造技术 E-mail: [hwang2014@zju.edu.cn](mailto:hwang2014@zju.edu.cn)  
引用格式: 阮晨龙, 贡博文, 王欢, 等. 蔡氏模量与 Double-Double 铺层设计在混杂纤维层合板中的应用 [J]. 复合材料学报, 2025, 42(12): 7238-7251.  
RUAN Chenlong, GONG Bowen, WANG Huan, et al. Tsai's modulus and Double-Double design in hybrid laminates[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2025, 42(12): 7238-7251(in Chinese).

achieved through a repeated configuration  $[+\Phi_g/-\Psi_c/+\Psi_c/-\Phi_g]_r$  (tension-bending consistency) or a symmetric configuration or  $[\pm\Phi_g/\pm\Psi_c]_s$  (no coupling effect). Tensile experimental results for the equivalent layup of hybrid carbon fiber/glass fiber quasi-isotropic laminates indicated that hybrid DD laminates and their reduced-thickness configurations could achieve equivalent tensile stiffness substitution (error<3%), while tensile strength was influenced by specific configurations and failure modes (error ranging from -15.2% to +2.1%). This demonstrates the feasibility of equivalent ply substitution for hybrid DD laminates and provides a new approach for the design of hybrid laminates.

**Keywords:** Double-Double; Tsai modulus; hybrid composites; laminates; tensile performance

以连续纤维作为增强相的纤维增强树脂基复合材料 (FRP) 与金属材料相比具有质量轻、比刚度和比强度高、耐腐蚀、可设计性强等优势, 因此广泛应用于建筑、车辆、船舶、航空航天等领域<sup>[1-2]</sup>。传统的纤维层合板一般由 0°、45°、-45°、90° 4 种铺层角度组成 (Quad), 根据一些半经验的铺层规律和设计方法, 通过调整 4 种角度的比例和排列顺序来设计不同的层合板性能。但 Quad 层合板存在刚度可设计空间小, 铺层设计效率低, 减薄设计困难等缺点, 这限制了层合板材料的进一步应用<sup>[3]</sup>。

为了优化传统的层合板铺层设计思路, Tsai 等<sup>[4]</sup>提出了一种创新的层合板设计——Double-Double (DD) 层合板。DD 层合板是两组对称铺层组成的 DD 铺层单元  $[\pm\Phi/\pm\Psi]$  通过多次重叠构成的层合板结构。DD 层合板可以根据构件的主要载荷方向, 通过调整 DD 单元的两组铺层角度来控制层合板性能, 以达到所需刚度。相比与传统的 Quad 铺层, DD 层合板具有同质性和设计性好、生产制造与减薄设计方便等多方面优势<sup>[3]</sup>。同时, 利用蔡氏模量, DD 层合板只需要这一个材料参数便能进行铺层和刚度设计, 从而达到类似金属一样的快速设计, 有望取代传统的 Quad 铺层, 在各领域得到广泛应用<sup>[5]</sup>。

DD 层合板在铺层替代与结构减薄设计上的优势近年来得到国内外学者的广泛关注<sup>[6-8]</sup>。Erik Kappel<sup>[9]</sup>提出了一种根据层压板强度的 DD 层压板设计优化方案, 重点研究了层合板安全识别过程的鲁棒性, 提出了一种基于 Nettles 圆失效包络和 DD 铺层特征的简单优化方案, 用于寻找最优的 DD 角度与最小重叠次数。Wang 等<sup>[10]</sup>提出了一种隐式的局部和全局模型, 用于优化 DD 层压板的锥度 (变厚度) 设计, 以在给定的质量约束下最大限度地提高屈曲阻力, 或在屈曲约束下减轻质量。杨刚等<sup>[11]</sup>比较了不同铺层方式 (DD、Woven、Quad 铺层) 以及不同基体材料 (环氧树脂,

聚酰胺 6, PA6) 层合板的设计流程和力学性能。结果表明, DD 层合板可以保证刚度性能与相同纤维和基体的 Quad 层合板一致, 并且 DD 层合板的设计效率要明显高于 Quad 层合板。何靓等<sup>[12]</sup>结合 DD 铺层方法与应变能理论, 对复合材料 C 型梁进行了减重优化设计, 结果表明 DD 构件能够有效替代传统铺层构件, 在铺层数目一致时 Double-Double 铺层 C 型梁的弯曲刚度和极限载荷分别提高了 9.28% 和 12.34%。

目前对于 DD 层合板的研究主要集中在对碳纤维增强树脂基复合材料 (CFRP) 单一材料的 DD 层合板设计与性能研究上<sup>[13-15]</sup>, CFRP 由于其更高的纤维/基体模量比值而具有更小的归一化刚度离散性<sup>[16]</sup>, 而对于其他纤维以及混杂纤维层合板的蔡氏模量以及 DD 理论适用性还有待进一步研究。Jia 等<sup>[17]</sup>推导了两种材料组成的夹层混杂层合板的蔡氏模量和归一化刚度矩阵特性, 结果表明混杂层合的蔡氏模量符合混合定律, 但没有讨论不同的混杂比例对归一化刚度矩阵的影响, 且没有设计相关实验对混杂 DD 层合板的刚度进行验证。除此之外没有更多的有关混杂 DD 层合板理论或实验研究。研究混杂 DD 层合板的刚度等效设计方法以及不同混杂 DD 层合板构型的同质性性能特点具有重要的探索意义, 有望进一步扩展 DD 理论的应用范围。另一方面, 含玻璃纤维增强树脂基复合材料 (GFRP) 的混杂层合板可以有效改善单纯 CFRP 材料韧性差的缺陷, 并且能够大幅度提高材料的经济性<sup>[18]</sup>。因此, 开展混杂 DD 层合板的设计方法研究具有重要的研究价值。

本文根据蔡氏模量不变性与混杂定律, 研究了混杂 DD 层合板的设计方法, 讨论了混杂条件下的蔡氏模量以及归一化刚度有效性, 提出了混杂 DD 层合板的铺层等效方法, 研究了混杂 DD 层合板的铺层方式与同质性特点。最后, 通过碳纤维/玻璃纤维混杂层合板的拉伸等效实验, 验证了混杂 DD 层合板的铺层等效方法的可行性和在

减薄设计上的优势。

1 混杂 DD 层合板设计方法

1.1 蔡氏模量与 CFRP-DD 层合板设计方法

Double-Double 层合板的设计理论基础源于 Tsai 与 Melo 在 1994 年提出的不变量理论<sup>[19-20]</sup>：层合板刚度矩阵在张量形式下矩阵的迹 (对角线元素之和) 在任意坐标变换下都保持一致。根据经典层合板理论<sup>[21]</sup>，纤维角度  $\theta$  条件下的单层偏轴刚度矩阵各元素如下式所示：

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \\ \qquad \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + \\ \qquad (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + \\ \qquad (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases} \quad (1)$$

其中： $Q_{ij}$  表示单层材料二维刚度矩阵的对应分量； $\bar{Q}_{ij}$  表示偏轴条件下二维刚度矩阵的对应分量。张量形式下的刚度矩阵  $Q$  通过张量代数运算得到的标量具有不随坐标改变而改变的性质，称为张量的不变量。例如张量形式下的刚度矩阵  $Q$  的对角线元素之和 (迹，Trace)，与铺层角度与方式无关，由下式可得：

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\bar{Q}) &= \bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{66} = \\ &Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} = \text{Trace}(Q) \end{aligned} \quad (2)$$

可见  $\text{Trace}(Q)$  是只与材料有关的参数，其代表了材料刚度性质的总量和上界，对于单向纤维增强的正交各向异性单层， $\text{Trace}(Q)$  可由弹性常数估计，如下式所示：

$$\begin{aligned} \text{Trace}(Q) &= Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} = \\ &\frac{E_1}{1 - \nu_{21}^2 E_2/E_1} + \frac{E_2}{1 - \nu_{21}^2 E_2/E_1} + 2G_{12} \approx \\ &E_1 + E_2 + 2G_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

其中， $E_1$ 、 $E_2$  和  $G_{12}$  分别为单层材料纵向拉伸模量、横向拉伸模量、剪切模量。为了纪念 Tsai 教授在不变量理论以及复合材料力学领域中的重要贡献，多位学者将层合板刚度矩阵的迹命名为蔡

氏模量 (Tsai's modulus)<sup>[22]</sup>。蔡氏模量与杨氏模量和剪切模量类似，都是材料本身的属性。对于 CFRP 材料，刚度设计可以分解为材料和铺层两个独立的参数，如下式所示：

$$Q = \text{Trace}(Q) \cdot Q^* \quad (4)$$

其中：蔡氏模量由所用材料 (碳纤维类型及纤维体积分数) 自身参数决定，与铺层方式无关； $Q^*$  为刚度矩阵经蔡氏模量标准化之后的归一化刚度矩阵 (铺层主刚度，master-ply)，由铺层角度决定，受碳纤维类型的影响不大<sup>[20, 23]</sup>。

