

复合材料三相同轴柱体界面模型分析

王颖坚 彭 姝*

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要 本文改进了 Theocaris 等的工作, 进行了三相同轴柱体复合材料界面模型的理论分析。本文以指数律描述界面相层的弹性性能, 所得结果与文献中的已有结论一致。

关键词 界面相层, 三相同轴柱体, 复合材料界面模型

中图分类号 TB33, O 242

纤维和基体之间的界面相对复合材料的整体性能有着重要影响, 对于界面相性质的深入了解, 关于界面相与复合材料整体性能的关系的研究, 一直受到极大关注。

Hashin 和 Rosen^[1]、Christenson 和 Lo^[2]以纤维或夹杂、基体、等效均匀介质作为三相, 把纤维(或夹杂)与基体之间的界面作为无厚度的接触面, 建立了复合材料三相球体模型和三相柱体模型的理论分析。

随着界面研究的进展, 近年的研究工作已不再把界面作为无厚度的几何面。界面相(interphase)是存在于纤维(或颗粒夹杂)与基体间的厚度为几十纳米或几百纳米的区域。很多文献对于界面相的形态及其力学性能、热力学性能进行了深入探讨^[3]。在一些文献中, 将界面相描述为具有有限厚度的均匀各向同性弹性区域^[4], 或描述为具有可变热弹性性质的区域, 并建立了将界面相作为有限厚度区域的各种模型分析。Jayaraman 等^[5]将界面相模型分为两类: 弹簧层模型(spring layer model)和界面相层模型(interphase layer model)。弹簧层模型把界面相考虑为未确定厚度的薄的界面区域。界面相层模型把界面相考虑为有确定厚度的、与纤维与基体有不同的弹性及热弹性性质的区域。

Theocaris 等^[6]为研究界面相的性质对纤维增强复合材料整体性能的影响, 建立了三相同轴柱体模型。该模型考虑界面相的弹性性质随着到纤维表面之径向距离的改变而变化, 并分别用线性律、抛物线型律、双曲线型律、对数律描述了界面相层的弹性性质。Theocaris 等的工作深化了对界面相性质的研究。Theocaris 等将三相同轴柱体模型处理为广义平面应变问题, 采用平面问题的 Airy 应力函数(见[6], P400), 将平面问题的协调方程用于三相同轴柱体模型的应力分析和位移计算。

本文改进了三相同轴柱体模型的分析方法。根据模型的轴对称性, 本文采用轴对称问题的应力函数, 在纤维相、界面相层、基体相层分别选取轴对称问题协调方程的解, 并进而分析了三相同轴柱体模型的应力和位移, 研究了纤维增强复合材料的整体弹性性能。

1 三相同轴柱体界面模型

复合材料的代表性体积单元是三相同轴柱体, 包含三个相: 纤维相、界面相、基体相。

取 z 轴沿三相同轴柱体的轴向, 三个相对应的柱体或柱壳分别为(图1): 纤维相($0 \leq r \leq r_f$)、界面相($r_f \leq r \leq r_i$)、基体相($r_i \leq r \leq r_m$)。

本文的三相同轴柱体界面模型分析中假定

a) 纤维是均匀各向同性的线性弹性体, 弹性常数为 E_f, ν_f 。基体是均匀各向同性的线性弹性体, 弹性常数为 E_m, ν_m 。

b) 界面相是各向同性的线性弹性材料, 其弹性常数是沿径向变化的, $E_i = E_i(r), \nu_i = \nu_i(r)$ 。本文考虑它们在界面相内按指数律变化^[7]。

c) 界面相的弹性性质在纤维相与界面相的交接面($r = r_f$)上满足界面条件

$$E_i(r_f) = E_f \quad (1)$$

$$\nu_i(r_f) = \nu_f \quad (2)$$

在界面相与基体相的交接面($r = r_i$)上满足界面条件

$$E_i(r_i) = E_m, \quad \nu_i(r_i) = \nu_m \quad (3, 4)$$

d) 在轴向拉压载荷作用下, 三相同轴柱体模型的纤维相、界面相、基体相的轴向正应变是协调的^[6]:

$$\epsilon_f = \epsilon_i = \epsilon_m = \epsilon \quad (5)$$

显然在此界面模型中 $\gamma_{rz} = \gamma_{rz} = 0$ 。

Theocaris 等在分析三相同轴柱体模型时, 采用了平面问题的协调方程([6]P400):

