

含矩形内部分层的复合材料层板的 状态分解-片条合成能量解法

孟庆春 胡伟平 张 行

(北京航空航天大学 508 教研室, 北京 100083)

摘 要 根据叠加原理将含有矩形内部分层的层板在横向载荷作用下的受力状态进行分解, 从而将分层问题归结为在分层表面上的附加剪切载荷作用下层板附加位移与附加应力的分析, 并据此建立了一个仅包含分层区的力学模型。进而在层板分层区中切取平行于边界的切片, 将切片视为含分层的层合梁, 其位移模态以相应层合梁的附加位移模态来表示。这样, 可构造层板分层区内满足位移边界条件的位移场。最后, 应用最小势能原理确定位移幅值的闭合解。计算结果表明, 挠度幅值远远大于中面位移幅值, 且与由双三角级数能量解法所得挠度幅值吻合很好。

关键词 复合材料层板, 分层, 附加状态, 片条合成能量解法

中图分类号 TB331, O343.2

层间分层是复合材料层合结构的一种重要的破坏形式, 这方面的研究工作已经广泛开展并正在不断地深入。

如果将分层看作层间裂纹, 则可在界面断裂力学范畴内进行研究。自 Williams^[1]以来, 已有许多学者对界面裂纹尖端场、应力强度因子等问题进行了研究。这些工作一般仅局限于两种不同材料的半无限大平面间的界面裂纹问题^[2~4], 以及含层间穿透分层的复合材料层板、层合梁的分层问题^[5~7]。对于含有内部分层的问题, 即三维分层问题, 目前的研究工作还不多见。

三维分层问题的研究对于发展界面断裂力学有重要的理论意义, 对工程结构的损伤容限设计有很大的工程应用价值。本文针对矩形分层问题, 通过分解层板的受力状态, 将分层的产生与扩展归结为分层表面受剪切载荷的状态。再用层合梁的位移解答表示层板内各片条的位移, 并据此构造层板的位移模态。最后, 应用最小势能原理确定位移参数的闭合解。

1 层板分层力学模型的简化

1.1 层板受力状态的分解

以四边简支复合材料四层板为例, 铺层上下对称, 受横向分布载荷作用。在外层与内层间存在上下对称的矩形分层区, 分层区边界平行于板边界, 边长为 $2a$ 、 $2b$, 外层、内层厚度分别为 $2t_1$ 与 t_2 。如图[9]图1所示建立 $oxyz$ 坐标系, 原点 o 位于两分层区中心连线与层板上下对称面的交点处, xoy 平面平行于分层表面, x 、 y 轴平行于分层区的两边。本文仍采用[9](p113~p114)的方法, 将层板的受力状态分解为对称与反对称状态。通过在分层表面施加剪切载荷,

收修改稿、初稿日期: 1998-07-29, 1998-04-14。国家自然科学基金资助项目(批准号 19402003)内容之一

将反对称状态分解为无分层状态与附加分层状态($<\beta_2>$ 状态)。容易看出, 分层的产生与扩展与对称状态、反对称状态中的无分层状态无关。于是, 在考虑板受横向分布载荷的分层问题时, 就只需研究附加分层状态 $<\beta_2>$ 。

1.2 分层力学模型

假设未分层区沿全部厚度服从直法线假设, 而分层区的每一层各自服从直法线假设。由于 $<\beta_2>$ 状态中的层板仅在分层上下表面受到自相平衡的剪切载荷作用, 所以未分层区可被视为刚体, 其与分层区的交界面相当于固定支座。可见, 仅在分层区内存在附加位移。将分层区取出, 建立力学模型如图 1 所示(为方便, 仅画出 xOz 剖面)。

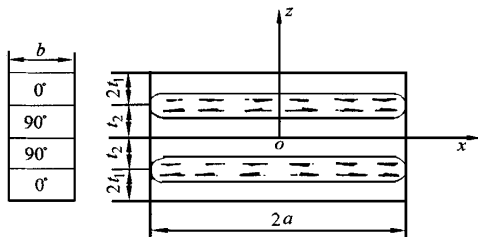


图 1 分层力学模型

Fig. 1 The mechanical model of delamination

2 附加位移模态的建立

在层板分层区中任取出与坐标平面 xOz 或 yOz 平行、厚度为无限小的切片, 则分层区内板的位移模态可近似地用切片的位移来模拟。切片受到两个互垂方向(纵向、横向)的剪切载荷作用。假设切片的变形服从平面假设与单向受力假设, 则可将切片看成层合梁, 按工程梁理论求解其位移。