基于蔡氏模量不变理论，Tsai 等提出了 Double-Double (DD) 新型层合板设计理念。DD 层合板是由两组对称的角铺层单元 ( $\pm\Phi/\pm\Psi$ ) 经过多次重叠组成的层合板结构，可以在对 Quad 铺层进行等效替代的同时表现出更多性能优势<sup>[24]</sup>。DD 层合板的刚度由两组相互独立的角铺层  $\pm\Phi$  和  $\pm\Psi$  决定，角度的取值可以连续变化，因此 DD 层合板的刚度具有连续的可设计区间，提供了微调层合板性能的可能。通过保证刚度矩阵一致，DD 层合板可以等效替代现有 Quad 铺层设计。由式 (1)，将  $\theta$  角度相关的项分离可以得到单层偏轴刚度的另一种矩阵形式<sup>[25]</sup>：

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{cases} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_1 & -U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_4 & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ \frac{U_1 - U_4}{2} & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & U_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & -U_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中，

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{8}Q_{11} + \frac{3}{8}Q_{22} + \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66} \\ U_2 &= \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{1}{2}Q_{22} \\ U_3 &= \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \\ U_4 &= \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} + \frac{3}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \end{aligned} \quad (6)$$

矩阵  $U$  为材料参数，由层合板材料决定，与铺

层角度无关。对 (5) 进行蔡氏模量归一化处理后得到：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{Bmatrix} = \text{Trace}(Q)U^* \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} dz = \text{Trace}(Q)U^* \sum_{i=1}^n h \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta_i \\ \cos 4\theta_i \\ \sin 2\theta_i \\ \sin 4\theta_i \end{Bmatrix} = \text{Trace}(Q)H \begin{Bmatrix} U_1^* & U_2^* & U_3^* & 0 & 0 \\ U_1^* & -U_2^* & U_3^* & 0 & 0 \\ U_4^* & 0 & -U_3^* & 0 & 0 \\ \frac{U_1^*-U_4^*}{2} & 0 & -U_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_2^*}{2} & U_3^* \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_2^*}{2} & -U_3^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

其中， $V$  为铺层构型参数，与所用层合板材料无关，表示为

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i, V_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos 4\theta_i \\ V_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i, V_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin 4\theta_i \end{aligned} \tag{9}$$

对于 Quad 层合板，4 种角度层的厚度占比分别为  $p_{0^\circ}$ 、 $p_{90^\circ}$ 、 $p_{45^\circ}$ 、 $p_{-45^\circ}$ ，则其铺层参数  $V$  表示为

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{0^\circ} - p_{90^\circ} \\ V_2 &= p_{0^\circ} + p_{90^\circ} - p_{45^\circ} - p_{-45^\circ} \\ V_3 &= p_{45^\circ} - p_{-45^\circ} \\ V_4 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

而对于具有相同材料和单层厚度的 DD 层合板，其铺层参数  $V$  表示为

$$\begin{aligned} V_1 &= (\cos 2\Phi + \cos 2\Psi) / 2 \\ V_2 &= (\cos 4\Phi + \cos 4\Psi) / 2 \\ V_3 &= 0 \\ V_4 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

当利用相同材料的 DD 层合板对 Quad 层合板进行替换时，只需要保证二者  $V_1$ 、 $V_2$  的取值对应相同，则根据式 (8)，两种层合板的面内刚度  $A_{11}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{12}$ 、 $A_{66}$  保持一致。剩余元素  $A_{16}$ 、 $A_{26}$  代表拉伸与剪切的耦合效应，在 DD 层合板中取值为 0，无拉剪耦合。

1.2 混杂条件下的蔡氏模量与归一化刚度

对于碳纤维/玻璃纤维层间混杂的层合板，由于拉伸刚度与铺层顺序无关，因此混杂层合板的蔡氏模量为各自纤维层的蔡氏模量按混杂比例结合，即：

其中， $U^*$  为蔡氏模量归一化后的  $U$ ，由对应的归一化刚度矩阵元素  $Q^*$  代入式 (6) 中得到。为统一符号，本文中带\*角标的量表示经过蔡氏模量归一化处理后的物理量。进而，对于总层数为  $n$ ，单层厚度为  $h$ ，总厚度为  $H$  的层合板，拉伸刚度矩阵  $A$  的各元素表示为

$$\text{Trace}(Q_{\text{hyb}}) = p_c \text{Trace}(Q_c) + p_g \text{Trace}(Q_g) = p_c^* \text{Trace}(Q_{\text{hyb}}) + p_g^* \text{Trace}(Q_{\text{hyb}}) \tag{12}$$

其中： $p_c$ 、 $p_g$  分别表示碳纤维和玻璃纤维各自的混杂比例(厚度比)， $p_c^*$ 、 $p_g^*$  分别定义为碳纤维层和玻璃纤维层对混杂层合板蔡氏模量的贡献比例，即：

$$\begin{aligned} p_c^* &= \frac{p_c \text{Trace}(Q_c)}{p_c \text{Trace}(Q_c) + p_g \text{Trace}(Q_g)} \\ p_g^* &= \frac{p_g \text{Trace}(Q_g)}{p_c \text{Trace}(Q_c) + p_g \text{Trace}(Q_g)} \end{aligned} \tag{13}$$

引入  $p^*$  作为混杂比例是为了简化混杂物理量的表达形式，使其满足关于  $p^*$  的混杂定律形式。混杂条件下的归一化刚度满足关于  $p^*$  的混杂定律，如下式所示：

$$\begin{aligned} Q_{\text{hyb}}^* &= \frac{Q_{\text{hyb}}}{\text{Trace}(Q_{\text{hyb}})} = \frac{p_c Q_c + p_g Q_g}{\text{Trace}(Q_{\text{hyb}})} = \\ &= \frac{p_c \text{Trace}(Q_c) Q_c^* + p_g \text{Trace}(Q_g) Q_g^*}{p_c \text{Trace}(Q_c) + p_g \text{Trace}(Q_g)} = p_c^* Q_c^* + p_g^* Q_g^* \end{aligned} \tag{14}$$

其中， $Q_c^*$  与  $Q_g^*$  分布表示单一材料 CFRP 和 GFRP 的归一化刚度矩阵。因此混杂 DD 层合板的拉伸刚度由两种纤维层合板的刚度之和表示，若同种纤维层的厚度相同(碳纤维单层厚  $h_c$ ，总层数  $n_c$ ，总厚度  $H_c$ ；玻纤层单层厚  $h_g$ ，总层数  $n_g$ ，总厚度  $H_g$ ；混杂层合板总厚度为  $H_{\text{hyb}}$ )，则式 (8) 在混杂条件下的表达式为



$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = \text{Trace}(Q_c) \cdot H_c U_c^* \sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{n_c} \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta_i \\ \cos 4\theta_i \\ \sin 2\theta_i \\ \sin 4\theta_i \end{Bmatrix} + \text{Trace}(Q_g) \cdot H_g U_g^* \sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n_g} \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta_i \\ \cos 4\theta_i \\ \sin 2\theta_i \\ \sin 4\theta_i \end{Bmatrix} = \\
 \text{Trace}(Q_{\text{hyb}}) \cdot H_{\text{hyb}} \begin{bmatrix} U_{1\text{hyb}}^* & U_{2\text{hyb}}^* & U_{3\text{hyb}}^* & 0 & 0 \\ U_{1\text{hyb}}^* & -U_{2\text{hyb}}^* & U_{3\text{hyb}}^* & 0 & 0 \\ U_{4\text{hyb}}^* & 0 & -U_{3\text{hyb}}^* & 0 & 0 \\ \frac{U_{1\text{hyb}}^* - U_{4\text{hyb}}^*}{2} & 0 & -U_{3\text{hyb}}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_{2\text{hyb}}^*}{2} & U_{3\text{hyb}}^* \\ 0 & 0 & 0 & \frac{U_{2\text{hyb}}^*}{2} & -U_{3\text{hyb}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ V_{1\text{hyb}} \\ V_{2\text{hyb}} \\ V_{3\text{hyb}} \\ V_{4\text{hyb}} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} U_{i\text{hyb}}^* &= p_c^* U_{ic}^* + p_g^* U_{ig}^* \\ V_{1\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{2c}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\cos 2\theta_i}{n_c} + p_g^* \frac{U_{2g}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\cos 2\theta_i}{n_g} \\ V_{2\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{3c}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\cos 4\theta_i}{n_c} + p_g^* \frac{U_{3g}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\cos 4\theta_i}{n_g} \\ V_{3\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{2c}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\sin 2\theta_i}{n_c} + p_g^* \frac{U_{2g}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\sin 2\theta_i}{n_g} \\ V_{4\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{3c}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\sin 4\theta_i}{n_c} + p_g^* \frac{U_{3g}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\sin 4\theta_i}{n_g} \end{aligned} \quad (16)$$

可以看到混杂层合板的铺层参数  $V$  不仅与铺层角度  $\theta$  有关, 还受到混杂比例  $p^*$  与归一化刚度矩阵  $U^*$  的影响。纤维类型以及纤维体积分数会对  $Q^*$  以及  $U^*$  产生影响。CFRP 纤维模量远远高于基体模量, 归一化刚度受纤维类型影响较小, 而对于 GFRP, 归一化刚度受纤维类型影响较大<sup>[16]</sup>。对于不同材料或混杂比例的两种层合板的等效, 需要考虑替换前后  $U^*$  的变化。