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \Phi}{dr} = 0$$

其中 Airy 应力函数 Φ 仅为 r 的函数。

三相同轴柱体界面模型是轴对称问题, 本文在分析中采用轴对称问题的协调方程

$$\nabla^4 \Phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^2 \Phi(r, z) = 0 \quad (6)$$

应力函数 Φ 是 r, z 的函数。在三相同轴柱体模型的纤维相、界面相、基体相中分别选取协调方程(6)的解。

1.1 纤维相 ($0 \leq r \leq r_f$)

选取满足协调方程(6)的应力函数 $\Phi = A_1 r^2 z + A_2 z^3$, 对应的应力分量

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial^2} \right] = (4A_1 + 6A_2) \nu - 2A_1 = \alpha_i \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] = (4A_1 + 6A_2) \nu - 2A_1 = \alpha_i \quad (8)$$

其中为了方便, 选用待定常数 α_i 。由应变协调条件(5)得

$$\sigma_{rz} = E_f \epsilon + 2\nu \alpha_i \quad (9)$$

因

$$\epsilon = \frac{1}{E_f} [\alpha_i (1 - \nu - 2\nu^2) - \nu E_f \epsilon]$$

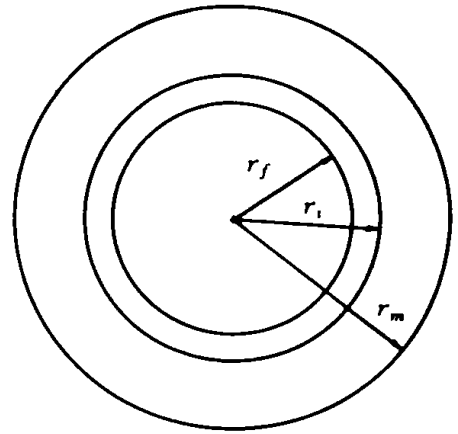


图1 三相同轴柱体的横截面

Fig 1 The cross section of three-phase coaxial cylinders

则由几何关系得

$$u_{rf} = \frac{r}{E_f} [\alpha_i (1 - \nu_f - 2\nu_f^2) - \nu_f E_f \epsilon] \quad (10)$$

1.2 界面相层 ($r_f \leq r \leq r_i$)

选取满足方程(6)的应力函数 $\Phi = B_1 r^2 z + B_2 z^3 + B_3 z \ln r$, 对应的应力分量

$$\sigma_{ri} = \frac{\partial}{\partial z} [\nu(r) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial^2}] = \frac{B_3}{r^2} + (4B_1 + 6B_2) \nu(r) - 2B_1$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z} [\nu(r) \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}] = -\frac{B_3}{r^2} + (4B_1 + 6B_2) \nu(r) - 2B_1$$

令 $B_3 = \alpha_2$, $(4B_1 + 6B_2) \nu(r) - 2B_1 = \beta_1 \nu(r) + \beta_2$

则 $\sigma_{ri} = \frac{\alpha_2}{r^2} + \beta_1 \nu(r) + \beta_2$, $\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha_2}{r^2} + \beta_1 \nu(r) + \beta_2$ (11, 12)

由协调条件(5)得

$$\sigma_{zi} = E_i(r) \epsilon + 2\nu(r) [\beta_1 \nu(r) + \beta_2] \quad (13)$$

故由本构关系和几何关系, 得

$$u_{ri} = \frac{r}{E_i(r)} \left\{ -[1 + \nu(r)] \frac{\alpha_2}{r^2} + [1 - \nu(r) - 2\nu^2(r)] [\beta_1 \nu(r) + \beta_2] - \nu(r) E_i(r) \epsilon \right\} \quad (14)$$

1.3 基体相 ($r_i \leq r \leq r_m$)