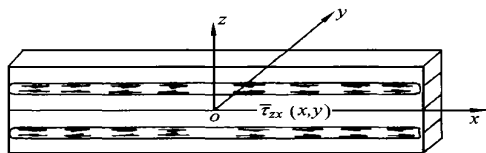
2.1 切片附加位移解答

在图 1 中, 取平行于 xOz 平面的切片。首先分析在分层表面上受到该切片平面内的纵向剪切载荷 $\tau_x = \lambda_0 \bar{x}^m$ 作用的情况, 如图 2(a) 所示。文[8]根据工程梁理论求出了第一层中面的面内位移 $u_{10}(x)$ 与切片的挠度 $w(x)$

$$u_{10}(x) = \frac{\lambda_0 a^2}{2t_1 E_1 (m+1)(m+2)} [\bar{x}^{m+2} - \bar{x}] \quad (1)$$

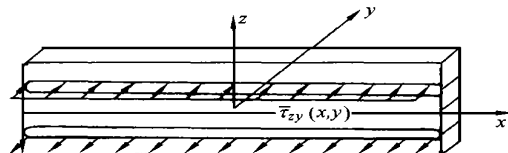
$$w(x) = \frac{3(t_1 + t_2)}{2t_1^3 E_1 + t_2^3 E_2} \frac{\lambda_0 a^3}{2(m+2)(m+3)} \left[1 - \frac{m+3}{m+1} \bar{x}^2 + \frac{2}{m+1} \bar{x}^{m+3} \right] \quad (2)$$

式中, $\bar{x} = x/a$ 为无量纲坐标, a 为切片的半长。可见, 切片平面内的纵向剪切载荷引起切片分层段的挠度与第一层的中面位移。



(a) 切片平面内的纵向剪切载荷

(a) Longitudinal shear loading in a slice



(b) 垂直切片平面的横向剪切载荷

(b) Transverse shear loading in a slice

图 2 切片的两种受力状态

Fig. 2 Two loading states in a slice

其次, 分析切片在分层表面受垂直切片平面的剪切载荷 $\tau_y = \mu_n \bar{x}^n$ 作用的情况, 如图 2(b) 所示。在 τ_y 作用下, 该切片的第一层产生弯曲变形 $v(x)$ 。由梁的四阶微分方程与边界条件可得:

$$v(x) = \frac{\mu_n}{EI_z} \frac{b^4}{2(n+1)(n+3)(n+4)} \left[1 - \frac{n+4}{n+2} \bar{x}^2 + \frac{2}{n+2} \bar{x}^{n+4} \right] \quad (3)$$

可见,垂直切片平面的横向剪切载荷仅引起切片第一层垂直切片平面的横向位移。对层板而言,这一位移就是外层中面位移。

以上两方面的分析对 y 方向切片同样适用。

2.2 层板分层区附加位移模态

分层表面的附加剪切载荷 $\tau_x(x, y)$ 和 $\tau_y(x, y)$ 总可表示为幂级数形式。设其通项为:

$$\tau_x(x, y) = \lambda_{np} \bar{x}^m \bar{y}^p, \quad \tau_y(x, y) = \mu_{nq} \bar{x}^n \bar{y}^q \quad m, n, p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

式中, λ_{np}, μ_{nq} 为已知剪切载荷系数, $\bar{x} = x/a, \bar{y} = y/b$ 为无量纲坐标。

在图 1 所示的状态中,过原点 $(0, 0)$ 取 x 方向切片,该切片的挠度 $w(x, 0)$ 可由式(2)构造,其幅值就是原点处的挠度 w_0 ;再过点 $(x, 0)$ 取 y 方向切片,在此切片中挠度最大值为 $w(x, 0)$ 。于是,分层区内任一点的位移可表示为:

$$w(x, y) = w_0 \left[1 - \frac{m+3}{m+1} \bar{x}^2 + \frac{2}{m+1} \bar{x}^{m+3} \right] \left[1 - \frac{n+3}{n+1} \bar{y}^2 + \frac{2}{n+1} \bar{y}^{n+3} \right] \quad (5)$$