混杂 DD 层合板的铺层单元  $[\pm\Phi/\pm\Psi]$  的各单层可分别由不同的材料组成。若同一角度系列不是同一种材料, 例如  $[+\Phi_g/+ \Psi_g/-\Phi_c/-\Psi_c]_r$ , 其混杂 DD 单元铺层参数  $V$  的表达式为

$$\begin{aligned} V_{1\text{hyb}} &= \frac{\cos 2\Phi + \cos 2\Psi}{2} \\ V_{2\text{hyb}} &= \frac{\cos 4\Phi + \cos 4\Psi}{2} \\ V_{3\text{hyb}} &= (\sin 2\Psi + \sin 2\Phi) \frac{p_g^* U_{2g}^* - p_c^* U_{2c}^*}{2U_{2\text{hyb}}^*} \\ V_{4\text{hyb}} &= (\sin 4\Psi + \sin 4\Phi) \frac{p_g^* U_{3g}^* - p_c^* U_{3c}^*}{2U_{3\text{hyb}}^*} \end{aligned} \quad (17)$$

可以看到此时铺层参数  $V_{1\text{hyb}}$ 、 $V_{2\text{hyb}}$  项与单一材料 DD 的  $V_{1\text{hyb}}$ 、 $V_{2\text{hyb}}$  一致, 不受材料类型和混杂比例的影响。但是其  $V_{3\text{hyb}}$ 、 $V_{4\text{hyb}}$  项一般不为 0, 导致  $A_{16}$ 、 $A_{26}$  不为 0, 产生拉剪耦合效应, 影响层合板性能, 并且当 DD 单元的重复次数增加时,  $V_{3\text{hyb}}$ 、 $V_{4\text{hyb}}$  不会随之减小, 因此设计混杂 DD 层合板应当避免同一角度类型是不同的材料。本文研究对象的混杂 DD 层合板要求同一角度系列是相同材料, 其中  $\pm\Phi$  层为玻纤层,  $\pm\Psi$  为碳纤层, 同一材料的铺层厚度相同, 因此式 (16) 在  $[\pm\Phi_g/\pm\Psi_c]$  中的表达式为

$$\begin{aligned} V_{1\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{2c}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \cos 2\Psi_c + p_g^* \frac{U_{2g}^*}{U_{2\text{hyb}}^*} \cos 2\Phi_g \\ V_{2\text{hyb}} &= p_c^* \frac{U_{3c}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \cos 4\Psi_c + p_g^* \frac{U_{3g}^*}{U_{3\text{hyb}}^*} \cos 4\Phi_g \\ V_{3\text{hyb}} &= 0 \\ V_{4\text{hyb}} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

与单一材料的 DD 层合板 (式 (11)) 不同, 混杂 DD 层合板的铺层参数  $V$  与材料类型以及混杂比例有关。混杂比例会同时影响  $p^*$  项与  $U^*$  项, 需要在铺层等效设计时进行考虑。

### 1.3 混杂 DD 层合板的铺层等效方法

与单一材料的 DD 层合板一样, 混杂 DD 层合板也可以进行层合板的等效替代。混杂 DD 层合板的等效替代设计流程如图 1 所示。首先根据替代方案选择合适的材料与混杂比例, 对于材料替换, 等效替代要求替换前后蔡氏模量一致, 根据所用两种纤维层板的蔡氏模量和式 (12), 保证

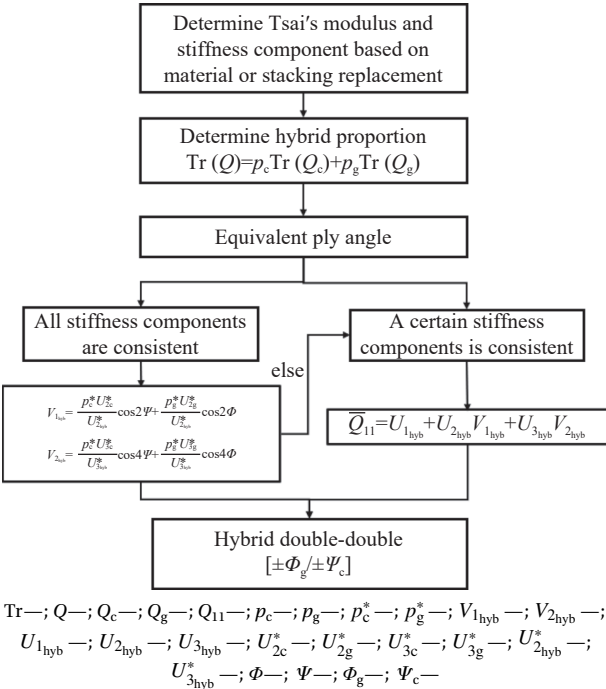


图 1 混杂 Double-Double (DD) 层合板铺层等效设计方法

Fig. 1 Equivalent design process for hybrid Double-Double (DD) laminates

替换前后层合板总体蔡氏模量一致以确定混杂比例, 此时由于替换前后可能采用不同的材料或混杂比例, 求解等效铺层刚度要满足式 (15) 替换前后对应的  $U \cdot V$  乘积项一致。对于铺层替代, 即当所用的材料与混杂比例不变, 层合板总体蔡氏模量与  $U$  保持不变, 只需要铺层参数  $V$  的取值保持一致便可进行等效替换。例如替换相同材料和比例的混杂 Quad 层合板, 其中碳纤层和玻纤层  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $+45^\circ$ 、 $-45^\circ$  铺层占层合板总厚度的比例分别为  $p_{c0^\circ}$ 、 $p_{c90^\circ}$ 、 $p_{c45^\circ}$ 、 $p_{c-45^\circ}$  与  $p_{g0^\circ}$ 、 $p_{g90^\circ}$ 、 $p_{g45^\circ}$ 、 $p_{g-45^\circ}$ , 实现同比例的混杂 DD 替代需要满足:  $V_{1hybQuad}=V_{1hybDD}$ ,  $V_{2hybQuad}=V_{2hybDD}$  其中:

$$V_{1hybQuad} = \frac{p_c^* U_{2c}^*}{p_c U_{2hyb}^*} (p_{c0^\circ} - p_{c90^\circ}) + \frac{p_g^* U_{2g}^*}{p_g U_{2hyb}^*} (p_{g0^\circ} - p_{g90^\circ})$$
$$V_{2hybQuad} = \frac{p_c^* U_{3c}^*}{p_c U_{3hyb}^*} (p_{c0^\circ} - p_{c45^\circ} - p_{c-45^\circ} + p_{c90^\circ}) + \frac{p_g^* U_{3g}^*}{p_g U_{3hyb}^*} (p_{g0^\circ} - p_{g45^\circ} - p_{g-45^\circ} + p_{g90^\circ})$$

(19)

根据式 (18)、(19) 可以求解满足等效替代的混杂 DD 层合板的铺层角度。如果对应方程无解或者蔡氏模量无法保持一致, 则混杂 DD 铺层  $[\pm\Phi_g/\pm\Psi_c]$  无法做到全部分量的等效替代, 此时可以根据设计要求保证某一方向的刚度分量一致。例如要求替换前后纵向刚度  $\bar{Q}_{11}$  一致, 则等效铺层角度需要满足:

$$\bar{Q}_{11} = U_{1hyb} + U_{2hyb} V_{1hyb} + U_{3hyb} V_{2hyb} \tag{20}$$

通过式 (18) 能得到一系列满足条件的铺层角度, 而后根据其他方向的刚度条件或是性能要求进一步确定铺层角度。

混杂比例  $p^*$  还会影响 DD 铺层参数  $V_1$  与  $V_2$  的取值范围, 过大或过小的混杂比例都会缩小  $V$  的取值范围, 可能使得不存在完全等效的  $\Phi_g$  与  $\Psi_c$  铺层角度。图 2 显示了保持相同材料进行混杂 DD 层合板的铺层替代时, 不同混杂比例下  $V_1$  与  $V_2$  取值范围, 其中  $U_{2c}^* = 0.427$ ,  $U_{2g}^* = 0.227$ ,  $U_{2c}^* = 0.427$ ,  $U_{2g}^* = 0.227$ 。图中绿色曲线代表碳纤维层角度  $\Psi_c$  自由变化, 玻璃纤维层角度为  $0^\circ$  或  $90^\circ$  时的  $V_1$ 、 $V_2$  函数关系; 图中红色曲线代表玻璃纤维层角度  $\Phi_g$  自由变化, 碳纤维层角度为  $0^\circ$  或  $90^\circ$  时的  $V_1$ 、 $V_2$  函数关系; 图中蓝色曲线代表玻璃纤维层角度  $\Phi_g$  与碳纤维层角度  $\Psi_c$  相等时的  $V_1$ 、 $V_2$  函数关系; 图像中各曲线最外侧所围成的区域范围为可能的  $V_1$ 、 $V_2$  取值范围。对于单一材料的情况, 即  $p_c^* = 0$  或  $p_c^* = 1$ , DD 层合板简化为角铺层  $[\pm\theta]_n$  (single-double) 的情况, 此时  $V_1$ 、 $V_2$  的取值限制在一条曲线上。随着碳纤层混杂比例  $p_c^*$  的减少, 由玻纤角边界的曲线 (绿色曲线) 向上收缩; 当碳纤层混杂比例  $p_c^*$  增加, 由碳纤角边界曲线 (红色曲线) 向下扩展。当玻纤角边界曲线与碳纤角边界曲线重合时  $V_2$  ( $V_1=0$ ) 取到最大值 1.0, 此时:

$$0 = \frac{p_c^* U_{2c}^*}{U_2^*} \cos 2 \times 90^\circ + \frac{(1-p_c^*) U_{2g}^*}{U_2^*} \cos 2 \times 0^\circ$$
$$p_c^* = \frac{U_{2g}^*}{U_{2c}^* + U_{2g}^*} = 0.347 \tag{21}$$