选取满足方程(6)的应力函数 $\Phi_m = C_1 r^2 z + C_2 z^3 + C_3 z \ln r$, 对应的应力分量

$$\sigma_{rm} = \frac{C_3}{r^2} + (4C_1 + 6C_2) \nu_m - 2C_1 = \frac{\alpha_3}{r^2} + \alpha_4 \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta m} = -\frac{C_3}{r^2} + (4C_1 + 6C_2) \nu_m - 2C_1 = -\frac{\alpha_3}{r^2} + \alpha_4 \quad (16)$$

其中已令 $C_3 = \alpha_3$, $(4C_1 + 6C_2) \nu_m - 2C_1 = \alpha_4$, 由协调条件(5)得

$$\sigma_{zm} = E_m \epsilon + 2\nu_m \alpha_4 \quad (17)$$

故由本构关系和几何关系, 得

$$u_{rm} = \frac{r}{E_m} \left[- (1 + \nu_m) \frac{\alpha_3}{r^2} + (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) \alpha_4 - E_m \nu_m \epsilon \right] \quad (18)$$

2 界面相弹性性质的描述

复合材料的界面相是纤维和基体在固化过程中相互结合、相互作用形成的。由于纤维和基体的热膨胀系数及弹性性质差别很大, 因而界面相的弹性性质及热性质是非均匀的, 它们随着与纤维表面距离的变化而改变。而且, 有应力集中、细观裂纹、缺陷等存在于界面相内。虽然界面相层厚度只有几十至几百纳米, 但是界面相对复合材料的整体性能、增强机制有着重要影响。

在界面相层内, 弹性性质在界面相与纤维的交接面附近变化迅速, 在界面相与基体交接面附近变化较平缓。为描述这一特性, 本文采用指数函数表达界面相层的弹性模量 $E_i(r)$ 及泊桑比 $\nu_i(r)$, 即令^[7]

$$E_i(r) = N_E r e^{-C_E r} + L_E \quad (19)$$

$$\nu_i(r) = N_\nu r e^{-C_\nu r} + L_\nu \quad (20)$$

其中 $N_E, N_\nu, L_E, L_\nu, C_E, C_\nu$ 为待定常数。由 $r = r_f$ 及 $r = r_i$ 处的界面条件(1)~(4), 并利用

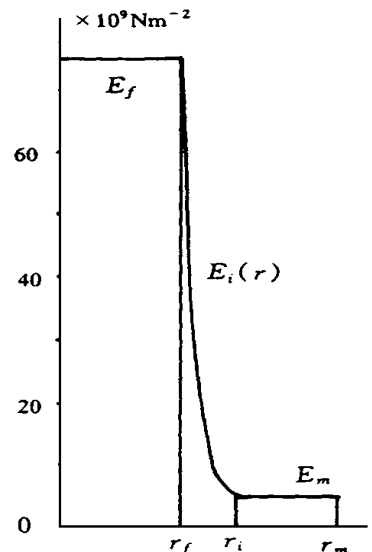


图2 界面相层 $E_i(r)$

Fig 2 $E_i(r)$ of interphase layer

$$\left. \frac{dE_i(r)}{dr} \right|_{r=r_i} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \frac{d\nu(r)}{dr} \right|_{r=r_i} = 0 \quad (22)$$

可以求得

$$E_i(r) = E_m + \frac{(E_f - E_m) [\tilde{r} e^{(1-\tilde{r})} - 1]}{k_0 e^{(1-k_0)} - 1} \quad (23)$$

$$\nu_i(r) = \nu_m - \frac{(\nu_m - \nu_f) [\tilde{r} e^{(1-\tilde{r})} - 1]}{k_0 e^{(1-k_0)} - 1} \quad (24)$$

其中无量纲参数 $\tilde{r} = r/r_i$, $k_0 = r_f/r_0$. (23)、(24) 式表述的界面相层的弹性模量 $E_i(r)$ 、泊桑比 $\nu_i(r)$ 示于图2、图3.

