

文章编号: 1000-3851(2000)01-0103-05

# 复合材料全寿命范围 E-N 曲线方程与 S-N 曲线方程

熊峻江

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

**摘 要:** 首先提出了两个新的复合材料全寿命范围的 E-N 曲线方程与 S-N 曲线方程, 与过去的双参数和三参数曲线公式相比, 此二方程因均有四个参数而具有更好的物理性质; 然后采用相关系数最优法, 分别给出了两个方程的参数估计公式和求解方法, 最后给出了该二方程的应用实例, 通过实例发现: 两个方程均具有良好的拟合效果, 且便于实际应用。

**关键词:** 复合材料; 全寿命范围; S-N 曲线; E-N 曲线

**中图分类号:** O 346 2 **文献标识码:** A

## S-N EQUATION AND E-N EQUATION OVER ALL-LIFE RANGE OF COMPOSITE MATERIAL

XIONG Jun-jiang

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Two new equations of the S-N curve equation and the E-N curve equation are presented in this paper. These equations are with four parameters, therefore they have better physical properties than those with two or three parameters. By means of the optimization method of correlation coefficient the parameter estimation formulas and numerical solutions of these equations are established. Finally, two examples of these equations application are given. From these examples, it is shown that the equations are not only of excellent fitting effect, but also convenient for application.

**Key words:** composite material; all-life range; S-N curve; E-N curve

目前用作表征复合材料疲劳损伤扩展有割线模量、剩余强度、应变、柔度、声发射量、裂纹密度、裂纹长度等物理量, 人们基于这些物理量提出了多种疲劳损伤模型。Yang 和 Liu<sup>[1]</sup>在分析疲劳实验数据的基础上, 提出了剩余强度模型:  $dR(n)/dn = -f(S, \omega, r)/[cR^{c-1}(n)]$ 。Radhakrishnan<sup>[2]</sup>提出了强度衰退模型:  $R(n) = R(n_0) - \beta k s^b (n_1 - n_0)$ , 式中  $R(n)$  为剩余强度,  $\beta, c$  为二参数 Weibull 分布参数,  $b, k$  为待定常数。由于复合材料损伤演化可以采用剩余刚度来描述。Yang 等<sup>[3]</sup>给出了疲劳损伤刚度衰退模型:  $dE(n)/dn = -E(0)Q \gamma n^{k-1}$ 。Tsai<sup>[4]</sup>提出了模量损伤模型:  $dD/dN = A [\Delta\sigma/E(1-D)]^B / (1 - \alpha_{\max}/E_f G)$ , 式中  $E = E_0(1-D)^C$ ,  $A, B, C$  为材料常数,  $E_f, G$  分别为断裂时的模量和应变。Whitworth<sup>[5]</sup>提出了另一模量损伤模型:  $dE(N)/dN = -\beta f^\alpha [E$

$(0), S] / [\alpha E^{\alpha-1}(N)]$ , 式中  $E(N)$  为剩余模量;  $E(0)$  为初始模量;  $N = n/N^*$ ,  $N^*$  为应力变程  $S$  对应的破坏循环数;  $\alpha, \beta$  为待定常数。Hwang 和 Han<sup>[6]</sup>采用广义三参数递降模型描述疲劳模量递降率  $dE/dn = ACn^{C-1}/[B(E^{B-1})]$ , 式中  $A, B, C$  为材料常数。Talreja<sup>[7]</sup>针对层间分层等单一裂纹情况, 用  $D$  表示其特征尺寸, 剩余强度模型取为幂函数形式  $R = \alpha D^{-1/2}$ , 损伤增长速率(裂纹尺寸增长速率)方程采用了断裂力学裂纹扩展速率的 Paris 公式形式  $dD/dN = \beta D^{n/2}$ , 然后利用此二式得到单一裂纹形式下的剩余强度衰退模型:  $dR/dN = -\gamma(1/R)^{n-3}$ , 式中  $\gamma = \beta/[2(\alpha)^{n-2}]$ 。虽然纤维增强树脂基复合材料与金属材料有完全不同的疲劳破坏机理, 但 S-N (应力-寿命) 曲线仍是复合材料层压板疲劳性能主要表征形式之一。实验表明, 试验 S-N 曲线关系通常遵