因此  $V_1=0$  时的  $V_2$  最大值在  $1 \geq p_c^* \geq 0.347$  随着  $p_c^*$  的增大而增大, 在  $0.347 > p_c^* \geq 0$  随着  $p_c^*$  的增大而减小。对于准各向同性混杂层合板的等效铺层设计 ( $p_{c0^\circ} = p_{c90^\circ} = p_{c45^\circ} = p_{c-45^\circ}$ ,  $p_{g0^\circ} = p_{g90^\circ} =$

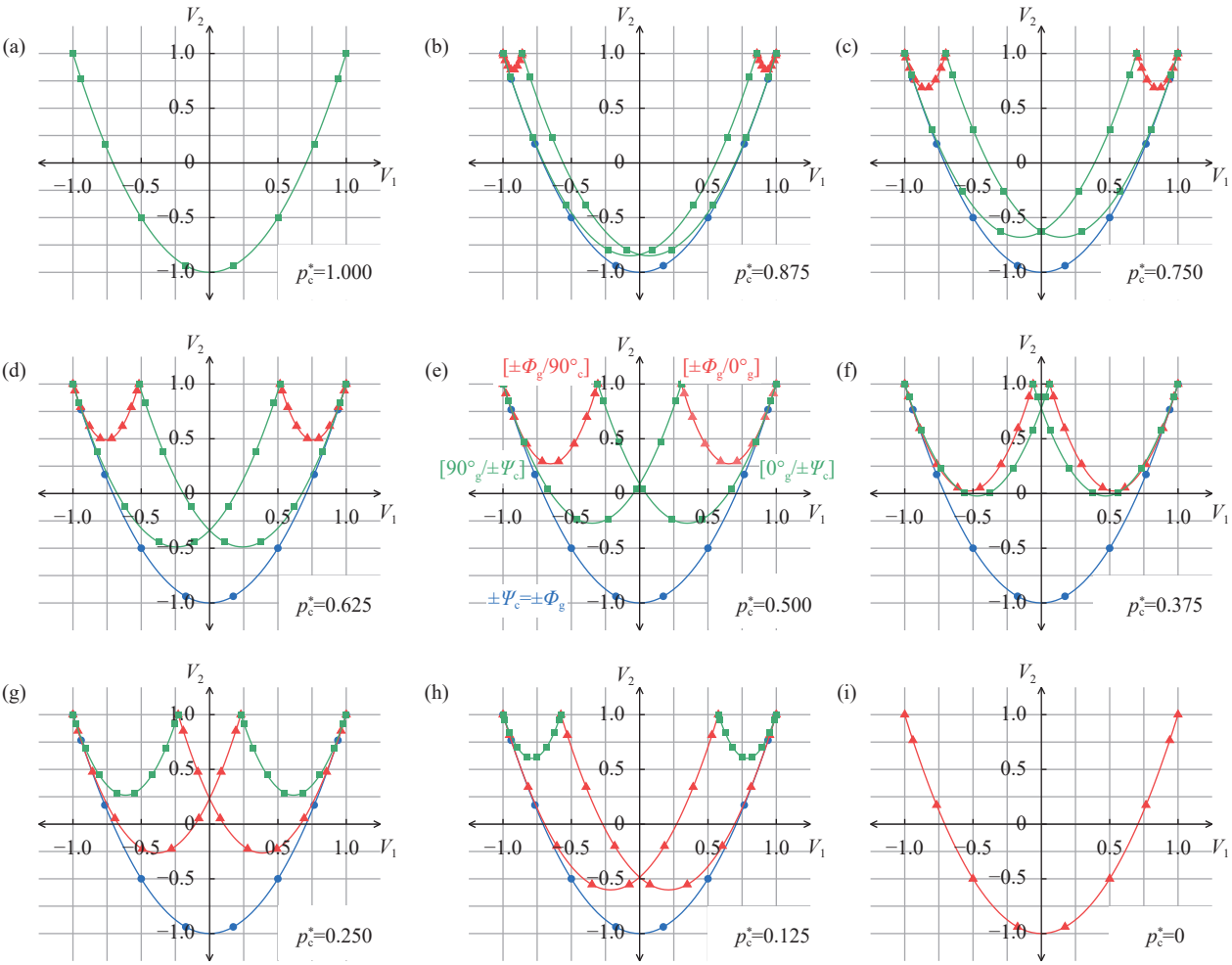


图2 混杂 DD 层合板铺层参数  $V_1$ 、 $V_2$  有效设计范围

Fig. 2 Effective design range of hybrid DD laminate stacking parameters  $V_1$  and  $V_2$

$p_{g45^\circ} = p_{g-45^\circ}$ ), 在不改变材料和混杂比例的条件下进行等效的混杂 DD 层合板设计, 需要满足  $V_1 = 0, V_2 = 0$ 。当所要求的替代点  $(V_1, V_2) = (0, 0)$  包括在曲线所围范围之内时 (图 2(e)~2(i)), 则存在  $\Phi_g$ 、 $\Psi_c$  角度设计使其能被混杂 DD 层合板完全替代; 当所要求的替代点  $(V_1, V_2) = (0, 0)$  在曲线所围范围之外时 (图 2(a)~2(d)), 则不存在能完全等效的混杂 DD 层合板  $\Phi_g$ 、 $\Psi_c$  角度设计, 此时需要根据设计要求优先保证某一方向的刚度分量一致进行混杂 DD 层合板的角度的选择。

1.4 混杂 DD 层合板的同质性

DD 层合板的一个重要优势就是其更规则的铺层排列使得层合板优化设计更方便快捷。DD 层合板铺层设计只需要对 4 层的层合板重复单元  $[\pm\Phi/\pm\Psi]$  的叠层方式进行优化, 铺层时无需对称, 只需要选择合适的角度与铺层顺序, 相比传统的

Quad 层合板优化过程更快捷高效。DD 层合板的关键性质是其同质性, 要求层合板在沿着厚度方向性能保持一致并且没有拉弯耦合效应, 即经过厚度和蔡氏模量标准化后的归一化拉伸刚度  $A^*$  与归一化弯曲刚度  $D^*$  一致且归一化耦合刚度  $B^*$  为 0。因此如果层合板满足同质性要求, 只需要考虑拉伸刚度就能设计层合板整体刚度性能。对 DD 层合进行同质性考察时, 认为  $|A^* - D^*|$  以及  $|B^*|$  元素的最大值小于 2% 时即符合同质性要求<sup>[25-26]</sup>, 即

$$\begin{cases} \max |A^* - D^*| < 0.02 \\ \max |B^*| < 0.02 \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $A^*$ 、 $B^*$ 、 $D^*$  分别表示拉伸刚度  $A$ , 耦合刚度  $B$ , 弯曲刚度  $D$  对厚度和蔡氏模量标准化之后的归一化拉伸刚度、归一化耦合刚度、归一化弯曲刚度, 其表达式为



$$\begin{aligned} A^* &= \frac{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{Q} dz}{\text{Trace}(Q) \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz} = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{Q}^k (z_k - z_{k-1})}{\text{Trace}(Q) \cdot H} \\ B^* &= \frac{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{Q} z dz}{\text{Trace}(Q) \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} |z| dz} = \frac{2 \sum_{k=1}^n \bar{Q}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)}{\text{Trace}(Q) \cdot H^2} \\ D^* &= \frac{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{Q} z^2 dz}{\text{Trace}(Q) \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} |z^2| dz} = \frac{4 \sum_{k=1}^n \bar{Q}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)}{\text{Trace}(Q) \cdot H^3} \quad (23) \end{aligned}$$

其中： $n$  为层合板总层数； $z$  为厚度方向以中性面为原点的坐标。式 (22) 要求标准化后表达式的最大元素不超过 0.02<sup>[26]</sup>，随着重复次数的增加，式 (22) 的值会减小，最优的铺层策略即为达到同质性要求所需的重复叠层次数最少的铺层方式。

对于混杂 DD 层合板，最优叠层策略会与单一材料 CFRP-DD 有所不同。混杂的比例以及各层的材料都会影响归一化刚度。研究的混杂 DD 层合板的偏轴角度  $\Phi_g$ 、 $\Psi_c$  角度范围为  $0^\circ \sim 90^\circ$ ，同一

材料单层厚度相同，即玻璃纤维+ $\Phi$  层与  $-\Phi$  层厚度一致，为  $h_g$ ；碳纤维+ $\Psi$  层与  $-\Psi$  层厚度一致，为  $h_c$ 。混杂 DD 铺层单元按材料区分存在 3 种不同的构型： $[g/c/c/g]$ ， $[g/c/g/c]$  和  $[g/g/c/c]$ 。铺层顺序不影响归一化后的拉伸刚度，对于 3 种混杂 DD 材料构型，都有：

$$A^* = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{Q}^k (z_k - z_{k-1})}{\text{Trace}(Q) \cdot H} = \frac{H_c \bar{Q}_c^{(\pm \Psi_c)} + H_g \bar{Q}_g^{(\pm \Phi_g)}}{\text{Trace}(Q) \cdot H} = \frac{p_c^* \bar{Q}_c^{*(\pm \Psi_c)} + p_g^* \bar{Q}_g^{*(\pm \Phi_g)}}{\text{Trace}(Q) \cdot H} \quad (24)$$