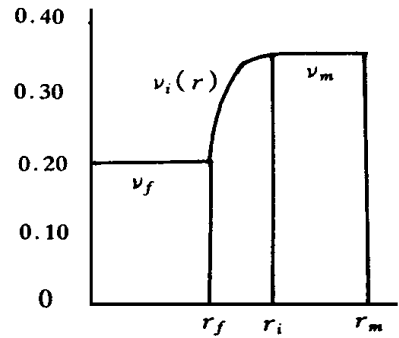


图3 界面相层 $\nu(r)$

Fig 3 $\nu(r)$ of interphase layer

3 应力、位移的连续条件及应力边界条件

在纤维相、界面相、基体相的应力、位移表达式(7)~(18)中,共有六个待定常数 α_i 、 α_0 、 α_3 、 α_4 、 β_1 、 β_2 . 为确定这些待定常数,需考虑 $r = r_f$ 及 $r = r_i$ 处的应力连续条件、位移连续条件和 $r = r_m$ 处的应力边界条件.

由 $r = r_f$ 处应力连续条件 $\sigma_{rf} = \sigma_{ri}$ 得

$$\alpha_i = \alpha_0/r_f^2 + \beta_1 \nu_i(r_f) + \beta_2 \quad (25)$$

由 $r = r_i$ 处应力连续条件 $\sigma_{ri} = \sigma_{rm}$ 得

$$\alpha_0/r_i^2 + \beta_1 \nu_i(r_i) + \beta_2 = \alpha_3/r_i^2 + \alpha_4 \quad (26)$$

由 $r = r_f$ 处位移连续条件 $u_{rf} = u_{ri}$ 得

$$\frac{1}{E_f} [\alpha_i (1 - \nu_i - 2\nu_i^2) - \nu_i E_f \epsilon] = \frac{1}{E_i(r_f)} \left\{ - [1 + \nu_i(r_f)] \frac{\alpha_0}{r_f^2} + [\beta_1 \nu_i(r_f) + \beta_2] \cdot [1 - \nu_i(r_f) - 2\nu_i^2(r_f)] - E_i(r_f) \nu_i(r_f) \epsilon \right\} \quad (27)$$

由 $r = r_i$ 处位移连续条件 $u_{ri} = u_{rm}$ 得

$$\frac{1}{E_i(r_i)} \left\{ - [1 + \nu_i(r_i)] \frac{\alpha_0}{r_i^2} + [\beta_1 \nu_i(r_i) + \beta_2] [1 - \nu_i(r_i) - 2\nu_i^2(r_i)] - E_i(r_i) \nu_i(r_i) \epsilon \right\} = \frac{1}{E_m} \left[- (1 + \nu_m) \frac{\alpha_3}{r_i^2} + \alpha_4 (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) - E_m \nu_m \epsilon \right] \quad (28)$$

由 $r = r_m$ 处应力边界条件 $\sigma_{rm} = 0$ 得

$$\alpha_3/r_m^2 + \alpha_4 = 0 \quad (29)$$

4 纤维增强复合材料的纵向弹性模量 E_L 、主泊桑比 ν_L

设三相同轴柱体界面模型的长度为 L , 由界面模型中纤维相、界面相、基体相的应力分布, 可知代表性体积单元的应变能为

$$P = \pi L \left[\int_{r_f}^{r_i} (\sigma_{rf} \epsilon_f + \sigma_{\theta f} \epsilon_{\theta f} + \sigma_{zf} \epsilon_z) r dr + \int_{r_i}^{r_m} (\sigma_{ri} \epsilon_i + \sigma_{\theta i} \epsilon_{\theta i} + \sigma_{zi} \epsilon_z) r dr + \int_{r_m}^r (\sigma_{rm} \epsilon_m + \sigma_{\theta m} \epsilon_{\theta m} + \sigma_{zm} \epsilon_z) r dr \right]$$

若纤维增强复合材料的有效纵向弹性模量为 E_L , 则承受轴向拉伸载荷时代表性体积单元的应

变能

$$P = \pi L E_L \epsilon^2 (r_m^2/2)$$

故

$$E_L = \frac{2}{r_m^2 \epsilon^2} \left[\int_0^{r_f} (\sigma_{fi} \epsilon_{fi} + \sigma_{\theta i} \epsilon_{\theta i} + \sigma_{zi} \epsilon_{zi}) r dr + \int_0^{r_f} (\sigma_{ri} \epsilon_{ri} + \sigma_{\theta i} \epsilon_{\theta i} + \sigma_{zi} \epsilon_{zi}) r dr + \int_0^{r_f} (\sigma_{mi} \epsilon_{mi} + \sigma_{\theta i} \epsilon_{\theta i} + \sigma_{zi} \epsilon_{zi}) r dr \right] \quad (30)$$