收稿日期: 1999-06-09; 收修改稿日期: 1999-10-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19802001)

作者简介: 熊峻江(1966), 男, 博士, 副教授, 主要研究疲劳与可靠性工程

循经典幂指数规律, 可表示为<sup>[7~10]</sup>  $NS^m = C$  和 Basquin 幂函数方程  $\sigma = \sigma_f (2N)^b$ , 式中  $m$ 、 $C$  和  $b$  为材料待常数。Hwang 和 Han<sup>[6]</sup> 提出了一双参数  $S-N$  曲线公式:  $N = [B(1-S)]^{1/c}$ , 式中  $B$  为材料常数;  $S$  为加载应力与强度极限之比。Reifsnider 和 Jen<sup>[11]</sup> 采用方程  $S/\sigma_f = a + b/(\log N)^\alpha$  表征复合材料疲劳  $S-N$  曲线, 式中  $a$ 、 $b$  和  $\alpha$  为材料常数,  $\sigma_f$  为材料强度极限。从上面的综述可以看出, 前人在表征复合材料疲劳性能  $S-N$  曲线与  $E-N$  曲线方面做了大量的工作, 但还存在以下问题: (1) 大多数方程的参数估计未能合理建立; (2) 已给出的  $S-N$  曲线与  $E-N$  曲线方程要么过于简单, 忽略了某些影响疲劳损伤的物理参量, 要么过于复杂, 参数太多, 从而无法对其进行合理估计。基于以上考虑, 本文中分别提出了两个新的较合理而又便于使用的  $S-N$  曲线与  $E-N$  曲线方程, 并给出了其参数估计公式。

## 1 全寿命范围 $E-N$ 曲线模型

大量的文献表明<sup>[1~6, 12, 13]</sup>: 复合材料由于疲劳损伤而导致强度下降, 其剩余强度  $E(n)$  为疲劳应力循环次数  $n$  的单调减函数, 因此, 可采用类似经验疲劳理论的函数式表征复合材料随时间变化的剩余强度  $E(n)$

$$dE(n)/dn = -f^{-1}(S, \omega R)/[cE^{c-1}(n)]$$

式中:  $f(S, \omega R)$  为最大循环应力  $S$ , 加载频率  $\omega$  和应力比  $R$  的函数,  $c$  为材料常数。上式与文献[1]中剩余强度模型相近。根据上式, 剩余强度模型还可写为

$$dE(n)/dn = -f^{-1}(S, \omega R)/\{m[E(0) - E(n)]^{m-1}\}$$

式中:  $E(0)$  为强度极限,  $m$  为材料常数。对上式进行积分, 得到

$$n = f(S, \omega R)[E(0) - E(n)]^m$$

上式即为剩余强度  $E$ -疲劳应力循环次数  $n$  关系曲线方程(简称  $E-n$  曲线)。通常给定应力比  $R$  和频率  $\omega$  下测定  $E-n$  曲线, 那么,  $f(S, \omega R) = f(S)$ , 于是, 由上式可得

$$n = f(S)[E(0) - E(n)]^m \quad (1)$$

根据  $S-N$  曲线规律, 我们知道: 疲劳寿命随应力大小而单调下降, 即施加应力越大, 疲劳寿命越短, 且  $S-N$  曲线常采用幂函数式表示:  $S^k N = C$ , 即  $N = CS^{-k}$ , 因此, 式(1)中  $f(S)$  可取为  $f(S) = CS^{-k}$ , 将  $f(S)$  代入式(1)后, 得到

$$n = CS^{-k}[E(0) - E(n)]^m$$

式中:  $C$ 、 $m$ 、 $k$ 、 $E(0)$  为材料常数, 其中  $E(0)$  为强度极限。对上式取对数, 得  $y = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2$ , 式中:  $y = \lg n$ ,  $a_1 = \lg C$ ,  $a_2 = -k$ ,  $a_3 = m$ ,  $x_1 = \lg S$ ,  $x_2 = \lg [E(0) - E(n)]$ 。根据数理统计学中的相关系数优化方法, 材料常数  $E(0)$ 、 $a_1$ 、 $a_2$  和  $a_3$  可由下面诸式求得