而不同的铺层顺序会影响厚度和蔡氏模量标准化后的耦合归一化刚度  $B^*$  和弯曲归一化刚度  $D^*$ 。对于  $[g/c/c/g]$  单元的混杂 DD 层合板，铺层角度符合反对称层合板条件，因此  $B^*$  元素中  $B_{11}^*$ 、 $B_{12}^*$ 、 $B_{22}^*$ 、 $B_{66}^*$  为 0， $D^*$  元素中  $D_{16}^*$ 、 $D_{26}^*$  为 0。而  $[g/c/g/c]$  和  $[g/g/c/c]$  的混杂 DD 层合板在重复铺设的情况下没有对称性质，上述元素不为 0。由式 (23) 可以推导出 DD 单元构型对标准化刚度的影响，对耦合刚度有：

$$\begin{aligned} B_{[g/c/c/g]}^* &= \frac{p_g^* \bar{Q}_g^{*\Phi}}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-p_g \\ 0 & 0 & 2-p_g \\ 2-p_g & 2-p_g & 0 \end{bmatrix} + \frac{p_c^* \bar{Q}_c^{*\Psi}}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_c \\ 0 & 0 & p_c \\ p_c & p_c & 0 \end{bmatrix} \\ B_{[g/c/g/c]}^* &= \frac{p_g^* \bar{Q}_g^{*\Phi}}{r} \begin{bmatrix} \frac{p_c}{2} & \frac{p_c}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{p_c}{2} & \frac{p_c}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{p_c}{2} \end{bmatrix} + \frac{p_c^* \bar{Q}_c^{*\Psi}}{r} \begin{bmatrix} \frac{p_g}{2} & \frac{p_g}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{p_g}{2} & \frac{p_g}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{p_g}{2} \end{bmatrix} \\ B_{[g/g/c/c]}^* &= \frac{p_g^* \bar{Q}_g^{*\Phi}}{r} \begin{bmatrix} p_c & p_c & \frac{p_g}{2} \\ p_c & p_c & \frac{p_g}{2} \\ \frac{p_g}{2} & \frac{p_g}{2} & p_c \end{bmatrix} + \frac{p_c^* \bar{Q}_c^{*\Psi}}{r} \begin{bmatrix} -p_g & -p_g & \frac{p_c}{2} \\ -p_g & -p_g & \frac{p_c}{2} \\ \frac{p_c}{2} & \frac{p_c}{2} & -p_g \end{bmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

其中， $r$  表示混杂 DD 单元的重复次数，达到同质性要求 (式 (22)) 所需的重复单元更少时，该构型具有更好的同质性。从三者的表达式可以看出耦合刚度随 DD 单元数量的增加而减小，下降速率与  $1/r$  呈线性关系。 $B_{16}^*$ 、 $B_{26}^*$  元素会受到铺层角度正负的影响，因而为了降低耦合刚度，三种构型推荐的角度设计分别为  $[+\Phi_g/-\Psi_c/+\Psi_c/-\Phi_g]$ 、 $[+\Phi_g/-$

$\Psi_c/-\Phi_g/+\Psi_c]$ 、 $[+\Phi_g/-\Phi_g/-\Psi_c/+\Psi_c]$  以减小  $B_{16}^*$ 、 $B_{26}^*$  分量的大小。 $[g/c/c/g]$  构型的耦合刚度集中在  $B_{16}^*$ 、 $B_{26}^*$  元素上，与  $[g/c/g/c]$  和  $[g/g/c/c]$  相比有较大的拉扭耦合效应但不存在拉弯耦合效应。类似地，对于厚度方向上的同质性，由式 (23) 可以推导出 DD 单元构型和混杂比例对其的影响：

$$|A^*-D^*|_{[g/c/c/g]} = \frac{p_g^*\bar{Q}_g^*}{r^2}(1-p_g)(2-p_g) - \frac{p_c^*\bar{Q}_c^*}{r^2}(1-p_c)(1+p_c), (\bar{Q}_{11}^*, \bar{Q}_{12}^*, \bar{Q}_{22}^*, \bar{Q}_{66}^*)$$
$$|A^*-D^*|_{[g/c/g/c]} = \begin{cases} \frac{p_g^*\bar{Q}_g^*}{r^2}(1-p_g)\frac{(1-2p_g)}{2} + \frac{p_c^*\bar{Q}_c^*}{r^2}(1-p_c)\frac{(1-2p_c)}{2}, (\bar{Q}_{11}^*, \bar{Q}_{12}^*, \bar{Q}_{22}^*, \bar{Q}_{66}^*) \\ \frac{p_g^*\bar{Q}_g^*}{r^2}(1-p_g)\frac{3}{2} - \frac{p_c^*\bar{Q}_c^*}{r^2}(1-p_c)\frac{3}{2}, (\bar{Q}_{16}^*, \bar{Q}_{26}^*) \end{cases} \tag{26}$$
$$|A^*-D^*|_{[g/g/c/c]} = \begin{cases} \frac{p_g^*\bar{Q}_g^*}{r^2}(1-p_g)(2-4p_g) + \frac{p_c^*\bar{Q}_c^*}{r^2}(1-p_c)(2-4p_c), (\bar{Q}_{11}^*, \bar{Q}_{12}^*, \bar{Q}_{22}^*, \bar{Q}_{66}^*) \\ \frac{p_g^*\bar{Q}_g^*}{r^2}(1-p_g)\left(\frac{3}{8}r + \frac{9}{2}p_g - \frac{3}{4}\right) - \frac{p_c^*\bar{Q}_c^*}{r^2}(1-p_c)\left(\frac{3}{8}r + \frac{9}{2}p_c - \frac{3}{4}\right), (\bar{Q}_{16}^*, \bar{Q}_{26}^*) \end{cases}$$

[g/c/c/g] 构型的  $|A_{16}^*-D_{16}^*|$ 、 $|A_{26}^*-D_{26}^*|$  项为 0，其余项按  $1/r^2$  的速率减小。[g/c/g/c] 构型的  $|A^*-D^*|$  收敛速度也为  $1/r^2$ ，但存在  $D_{16}^*$  与  $D_{26}^*$  的耦合系数，与 [g/c/c/g] 构型相比同质性更差。[g/g/c/c] 构型的  $D_{16}^*$  与  $D_{26}^*$  项按  $1/r$  的速率减小，收敛速度更慢，同质性不如 [g/c/c/g] 构型和 [g/c/g/c] 构型。

结合式 (25)、(26) 可以看出，[g/c/c/g] 构型具有更少的耦合元素且收敛速度与其他构型一致，因此对于混杂 DD 铺层，[g/c/c/g] 构型具有更好的同质性。由于  $B^*$  项的收敛速度更慢，其同质性主要由  $B_{16}^*$ 、 $B_{26}^*$  元素决定。将正角度碳纤层与正角度玻纤层分离开，可以进一步减小  $B^*$  项，因此对于重复铺设混杂 DD 单元的构型， $[+\Phi_g/-\Psi_c/+\Psi_c/-\Phi_g]_r$  具有更高的同质性。当采用对称的 DD 构型时， $B^*$  项为 0，但  $|A^*-D^*|$  项较大，同质性较差但主要体现在归一化拉伸刚度与弯曲刚度不一致上，对于只要求拉伸刚度一致的混杂 DD 层合板，选用对称构型  $[\pm\Phi_g/\pm\Psi_c]_s$  可以更好地避免耦合效应的影响。

2 混杂 DD 层合板铺层等效验证实验

2.1 材料参数与混杂比例

为了验证混杂 DD 层合板等效替代方法的可行性，测试了混杂准各向同性 Quad 层合板与等效混杂 DD 层合板的拉伸性能。本文所用的两种纤维预浸料如表 1 所示，分别为 T300 碳纤维增强环氧树脂单向预浸料 (USN03000，威海光威复合材料股份有限公司)、S-glass 玻璃纤维增强环氧树脂单向预浸料 (S15000，威海光威复合材料股份有限公司)。

两种预浸料具有不同的单层厚度，本文研究的混杂层合板两种材料各自的层数相同，混杂比例为各自的厚度占比： $p_c=0.194$ 、 $p_g=0.806$ 。两种单层材料的蔡氏模量分别为  $\text{Tr}(Q_c)=106.1$  GPa、 $\text{Tr}(Q_g)=70.6$  GPa。混杂层合板整体蔡氏模量和两

种材料的蔡氏模量混杂比例为：

$$\text{Tr}(Q) = 0.194 \times 106.1 + 0.806 \times 70.6 = 77.487$$
$$p_c^* = \frac{0.194 \times 106.1}{77.487} = 0.266, p_g^* = 0.734 \tag{27}$$