在纤维相中

$$\begin{aligned} \sigma_{fi} &= \sigma_{\theta i} = \alpha_i, \quad \sigma_{zi} = E_i \epsilon + 2\nu_i \alpha_i \\ \epsilon_{fi} &= \epsilon_{\theta i} = \frac{1}{E_f} [\alpha_i (1 - \nu_i - 2\nu_i^2) - \nu_i E_f \epsilon] \end{aligned} \quad (31)$$

在界面相层中

$$\begin{aligned} \sigma_{ri} &= \frac{\alpha_i}{r^2} + \beta_1 \nu_i(r) + \beta_2, \quad \sigma_{\theta i} = -\frac{\alpha_i}{r^2} + \beta_1 \nu_i(r) + \beta_2, \quad \sigma_{zi} = E_i(r) \epsilon + 2\nu_i(r) [\beta_1 \nu_i(r) + \beta_2] \\ \epsilon_{ri} &= \frac{1}{E_i(r)} \left\{ [1 + \nu_i(r)] \frac{\alpha_i}{r^2} + [1 - \nu_i(r) - 2\nu_i^2(r)] [\beta_1 \nu_i(r) + \beta_2] - \nu_i(r) E_i(r) \epsilon \right\} \\ \epsilon_{\theta i} &= \frac{1}{E_i(r)} \left\{ -[1 + \nu_i(r)] \frac{\alpha_i}{r^2} + [1 - \nu_i(r) - 2\nu_i^2(r)] [\beta_1 \nu_i(r) + \beta_2] - \nu_i(r) E_i(r) \epsilon \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

在基体相中

$$\begin{aligned} \sigma_{mi} &= \alpha_i/r^2 + \alpha_4, \quad \sigma_{\theta i} = -\alpha_i/r^2 + \alpha_4, \quad \sigma_{zi} = E_m \epsilon + 2\nu_m \alpha_4 \\ \epsilon_{mi} &= 1/E_m [(1 + \nu_m) \alpha_i/r^2 + (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) \alpha_4 - E_m \nu_m \epsilon] \\ \epsilon_{\theta i} &= 1/E_m [- (1 + \nu_m) \alpha_i/r^2 + (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) \alpha_4 - E_m \nu_m \epsilon] \end{aligned} \quad (33)$$

将上述各相中的表达式代入(30)式中各相应的积分, 并利用协调条件(5), 可以导出

$$\begin{aligned} E_L &= E_f U_f + E_m U_m + \frac{2\alpha_i^2}{E_i \epsilon^2} (1 - \nu_i - 2\nu_i^2) \frac{r_f^2}{r_m^2} + \frac{2U_m}{E_m \epsilon^2} \left[(1 + \nu_m) \frac{\alpha_i^2}{r_i^2 r_m^2} + (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) \alpha_4 \right] \\ &+ \frac{2}{\epsilon^2 r_m^2} \int_0^{r_f} \left\{ \frac{2}{E_i(r)} \left[\left(1 + \nu_i(r) \right) \frac{\alpha_i^2}{r^4} + \left(\beta_1 \nu_i(r) + \beta_2 \right)^2 \left(1 - \nu_i(r) - 2\nu_i^2(r) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. E_i(r) \epsilon^2 \right\} r dr \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $U_f = r_f^2/r_m^2$, $U_m = (r_m^2 - r_i^2)/r_m^2$ 。(34)式中的待定常数 α_i 、 α_4 、 α_5 、 α_6 、 β_1 、 β_2 由(25)~(29)、界面条件(1)~(4)及辅助方程确定。为此, 首先将界面条件(1)~(4)代入(25)~(29)中。根据假定, 纤维相、基体相均为均匀各向同性弹性材料, 而且承受轴向均匀拉伸载荷时, 轴向应变是均匀分布的。于是, 由纤维相、基体相的应力、应变场及本构关系, 分别导出两个方程, 它们与(25)~(29)构成确定六个待定常数的七个方程。这七个方程中只有六个是独立的, 故可以唯一确定常数 α_i 、 α_4 、 α_5 、 α_6 、 β_1 、 β_2 。将所得结果代入(34)式, 并利用(23)式, 可以导出