$$a_1 = \bar{y} - a_2 \bar{x}_1 - a_3 \bar{x}_2 \quad (2)$$

$$a_2 = \frac{L_{12}L_{20} - L_{22}L_{10}}{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}} \quad (3)$$

$$a_3 = \frac{L_{22}L_{10} - L_{11}L_{20}}{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}} \quad (4)$$

$$Q[E(0)] = \sum_{i=1}^l (y_i - a_1 - a_2 x_{1i} - a_3 x_{2i})^2 \quad (5)$$

式中  $Q[E(0)]$  为残差平方和函数, 且

$$\bar{y} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l y_i, \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_{2i}$$

$$L_{11} = \sum_{i=1}^l (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad L_{22} = \sum_{i=1}^l (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

$$L_{12} = \sum_{i=1}^l (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2), \quad L_{21} = L_{12}$$

$$L_{10} = \sum_{i=1}^l (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y})$$

$$L_{20} = \sum_{i=1}^l (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y})$$

令  $E(N_i)$  和  $N_i$  分别表示任一试验数据点对应的剩余强度和寿命。式(2)至式(4)均为常数  $E(0)$  的函数, 因此, 首先要由式(5)取极限求出  $E(0)$ , 然后再通过式(2)至式(4)求得  $a_1$ 、 $a_2$  和  $a_3$ 。式(5)较复杂, 需要搜索法数值求解: 首先确定  $E(0)$  的取值区间,  $E(0) \in [E_{\max}, E_{\max} + \Delta]$ , 其中  $E_{\max} = \max\{E(N_1), E(N_2), \dots, E(N_l)\}$ ,  $\Delta$  为给定一有限值,  $E(N_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 为试验数据点剩余强度; 然后, 给定  $E(0)$  一初值和步长, 采用搜索法, 搜索  $E(0)$  所在区间内残差平方和函数  $Q[E(0)]$  最小时对应的  $E(0)$  值。于是, 变换式(2)至式(4), 得到

$$C = 10^{(\bar{y} - a_2 \bar{x}_1 - a_3 \bar{x}_2)}$$

$$k = -\frac{L_{12}L_{20} - L_{22}L_{10}}{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}}$$

$$m = \frac{L_{22}L_{10} - L_{11}L_{20}}{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}}$$

## 2 全寿命范围 $S-N$ 曲线模型

以往的中、长寿命区  $S-N$  曲线常采用三参数幂函数公式:  $N(S_{\max} - S_0)^m = C$  或  $S_{\max} = S_\infty \cdot \left(1 + \frac{A}{N}^\alpha\right)$  拟合, 式中  $S_0$ 、 $m$ 、 $C$ 、 $A$ 、 $\alpha$  和  $S_\infty$  均为待常数

数,且它们之间存在以下关系:  $C = (A \cdot S_{\infty})^{1/\alpha}, m = 1/\alpha, S_0 = S_{\infty}$ 。显然,此式不能用于短寿命区疲劳寿命估算。文献[11]中给出的  $S-N$  曲线方程虽然包含了短寿命区,但其方程的参数难于估计。为此,对上面  $S-N$  曲线三参数幂函数公式进行修正,可以得到一新的四参数模型

$$\left(\frac{S_u - S_0}{S - S_0}\right) = 10^{C(\lg N)^m} \tag{6}$$

式中:  $S_0, m, C$  和  $S_u$  为材料常数,其中  $m$  为形状参数,  $S_0$  为拟合疲劳极限,  $S_u$  为拟合屈服极限。方程(6)具有如下物理性质: (1) 当  $N = 1$  时,  $S = S_0$ 。 (2) 当  $N = \infty$  时,  $S = S_u$ 。 (3) 疲劳寿命  $N$  随疲劳应力  $S$  变大而缩短,  $S$  越大,  $N$  越短。为估计式(6)参数,对式(6)取二次对数,得  $y = a + bx$ , 式中,  $y = \lg \lg N$ ,  $a = -\lg C/m$ ,  $b = 1/m$ ,  $x = \lg[\lg(S_u - S_0) - \lg(S - S_0)]$ 。根据数理统计知识,材料常数  $S_0, m, C$  和  $S_u$  可由下面诸式求得:

$$b = L_{xy}/L_{xx} \tag{7}$$

$$a = \bar{y} - \bar{x}L_{xy}/L_{xx} \tag{8}$$

$$r(S_u, S_0) = L_{xy}/\sqrt{L_{xx}L_{yy}} \tag{9}$$

式中,  $r(S_u, S_0)$  为线性相关系数函数,且

$$\bar{x} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_i, \bar{y} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l y_i$$
$$L_{xx} = \sum_{i=1}^l x_i^2 - \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^2$$

$$L_{yy} = \sum_{i=1}^l y_i^2 - \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^l y_i \right)^2$$
$$L_{xy} = \sum_{i=1}^l x_i y_i - \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^l x_i \right) \left( \sum_{i=1}^l y_i \right)$$

由式(7)和式(8)可确定材料常数  $m$  和  $C$ ,但它们均为材料常数  $S_0$  和  $S_u$  的函数,因此,首先要由式(9)取极限求出  $S_0$  和  $S_u$ ,然后再通过式(7)和式(8)求得  $m$  和  $C$ 。根据线性回归理论的相关系数优化方法,由式(9)求解  $S_0$  和  $S_u$  的过程如下: 首先确定  $S_0$  和  $S_u$  的取值区间,  $S_0 \in [0, S_{0\max})$ ,  $S_u \in (S_{u\max}, \infty]$ , 其中  $S_{0\max} = \max\{S_1, S_2, \dots, S_l\}$ ,  $S_{u\max} = \min\{S_1, S_2, \dots, S_l\}$ ,  $S_i (i = 1, 2, \dots, l)$  为试验数据点疲劳应力; 然后,给定  $S_u$  一初值,再给定  $S_0$  一初值和步长,采用搜索法,搜索  $S_0$  所在区间内线性相关系数  $r(S_u, S_0)$  最大时对应的  $S_0$  值;再给定一步长,自动选取一  $S_u$  值,并将其作为新的初值,重复上面的搜索步骤,记录线性相关系数  $r(S_u, S_0)$  最大时的  $S_0$  和  $S_u$  数值;如此往复计算,便可计算出所有  $r(S_u, S_0)$  的最大值,及其对应的  $S_0$  和  $S_u$  值。

3 应用实例

例1 约有33个碳纤维增强复合材料试样用于该材料剩余强度试验,试样为光滑的(0, 90, ±45)<sub>s</sub>板。这些试样中大约有12个试样用于静强度试验,其试验数据如表1;21个试样用于疲劳试验,其试验数据如表2和图1所示<sup>[1]</sup>。

表1 试样静强度试验数据 Table 1 Ultimate strength test data of specimens M Pa

| Specimen No. | Ultimate strength | Specimen No. | Ultimate strength | Specimen No. | Ultimate strength |
|--------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|
| 1            | 435 4863          | 5            | 500 8176          | 9            | 552 0261          |
| 2            | 457 2772          | 6            | 517 5331          | 10           | 560 7976          |
| 3            | 495 8112          | 7            | 536 1174          | 11           | 563 6801          |
| 4            | 498 7281          | 8            | 540 0549          | 12           | 580 3129          |

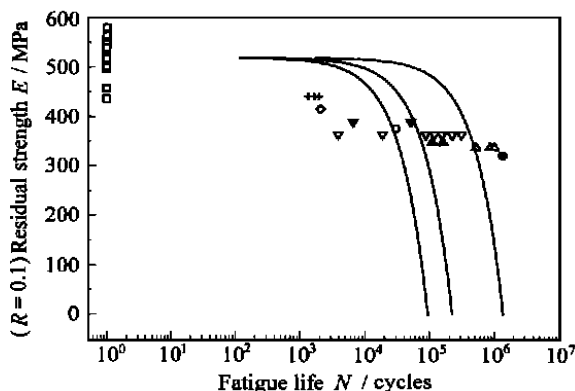
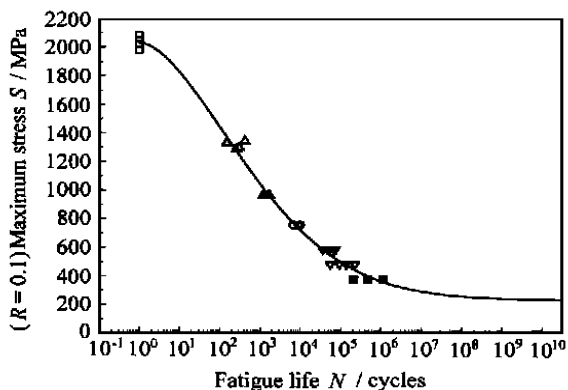
表2 疲劳试验数据 Table 2 Fatigue test data