表 1 两种预浸料的材料参数  
Table 1 Material properties of two used prepregs

Material property	USN03000 (T300/epoxy)	G15000 (S-glass/epoxy)
Ply thickness <i>t</i>	0.030 mm	0.125 mm
Fiber volume fraction <i>V<sub>f</sub></i> /%	40	50
Longitudinal modulus <i>E<sub>1</sub></i> /GPa	95.5	46.4
Transverse modulus <i>E<sub>2</sub></i> /GPa	5.2	14.3
Shear modulus <i>G<sub>12</sub></i> /GPa	2.6	4.9
Poisson's ratio $\mu_{21}$	0.3	0.3
Tensile strength <i>X<sub>t</sub></i> /MPa	1 538	1 494

2.2 等效铺层方案

混杂 Quad 层合板与等效混杂 DD 层合板的示意图如图 3 所示。由于采用相同的混杂比例和材料进行等效替代，根据式 (15)，替换前后的蔡氏模量  $\text{Trace}(Q)$  与材料参数  $U^*$  相同，因此只需要保证式 (18) 的铺层参数  $V$  相同即可完成铺层的等效

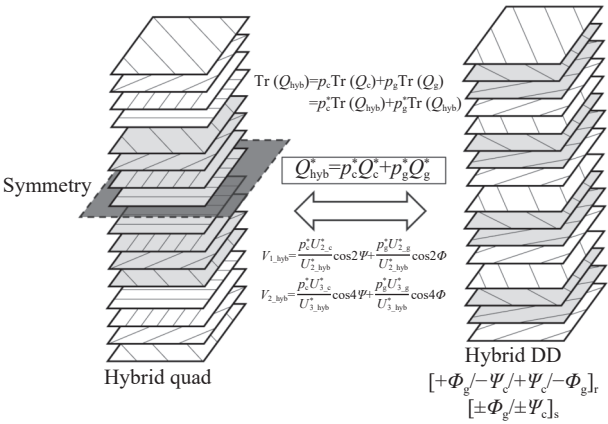


图 3 混杂 Quad 层合板与等效混杂 DD 层合板  
Fig. 3 Hybrid Quad laminate and equivalent hybrid DD laminate

替代。计算铺层参数  $V$  时所需的  $U^*$  参数可由混杂定律确定，此处有：

$$\begin{aligned} U_{2c}^* &= 0.427, U_{2g}^* = 0.227, U_{2hyb}^* = 0.280 \\ U_{3c}^* &= 0.103, U_{3g}^* = 0.059, U_{3hyb}^* = 0.071 \end{aligned} \tag{28}$$

该混杂比例下可以用混杂 DD 层合板实现等效铺层替代的铺层参数  $V$  取值范围如图 4 所示。对于混杂准各向同性层合板 ( $V_1=0, V_2=0$ )，在该混杂比例下，存在混杂 DD 单元  $[\pm\phi_g/\pm\psi_c]$  使得替代前后的层合板刚度分布完全一致。根据式 (18)，等效铺层角度计算公式为：

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{0.266 \times 0.427}{0.280} \cos 2\psi_c + \frac{0.734 \times 0.227}{0.280} \cos 2\phi_g = 0 \\ V_2 &= \frac{0.266 \times 0.103}{0.071} \cos 4\psi_c + \frac{0.734 \times 0.059}{0.071} \cos 4\phi_g = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

其中  $\phi_g$  与  $\psi_c$  的取值范围在  $[0^\circ\sim90^\circ]$ ，求解式 (29) 可以得到  $\phi_g=63^\circ$ 、 $\psi_c=15^\circ$  或  $\phi_g=27^\circ$ 、 $\psi_c=75^\circ$ ，即存在  $[\pm63^\circ_g/\pm15^\circ_c]$ 、 $[\pm27^\circ_g/\pm75^\circ_c]$  两种铺层方案的混杂 DD 层合板实现该铺层条件下的各刚度分量等效替代。

本文主要研究混杂 DD 层合板拉伸性能的等效，弯曲性能沿厚度方向的同质性差异 ( $[A^*-D^*]$ ) 不会对其造成影响，为了避免耦合效应对混杂层合板整体同质性的影响，采用对称的混杂 DD 构型  $[\pm\phi_g/\pm\psi_c]_{2S}([B^*]=0)$  及其减薄后的构型  $[\pm\phi_g/\pm\psi_c]_S$  来比较铺层的等效替代效果。根据式 (15) 可知，混杂 DD 对称构型与混杂 DD 重复构型具有相同的拉伸刚度，不影响拉伸条件下的铺层等效替代效果。具体铺层方案如表 2 所示，对于混杂各向

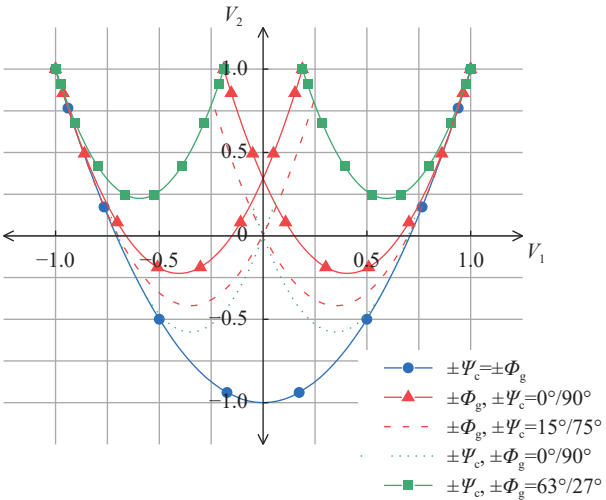


图 4 混杂 DD 层合板铺层等效范围 ( $p_c^* = 0.266$ )

Fig. 4 Equivalent range of hybrid DD laminates ( $p_c^* = 0.266$ )

同性层合板，由于要保持两种纤维层角度均衡对称，不存在更薄的 Quad 构型使其与混杂各向同性铺层有完全一致的刚度分量，对于混杂 DD 层合板，可以减少混杂 DD 单元的铺层重复数目来实现减薄设计，选用了减薄 50% 的混杂 DD 层合板来研究减薄后混杂 DD 层合板的拉伸性能特性。

表 2 对比实验的铺层方案

Table 2 Layup of comparative experiment

Layup	Thickness/ mm	Normalized stiffness [ $Q_{11}^*, Q_{22}^*, Q_{66}^*$ ]
$[0^\circ_g/90^\circ_g/45^\circ_g/45^\circ_g/0^\circ_c/90^\circ_c/45^\circ_c/45^\circ_c]_S$ ([ $QI_g/QI_c$ ])	1.24	[0.373,0.373,0.127]
$[\pm27^\circ_g/\pm75^\circ_c]_{2S}$	1.24	[0.373,0.373,0.127]
$[\pm63^\circ_g/\pm15^\circ_c]_{2S}$	1.24	[0.373,0.373,0.127]
$[\pm27^\circ_g/\pm75^\circ_c]_S$	0.62	[0.373,0.373,0.127]
$[\pm63^\circ_g/\pm15^\circ_c]_S$	0.62	[0.373,0.373,0.127]

2.3 试样测试与制备

混杂层合板采用热压罐成型工艺制备得到，两款预浸料有相同的固化制度：固化压力为 4.5 bar，从室温以 1~2℃/min 的升温速率至 120℃，在 120℃ 保温 90 min，最后自然降温至 60℃ 以下脱模。准静态拉伸试验根据标准 ASTM D3039<sup>[27]</sup> 进行测试，拉伸试样的总长度为 150 mm，宽度为 15 mm。拉伸测试在室温下进行，以 1 mm/min 的速率进行准静态加载。加载力值由试验机测定，试样的应变值由 50 mm 跨度的引伸计进行测量。为了获得可靠的实验数据，同组别层合板试样不少于 5 个。试样拉伸应力由式计算：

$$\sigma = \frac{P}{WH} \tag{30}$$

其中： $P$  为外加拉伸载荷，由试验机测定； $W$  和  $H$  分别为试样宽度和厚度。

3 实验结果与讨论

3.1 混杂 QI 层合板与 DD 层合板拉伸性能对比

图 5 为混杂准各向同性层合板与等效替代后的混杂 DD 层合板的代表性拉伸应力应变曲线。结果显示，等效替代前后的混杂层合板具有类似的刚度表现与应力应变响应。表 3 为混杂 QI 层合板与等效混杂 DD 层合板的刚度与拉伸强度，结果显示，混杂准各向同性层合板与等效的混杂 DD 层合板的刚度误差小于 3%，说明 DD 层合板的等刚度替代在混杂层合板中也能实现。3 种构型的最终失效应变和失效应力有所不同 (误差

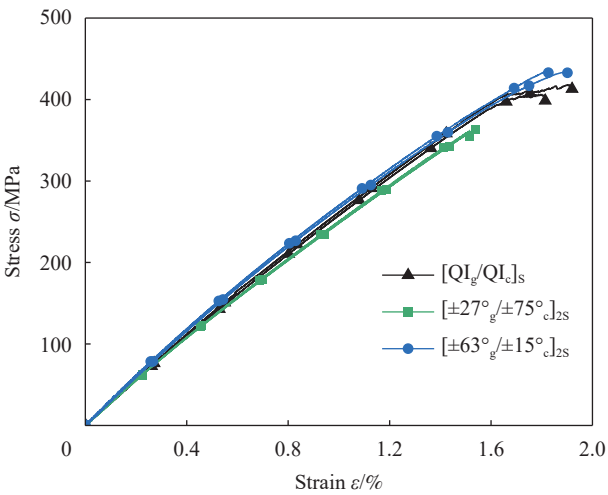


图 5 混杂 QI 层合板与等效混杂 DD 层合板拉伸应力应变代表性曲线

Fig. 5 Tensile representative stress-strain response of hybrid QI laminates and equivalent hybrid DD laminates