容易看出,先取 y 方向切片,再取 x 方向的切片,可得到与上式相同的结果。

下面构造层合板分层区的面内位移模态。

首先过原点 $(0, 0)$ 取 x 方向切片,根据式(1)构造此切片第一层中面的面内位移 $u_{10}(x, 0)$ 。再过 $(x, 0)$ 点取 y 方向切片,该切片的弯曲位移模态由式(3)给出,其幅值等于 $u_{10}(x, 0)$ 。于是,分层区内外层中面上任一点 (x, y) 的 x 方向位移为:

$$u_{10}(x, y) = u_0(\bar{x} - \bar{x}^{m+2}) \left[1 - \frac{n+4}{n+2} \bar{y}^2 + \frac{2}{n+2} \bar{y}^{n+4} \right] \quad (6)$$

同理,分层区内第一层中面上任一点 (x, y) 的 y 方向位移为:

$$v_{10}(x, y) = v_0(\bar{y} - \bar{y}^{n+2}) \left[1 - \frac{m+4}{m+2} \bar{x}^2 + \frac{2}{m+2} \bar{x}^{m+4} \right] \quad (7)$$

这里, u_0, v_0 为待定位移参数。

由于模型为双对称的,所以仅给出上述第一象限内的位移就足够了。

在小变形、无剪切变形的条件下,第一、二两层内位移为:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_{10} - \frac{\partial v}{\partial x}(z - t_1 - t_2), & v_1(x, y, z) &= v_{10} - \frac{\partial u}{\partial y}(z - t_1 - t_2) \\ u_2(x, y, z) &= -\frac{\partial v}{\partial x}z, & v_2(x, y, z) &= -\frac{\partial u}{\partial y}z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

至此,我们构造了以 u_0, v_0, w_0 表示的对应于式(4)载荷状态的分层区内的位移模态。此位移模态满足分层区边界条件。

3 附加位移幅值的能量解法

在线弹性条件下,各层的应变与应力分量表示为:

$$\epsilon_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k)}(x, y) u_0 + s_{ij}^{(k)}(x, y) v_0 + t_{ij}^{(k)}(x, y, z) w_0 \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijpq}^{(k)} \epsilon_{pq}^{(k)} \quad (10)$$

式中, $k = 1, 2$ 表示层号。将式(8)代入几何方程可确定函数 $r_{ij}^{(k)}(x, y), s_{ij}^{(k)}(x, y), t_{ij}^{(k)}(x, y, z)$ 。

分层区内层板的应变能与外力势能为(只考虑第一象限):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sigma_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij}^{(k)} dv_k \quad (11)$$

$$V = - \int_A \{ \tau_{xx}(x, y) [u_1(x, y, t_2) - u_2(x, y, t_2)] + \tau_{xy}(x, y) [v_1(x, y, t_2) - v_2(x, y, t_2)] \} dA \quad (12)$$

式中, v_k 为分层区内各层板在第一象限内的体积, A 为分层区在第一象限内的面积。

根据最小势能原理 $\delta(U + V) = 0$ 可得关于待定位移参数的线性方程组。求解得:

$$u_0 = \frac{B A_{22} - B A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{12}}, \quad v_0 = \frac{B A_{11} - B A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{12}}, \quad w_0 = \frac{B_3}{A_{33}} \quad (13)$$

式中的系数可根据应变、应力表达式直接积分而得其解析解。可见, 位移参数的解是闭合的。

根据上述闭合解, 由式(5)~ 式(7)可得位移模态的闭合解, 并进一步确定其它力学参量。

4 算 例

设正交复材四层板材料为石墨/环氧, 铺设角为 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, 0 层纤维沿 y 方向。材料常数如下: $E_1 = 53.74 \text{ GPa}$, $E_2 = 17.95 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 8.626 \text{ GPa}$ 。载荷取常数项: $\tau_{xx} = \tau_{xy} = 1 \text{ MPa}$, 计算不同情况下的附加位移。同时, 利用[9]所给出的双三角级数能量法进行计算并比较两者的结果。