| Maximum stress         | Stress cycles     | Residual strength  | Maximum stress         | Stress cycles     | Residual strength  |
|------------------------|-------------------|--------------------|------------------------|-------------------|--------------------|
| $S_{\max}/\text{M Pa}$ | $n/\text{cycles}$ | $E(n)/\text{M Pa}$ | $S_{\max}/\text{M Pa}$ | $n/\text{cycles}$ | $E(n)/\text{M Pa}$ |
| 441 9038               | 1650              | 441 9038           | 363 9208               | 18790             | 363 9208           |
| 441 9038               | 1950              | 441 9038           | 363 9208               | 3840              | 363 9208           |
| 441 9038               | 1320              | 441 9038           | 348 3242               | 161000            | 348 3242           |
| 415 9095               | 2050              | 415 9095           | 348 3242               | 110000            | 348 3242           |
| 389 9152               | 50980             | 389 9152           | 337 9265               | 523500            | 337 9265           |
| 389 9152               | 6480              | 389 9152           | 337 9265               | 863200            | 337 9265           |
| 363 9208               | 155000            | 363 9208           | 322 3299               | 1346300           | 322 3299           |
| 363 9208               | 228500            | 363 9208           | 337 9265               | 1007000           | 337 9265           |
| 363 9208               | 88000             | 363 9208           | 376 9180               | 30000             | 376 9180           |
| 363 9208               | 117580            | 363 9208           | 376 9180               | 30000             | 376 9180           |
| 363 9208               | 228700            | 363 9208           | 376 9180               | 30000             | 376 9180           |
| 363 9208               | 221200            | 363 9208           | 376 9180               | 30000             | 376 9180           |
| 363 9208               | 310000            | 363 9208           |                        |                   |                    |

表 3 S2/5208 玻璃环氧复合材料疲劳试验数据

Table 3 Fatigue test data of S2/5208 epoxy glass composite material

| Specimen No. | Maximum stress<br>$S_{\max}/\text{MPa}$ | Fatigue life<br>$N/\text{cycles}$ | Specimen No. | Maximum stress<br>$S_{\max}/\text{MPa}$ | Fatigue life<br>$N/\text{cycles}$ |
|--------------|-----------------------------------------|-----------------------------------|--------------|-----------------------------------------|-----------------------------------|
| 1            | 2082 5449                               | 1                                 | 15           | 758 5428                                | 7290                              |
| 2            | 2048 0657                               | 1                                 | 16           | 758 5428                                | 6750                              |
| 3            | 2020 4823                               | 1                                 | 17           | 586 1467                                | 74250                             |
| 4            | 1979 1072                               | 1                                 | 18           | 586 1467                                | 67490                             |
| 5            | 1330 8979                               | 153                               | 19           | 586 1467                                | 36210                             |
| 6            | 1289 5228                               | 267                               | 20           | 586 1467                                | 49800                             |
| 7            | 1296 4187                               | 319                               | 21           | 482 7091                                | 138180                            |
| 8            | 1344 6896                               | 436                               | 22           | 482 7091                                | 93880                             |
| 9            | 965 4182                                | 1630                              | 23           | 482 7091                                | 224630                            |
| 10           | 965 4182                                | 1330                              | 24           | 482 7091                                | 55780                             |
| 11           | 965 4182                                | 1760                              | 25           | 379 2714                                | 1122310                           |
| 12           | 965 4182                                | 1220                              | 26           | 379 2714                                | 213960                            |
| 13           | 758 5428                                | 10200                             | 27           | 379 2714                                | 464810                            |
| 14           | 758 5428                                | 9000                              | 28           | 379 2714                                | 211800                            |

图 1 全寿命范围  $E-N$  曲线Fig 1 All-life range  $E-N$  curve图 2 全寿命范围  $S-N$  曲线Fig 2 All-life range  $S-N$  curve