表 3 混杂 QI 层合板与等效混杂 DD 层合板的刚度与拉伸强度

Table 3 Stiffness and tensile strength of hybrid QI laminates and equivalent hybrid DD laminates

Layup	Stiffness/GPa	CV/%	Strength/MPa	CV/%
[QI <sub>g</sub> /QI <sub>c</sub> ] <sub>s</sub>	28.2	1.3	415.8	3.6
[±27° <sub>g</sub> /±75° <sub>c</sub> ] <sub>2s</sub>	29.0	3.0	424.3	2.4
[±63° <sub>g</sub> /±15° <sub>c</sub> ] <sub>2s</sub>	27.7	2.6	352.3	5.1

-15.3%~+2.1%), 主要是由于不同混杂 DD 单元的铺层角度影响了层合板的失效模式。 $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_{2s}$  与  $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_{2s}$  构型在碳纤维发生断裂之前就发生了层合板整体失效, 因此都表现出“一级破坏”的失效模式。 $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_{2s}$  构型由于玻纤层的角度较大, 因此加载方向上玻纤层强度较低, 发生玻纤层的基体横向破坏, 在 3 种构型中最先失效。并且由于玻纤层的混杂比例较高, 玻纤层的基体塑性的影响更大,  $\pm 63^{\circ}_g$  铺层有较大的纤维偏角, 因此表现出更多的基体塑性, 应力应变曲线略低于其他两种等价铺层。 $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_{2s}$  构型的玻纤层角度较小, 在加载方向上有更高的强度, 表现出最高的失效平均应力, 但由于玻纤层单层厚度较大, 因此存在较大的自由边缘层间应力, 限制了层合板的强度。混杂准各向同性层合板由于在拉伸方向上存在  $0^{\circ}$  纤维, 因此具有更小的碳纤维断裂应变。 $0^{\circ}$  碳纤维断裂导致中间层分层, 损失部分刚度, 应力应变曲线表现出台阶状, 表现为“二级破坏”的失效模式。

图 6 展示了 3 种等效构型的试样失效形态。混杂准各向同性铺层  $[QI_g/QI_c]_s$  表现出部分纤维断

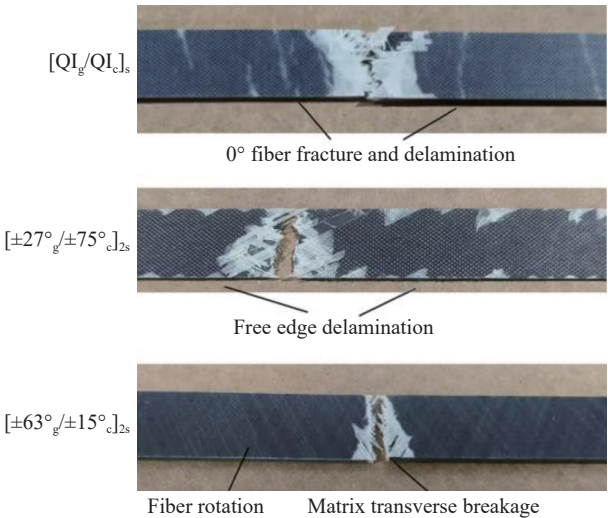


图 6 混杂 QI 层合板与等效混杂 DD 层合板拉伸试样失效形态

Fig. 6 Failure morphologies of tensile specimens of hybrid QI laminates and equivalent hybrid DD laminates

裂和分层过程, 由于  $0^{\circ}$  碳纤层比例较小, 因此产生的分层区域的面积较少。分层区域的玻纤层承担碳纤层失效后的额外载荷, 当玻纤层的  $0^{\circ}$  层发生纤维断裂后层合板整体失效。 $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_{2s}$  构型试样发生自由边缘分层破坏, 最外侧的玻纤层表现出边缘部分的翘起与分层, 分层区域边缘的角度沿着表面玻纤层的纤维方向。产生翘起与分层的原因是在靠近试样边缘处有较大的层间压力。当从自由边缘引发的分层区域贯穿试样宽度时, 整体层合板发生失效。层合板自由边缘应力的 大小受到铺层重复次数影响, 在层合板整体厚度相同的情况下, 使用更小单层厚度的预浸料能增加铺层单元的重复次数, 从而减弱自由边上的层间应力集中效应, 预计表现出更高的层合板强度。 $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_{2s}$  构型试样表现出基体横向破坏的最终失效模式, 层合板整体由于玻纤层的基体横向破坏而失效。中间层碳纤维在层合板整体失效之前没有发生纤维断裂和中间层分层, 试样表面没有出现分层损伤。同时能从试样表面观察到玻纤层发生了纤维角度偏转。

3.2 减薄后混杂 DD 层合板拉伸性能对比

为了验证混杂 DD 层合板在减薄设计方面的优势, 对比了减薄厚度对等效混杂层合板的性能影响。实验了  $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_s$  构型和  $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_s$  构型的拉伸应力应变响应并与减薄前的构型进行比较, 实验的代表性拉伸应力应变曲线如图 7 所示。结果表明, 减薄后的构型具有和减薄前基本一致的应力应变响应与刚度变化情况, 混杂 DD



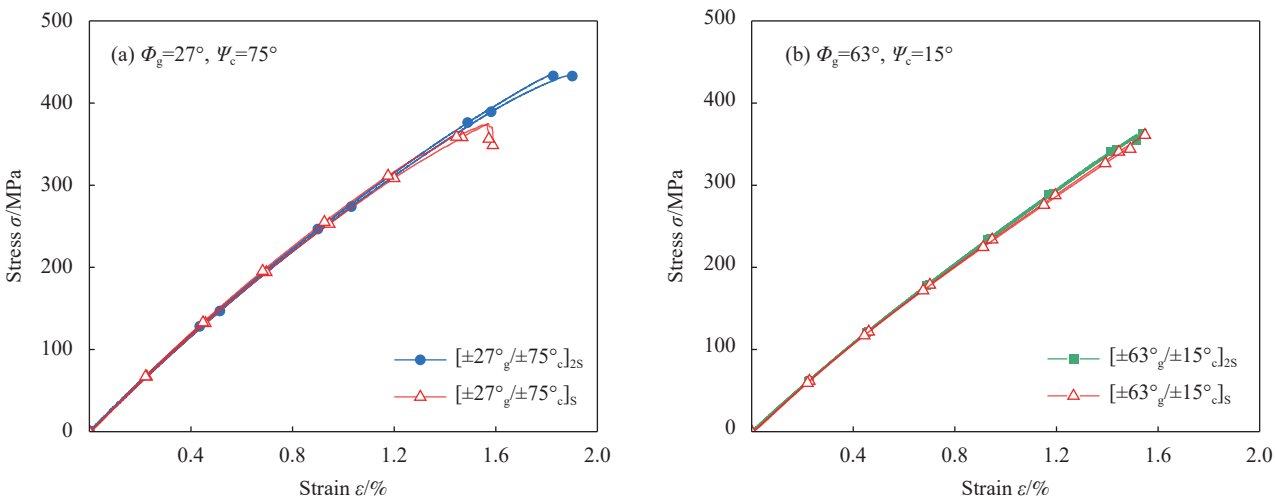


图 7 减薄前后等效混杂 DD 层合板拉伸应力应变代表性曲线  
Fig. 7 Tensile representative stress-strain response of thinning equivalent hybrid DD laminates

层合板也能做到铺层刚度等效和减薄设计。表 4 显示了减薄前后构型的失效力应变，结果显示，减薄后的  $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_S$  构型的失效力应变与减薄前基本一致，这是由于该混杂 DD 层合板的失效模式主要为玻纤层的基体横向破坏，减薄后对基体的强度影响不大，因此表现出基本一致的失效力应变。减薄后的  $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_S$  构型在与减薄前相比的强度有所减低，这是由于更薄的试样总厚度使得单层厚度占层合板总厚度的比例更大，自由边缘层间应力的集中作用更大，更容易发生自由边缘分层破坏。

表 4 减薄等效混杂 DD 层合板的刚度与拉伸强度  
Table 4 Stiffness and tensile strength of thinning equivalent hybrid DD laminates

Layup	Stiffness/GPa	CV/%	Strength/MPa	CV/%
$[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_{2S}$	29.0	3.0	424.3	2.4
$[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_S$	28.7	1.8	367.2	4.2
$[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_{2S}$	27.7	2.6	352.3	5.1
$[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_S$	27.3	2.2	344.9	4.8

图 8 为减薄构型失效力应变及模型预测情况与失效试样形态。减薄前后试样表现出相同的失效模式。 $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_S$  构型发生自由边缘分层，边缘分层的作用区域相比于减薄前的构型更少，这是由于层合板整体厚度下降，受到自由边缘的层间应力影响的范围更小，但相对的单层厚度占层合板总厚度的比例增大，产生更大的层间应力，导致自由边缘分层提前发生，相比减薄前  $[\pm 27^{\circ}_g/\pm 75^{\circ}_c]_{2S}$  构型的失效力有所下降。 $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_S$  构型发生基体横向破坏，失效力不受试样厚度