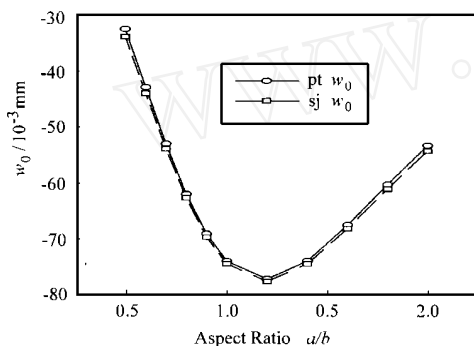


图 3 分层区挠度随长宽比的变化

Fig. 3 Deflection w_0 with respect to aspect ratio of delamination zone

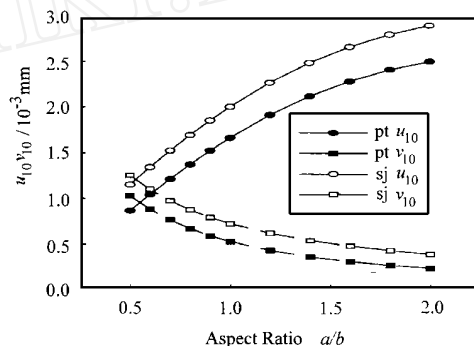


图 4 分层区第一层中面位移随长宽比的变化

Fig. 4 Middle plane displacements with respect to aspect ratio of delamination zone

4.1 附加位移随分层区长宽比的变化

保持分层区面积不变 ($ab = 400 \text{ mm}^2$), 两层厚度取为 $2t_1 = t_2 = 1.0 \text{ mm}$ 。由片条合成能量解法与双三角级数能量法计算所得 $(0, 0)$ 点处的挠度 w_0 以及外层在 $(a/2, b/2)$ 点处的中面位移 u_{10} 与 v_{10} 示于图 3 和图 4。图中“pt”与“sj”分别表示上述两种方法, w_0 取负值表示挠度沿 $-z$ 方向。结果表明: 分层区挠度幅值远远大于中面位移; 两种方法所得挠度幅值的相对误差一般小于 1%, 最大不超过 5%; 两中面位移的误差要大一些, 但分层区表面的面内位移的相对误差要小一些, 对断裂力学参量的影响可不计。

4.2 附加位移随各层厚度比的变化

保持第一、二层总厚度不变: $2t_1 + t_2 = 2.0 \text{ mm}$, 分层区的半长、宽分别为 $a = b = 20 \text{ mm}$, 由上述两种方法计算所得 $(0, 0)$ 点处的挠度 w_0 及 $(a/2, b/2)$ 点处的面内位移 u_{10} 与 v_{10} 示于图 5 和图 6。可以看出, 两种方法所得挠度吻合很好, 误差小于 1%; 中面位移同样比挠度小 1~2 个

数量级。

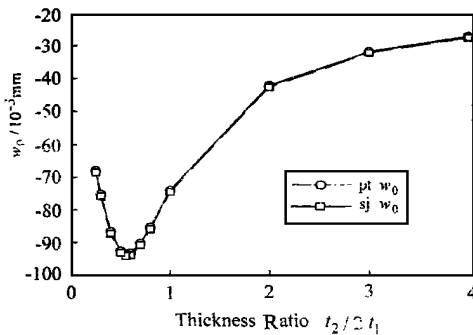


图 5 分层区挠度随厚度比的变化

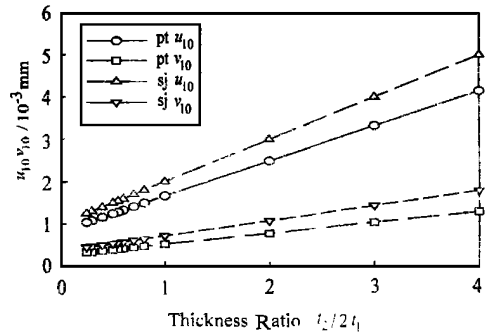


图 6 分层区第一层中面位移随厚度比的变化

Fig. 5 Deflection w_0 with respect to thickness ratio Fig. 6 Middle plane displacements with respect to thickness ratio