采用本文方法, 回归出  $E-N$  曲线方程为

$$N = 4.2084504 \times 10^{65} S^{-24.5628871} [519.88687 - E(N)]^{0.96766}$$

由上式得到给定  $S_{\max} = 441.90 \text{ MPa}$  的  $E-N$  曲线方

程(如图 1 所示)为

$$N = 4.438484 \times [519.88687 - E(N)]^{0.96766}$$

$S_{\max} = 363.92 \text{ MPa}$  的  $E-N$  曲线方程(如图 1 所示)为

$$N = 522.87645 \times [519.88687 - E(N)]^{0.96766}$$

$S_{\max} = 337.93 \text{ MPa}$  的  $E-N$  曲线方程为(如图 1 所示)

$$N = 3228.10629 \times [519.88687 - E(N)]^{0.96766}$$

例 2 S2/5208 玻璃纤维增强单轴拉-拉疲劳试验数据如表 3 和图 2 所示, 试验采用应力比  $R = 0.1$  的恒定载荷, 施加频率为  $3 \text{ Hz}$  的正弦波, 试样取自含体积比为  $68.3\%$  纤维的单板<sup>[9]</sup>。

采用本文方法, 回归出 4 参数  $S-N$  曲线方程(图 2 所示)为

$$\left( \frac{1795.922576}{S - 236.627438} \right) = 10^{5.102072 \times 10^{-2} \times (\lg N)^{1.73534266}}$$

## 4 结 论

(1) 提出了新的复合材料全寿命范围的  $E-N$  方程与  $S-N$  方程, 此二方程因均有四个参数, 而具有比过去的双参数和三参数曲线公式更明确的物理意义。

(2) 采用相关系数最优法分别给出了两个方程的参数估计公式和求解方法。

(3) 给出了该二方程应用实例, 通过实例发现: 两个方程均具有良好拟合效果, 且便于实际应用。

## 参 考 文 献

- [1] Yang J N, Liu M D. Residual strength degradation model and theory of periodic proof tests for graphite/epoxy laminates [J]. *Journal of Composite Materials*, 1977, 11(2): 176~ 203
- [2] Radhakrishnan K. Fatigue and reliability evaluation of unnotched carbon epoxy laminates [J]. *Journal of Composite Materials*, 1984, 18(1): 21~ 31
- [3] Yang J N, Jones D L, Yang S H, et al. A stiffness degradation model for graphite/epoxy laminates [J]. *Journal of Composite Materials*, 1987, 24(6): 753~ 769
- [4] Tsai G C, Doyle J F, Sun C T. Frequency effects on the fatigue life and damage of graphite/epoxy composite [J]. *Journal of Composite Materials*, 1987, 21(1): 2~ 13
- [5] Whitworth H A. Modeling stiffness reduction of graphite/epoxy composite laminates [J]. *Journal of Composite Materials*, 1987, 21(4): 362~ 372
- [6] Hwang W, Han K S. Fatigue of composites — fatigue modulus concept and life prediction [J]. *Journal of Composite Materials*, 1986, 20(2): 154~ 165
- [7] Talreja R. Fatigue of composite material [M]. Pennsylvania: Technomic Publishing Company, 1987.
- [8] 中国航空研究院. 复合材料飞机结构耐久性/损伤容限设计指南 [M]. 北京: 航空工业出版社, 1995
- [9] Reifshider K L. Fatigue of Composite Materials [M]. New York: Elsevier Science Publishers, 1991. 431~ 468
- [10] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 68~ 90
- [11] Reifsnider K L, Jen M H R. Composite fly-wheel durability and life—— part II: long-term materials data. Lawrence Livermore National Laboratory Rep. [R]. UCRL-1523 Part II, September 1982
- [12] 熊峻江, 寇长河, 程小泉, 等. 光滑与含孔复合材料层板压-压疲劳试验研究 [J]. *复合材料学报*, 1998, 15(3): 99~ 102
- [13] Jann N, Yang, Douglas L J. Statistical fatigue of graphite/epoxy angle-ply laminates in shear [J]. *J Composite Material*, 1978, 12(10): 371~ 377.