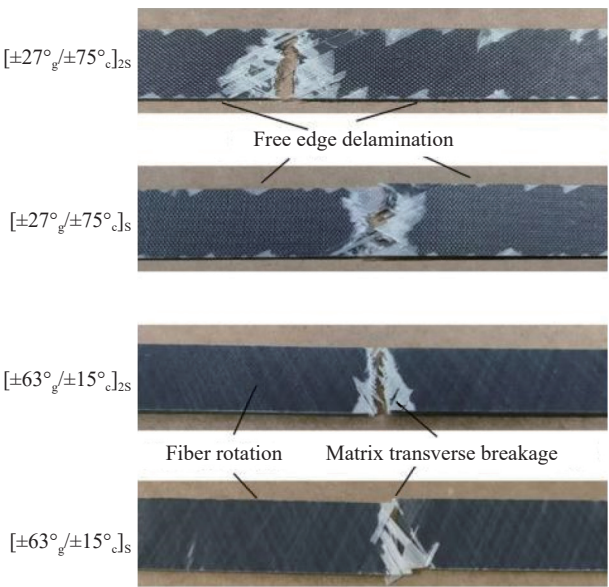


图 8 减薄后等效混杂 DD 层合板拉伸试样失效形态  
Fig. 8 Failure morphologies of thinning equivalent hybrid DD laminates

以及单层尺寸的影响，与减薄前的  $[\pm 63^{\circ}_g/\pm 15^{\circ}_c]_{2S}$  构型的拉伸性能基本一致。

综合理论和实验结果来看，减薄后的混杂 DD 构型也可以做到刚度等效替代的同时保持相同的失效模式与接近的强度水平，在进行构件的变厚度(锥度设计)以及局部加厚或减薄设计方面具有一定优势。

4 结论

研究了蔡氏模量和 Double-Double (DD) 层合板设计在混杂条件下的应用，给出了混杂 DD 层合板的设计方法与铺层等效设计流程。通过铺层替代实验验证了混杂 DD 层合板刚度等效与减薄



设计的可行性。得到的结论如下:

(1) 混杂 DD 层合板的归一化刚度满足关于蔡氏模量混杂比例  $p^*$  的混杂定律形式。铺层参数  $V$  在混杂 DD 层合板中会受到混杂比例、纤维类型的影响,同时混杂比例会影响能够进行铺层等效设计范围。

(2) 混杂 DD 层合板的同质性受到混杂比例与叠层方式的影响。 $[g/c/c/g]$  构型具有更少的刚度矩阵耦合项,  $|B^*|$  项按  $1/r$  的速率收敛,  $|A^*-D^*|$  按  $1/r^2$  的速率收敛。混杂 DD 层合板的最优铺层策略为: 重复构型  $[+\Phi_g/-\Psi_c/+\Psi_c/-\Phi_g]_n$  (拉弯一致) 或对称构型  $[\pm\Phi_g/\pm\Psi_c]_n$  (拉弯无耦合)。

(3) 混杂 DD 层合板也能实现铺层的等效替代, 替代后的混杂 DD 层合板具有与替代前一致的刚度分量, 但失效模式和失效强度会受到具体铺层构型的影响。混杂 DD 层合板也能实现铺层的减薄设计, 减薄后的混杂 DD 层合板也具有相同的刚度分量, 但可能由于更大的层间应力而导致提前失效。

## 参考文献:

- [1] ZHANG J, LIN G, VAIDYA U, et al. Past, present and future prospective of global carbon fibre composite developments and applications[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2023, 250: 110463.
- [2] SUN Z, LUO Y, CHEN C, et al. Mechanical enhancement of carbon fiber-reinforced polymers: From interfacial regulating strategies to advanced processing technologies[J]. *Progress in Materials Science*, 2024, 142: 101221.
- [3] VERMES B, TSAI S W, RICCIO A, et al. Application of the Tsai's modulus and double-double concepts to the definition of a new affordable design approach for composite laminates[J]. *Composite Structures*, 2021, 259: 113246.
- [4] TSAI S W, SHARMA N, ARTEIRO A, et al. Composite Double-Double and Grid/Skin Structures[M]. Redwood City, CA: Stanford University Press, 2019: 1-42.
- [5] TSAI S W. Double-Double: New family of composite laminates[J]. *AIAA Journal*, 2021, 59(11): 4293-4305.
- [6] FANG P, GAO T, HUANG Y, et al. Uniform multiple laminates interpolation model and design method for double-double laminates based on multi-material topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, 433: 117492.
- [7] ZHANG Z, ZHANG Z, DI C F, et al. Machine learning for accelerating the design process of double-double composite structures[J]. *Composite Structures*, 2022, 285: 115233.
- [8] FURTADO C, PEREIRA L F, TAVARES R P, et al. A methodology to generate design allowables of composite laminates using machine learning[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, 233: 111095.
- [9] KAPPEL E. Double-Double laminates for aerospace applications—Finding best laminates for given load sets[J]. *Composites Part C: Open Access*, 2022, 8: 100244.
- [10] WANG D, SU Z, NARAYANASWAMY S, et al. Buckling optimization of Double-Double (DD) laminates with gradual thickness tapering[J]. *Composite Structures*, 2025, 351: 118568.
- [11] 杨刚, 沈剑, 周正扬, 等. “Double-Double 铺层热塑性层合板及其在汽车结构中的应用潜力 [J]. *复合材料学报*, 2024, 41(9): 4919-4931.  
YANG Gang, SHEN Jian, ZHOU Zhengyang, et al. "Double-Double" layup thermoplastic laminates and their application potential in automotive structures[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2024, 41(9): 4919-4931(in Chinese).
- [12] 何靓, 李尧, 王思源, 等. Double-Double 铺层复合材料 C 型梁变厚度减重优化 [J]. *复合材料学报*, 2025, 42(10): 6073-6083.  
HE Liang, LI Yao, WANG Siyuan, et al. Thickness optimization of C-beams for weight reduction based on the Double-Double theory[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2025, 42(10): 6073-6083(in Chinese).
- [13] CUNHA R D, TARGINO T G, CARDOSO C, et al. Low velocity impact response of non-traditional Double-Double laminates[J]. *Journal of Composite Materials*, 2023, 57(10): 1807-1817.
- [14] ZHAO M, ZHAO Y, WANG A, et al. Investigation of the Mode-I delamination behavior of Double-Double laminate carbon fiber reinforced composite[J]. *Composites Science and Technology*, 2024, 248: 110463.
- [15] VASCONCELOS T B, ALVES J L C, PAIVA C F E, et al. Static and fatigue behavior of Double-Double glass/epoxy laminates[J]. *Journal of Composite Materials*, 2025, 59(1): 119-133.
- [16] ARTEIRO A, PEREIRA L F, BESSA M A, et al. A micro-mechanics perspective to the invariant-based approach to stiffness[J]. *Composites Science and Technology*, 2019, 176: 72-80.
- [17] JIA L, ZHANG C, LI J, et al. Validation and development of trace-based approach for composite laminates[J]. *Composites Science and Technology*, 2022, 221: 109348.
- [18] 杨斌, 章继峰, 周利民. 玻璃纤维-碳纤维混杂增强 PCBT 复合材料层合板的制备及低速冲击性能 [J]. *复合材料学报*, 2015, 32(2): 435-443.  
YANG Bin, ZHANG Jifeng, ZHOU Limin. Preparation and low velocity impact properties of glass fiber carbon fiber hybrid reinforced PCBT composite laminates[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, 32(2): 435-443(in Chinese).
- [19] TSAI S W, MELO J D D. An invariant-based theory of composites[J]. *Composites Science and Technology*, 2014, 100:

237-243.

[20]

TSAI S W, MELO J D D. A unit circle failure criterion for carbon fiber reinforced polymer composites[J]. [Composites Science and Technology](#), 2016, 123: 71-78.

[21]

沈观林, 胡更开, 刘彬. 复合材料力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 55-70.

[22]

SHEN Guanlin, HU Gengkai, LIU Bin. Mechanical of Composite Materials[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 55-70.

[23]

ARTEIRO A, SHARMA N, MELO J D D, et al. A case for Tsai's modulus, an invariant-based approach to stiffness[J]. *Composite Structures*, 2020, 252: 112683.

[23]

MELO J D D, BI J, TSAI S W. A novel invariant-based design approach to carbon fiber reinforced laminates[J]. *Composite Structures*, 2017, 159: 44-52.

[24]

TSAI S W. Double-Double: A New Perspective in the Manufacture and Design of Composites[M]. Redwood City, CA: Stanford University Press, 2022: 81-104.

[25]

TSAI S W, FALZON B G, ALI A. Double-Double Simplifying the Design and Manufacture of Composite Laminates[M]. Redwood City, CA: Stanford University Press, 2023: 1-29.

[26]

ZHAO K, KENNEDY D, MIRAVETE A, et al. Defining the design space for Double-Double laminates by considering homogenization criterion[J]. *AIAA Journal*, 2023, 61(7): 3190-3203.

[27]

American Society of Testing Materials. Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials: D3039/D3039M-17[S]. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2017.