5 结 论

- (1) 分层区的挠度要比两中面位移大 1~2 个数量级;
- (2) 两种方法所得分层区挠度幅值非常接近, 表明片条合成能量法具有足够的精度;
- (3) 片条合成能量法可以给出附加位移的闭合解。该方法可用于分析含分层层合结构的断裂与稳定问题, 为这类结构的损伤容限设计提供参考性依据。

参 考 文 献

- 1 William S M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media *Bulletin Seismological Society of America*, 1959, 49: 199~204
- 2 Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks *Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 403~410
- 3 Gotch M. Some problems of bonded anisotropic plates with cracks along the bond *International Journal of Fracture Mechanics*, 1967, 3: 253~265
- 4 Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks *Journal of Applied Mechanics*, 1988, 55: 98~103
- 5 Wang S S. Fracture mechanics for delamination problem in composite materials *Journal of Composite Materials*, 1983, 17: 210~223
- 6 孟庆春, 张行, 王俊奎. 复合材料层合梁在横向载荷作用下分层问题的解析-广义变分法 *复合材料学报*, 1991, 8(3): 53~56
- 7 Meng Qingchun, Zhang Xing. A analytical-generalized variational method of solution for delamination of laminates *Engineering Fracture Mechanics*, 1993, 46(5): 797~805
- 8 王奇志, 孟庆春, 张行. 复合材料层合梁分层问题解析解法 *北京航空航天大学学报*, 1998, 23(3): 319~322
- 9 胡伟平, 孟庆春, 张行. 含内部分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法 *复合材料学报*, 1998, 15(3): 113~118

METHOD OF STATE DECOMPOSITION AND SLICE COMPOSITION ON RECTANGULAR DELAMINATION IN COMPOSITE LAMINATE

Meng Qingchun Hu Weiping Zhang Xing

(Division 508, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract The transverse loading state of a laminate with rectangular delaminations is divided using the principle of superposition, so that the problem of delamination can be reduced to the analysis about the additional displacements and stresses which are caused by the additional shear loading acting on the delamination surfaces; then a simple mechanics model about delamination area is established. The laminate sections parallel to the boundary of delamination area can be regarded as laminated beams with delaminations, the displacements of which can be expressed by the analytical solutions of additional displacements in the above beams. By this way, the additional displacement fields satisfying the displacement boundary condition of delamination area can be established. Finally, a closed form solution of additional displacements is obtained by the principle of minimum potential energy. The above results are compared with the convergent solutions obtained by the method of trigonometric series. It shows that the deflections acquired from two different ways are much greater than the middle plane displacements and agree with each other very well.

Key words composite laminate, delamination, additional state, method of slice composition

(上接第 117 页)

2 纺织技术

与前面介绍的 RTM 成型技术的开发同时, 进行了高效制造预形件的纺织技术开发。如图 11 所示, 在 RTM 成型的成本中, 花在预形件制作上的比例较大^[16]。纺织技术则提供了自动、快速制作预形件的技术。纺织技术可如下分类:

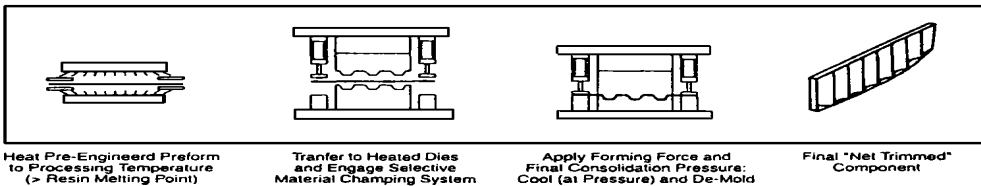


图 10 FRTP 的压制成型^[12]

缝合: 把织物重叠加以缝合制成预形件。

三维织物: 不仅平面内而且面外方向上也有丝排列的织物。

二维编织(编带): 指通过相互改变单向排列纱的排列顺序而得到的带状原料形态。所有的纱都不被切断而相互交叉地斜向走向。有板状和中空状, 特点是制造速度快(图 12)^[17]。

三维编织: 按必要的断面形状配置许多纱筒, 通过纱筒的反复复杂移动而制成异形壁厚断面的编带。纱在内部呈斜向立体交叉。

(下转第 139 页)