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{2}{r_m^2} \int_0^{r_f} \left\{ E_m + \frac{(E_f - E_m) [\tilde{r} e^{(1-\nu)} - 1]}{k_0 e^{(1-\nu_0)} - 1} \right\} r dr \quad (35)$$

纤维增强复合材料的主泊桑比

$$\nu = -\epsilon_r/\epsilon_z = -\epsilon_r/\epsilon$$

若三相同轴柱体模型的体积为 V_c , 则

$$\nu = -\frac{1}{\epsilon V_c} \int_c \epsilon_r dV = -\frac{2}{\epsilon r_m^2} \left[\int_0^{r_f} \epsilon_{ri} r dr + \int_0^{r_f} \epsilon_{\theta i} r dr + \int_0^{r_f} \epsilon_{mi} r dr \right]$$

将(31)~(33)式代入上式, 并利用(24)式, 可以导出

$$\nu = \nu_f U_f + \nu_m U_m + \frac{2}{r_m^2} \int_0^{r_f} \left\{ \nu_m - \frac{(\nu_m - \nu_i) [\tilde{r} e^{(1-\nu)} - 1]}{k_0 e^{(1-\nu_0)} - 1} \right\} r dr \quad (36)$$

由 (35)、(36) 式计算得出的纤维增强复合材料的有效纵向弹性模量 E_L 及主泊桑比 ν , 分别列在表1、表2中。

表1 纵向有效弹性模量 E_L Table 1 Values for the longitudinal effective elastic modulus E_L

纤维的体积百分比	混合律 ^[7]	抛物线律 ^[6]	本文的计算结果
U_f	$E_L (\times 10^9 \text{Nm}^{-2})$	$E_L (\times 10^9 \text{Nm}^{-2})$	$E_L (\times 10^9 \text{Nm}^{-2})$
0 0	3 5	3 5	3 5
0 10	10 35	10 38	10 3461
0 20	17 20	17 31	17 1871
0 30	24 05	24 30	24 0333
0 40	30 90	31 35	30 8951
0 50	37 75	38 45	37 7505
0 60	44 60	45 60	44 6002
0 65	48 03	49 13	48 0250
0 70	51 45	52 81	51 4497
0 80	58 30	60 08	58 2988
0 90	65 15	67 39	65 1475

表2 主泊桑比 ν Table 2 Values for the major Poisson's ratio ν

纤维的体积百分比	混合律 ^[7]	抛物线律 ^[6]	本文的计算结果
U_f	ν	ν	ν
0 0	0 35	0 35	0 35
0 10	0 335	0 335	0 3346
0 20	0 320	0 320	0 3187
0 30	0 305	0 304	0 3033
0 40	0 290	0 289	0 2895
0 50	0 275	0 273	0 2750
0 60	0 260	0 258	0 2600
0 65	0 253	0 250	0 2525
0 70	0 245	0 242	0 24497
0 80	0 230	0 226	0 22988
0 90	0 215	0 210	0 21475

5 结 论

(1) 三相同轴柱体界面模型是轴对称问题。本文采用轴对称问题的应力函数 $\Phi(r, z)$, 它满足轴对称问题的协调方程(6)。Theocaris 等^[6]在分析三相同轴柱体模型时, 采用了平面问题的 Airy 应力函数和平面问题的协调方程, 本文改进了 Theocaris 等人的工作, 给出了三相同轴柱体界面模型按轴对称问题进行理论分析的方法。

(2) 在三相同轴柱体界面模型中, 假定纤维相是均匀各向同性线性弹性材料, 基体相是均匀各向同性线性弹性材料, 界面相层是各向同性的线性弹性材料。界面相层的弹性性质是沿径向变化的, 本文考虑其沿径向按指数律变化。

(3) 本文假定在纤维相与界面相的交接面 $r = r_f$ 处、在界面相与基体相的交接面 $r = r_i$ 处,

界面相的弹性性质满足界面条件。因此, 在本文给出的三相同轴柱体界面模型中, 材料的弹性性质在各相内及在各相的交接面处, 是连续变化的。

(4) 表1、表2给出了按本文导出的三相同轴柱体模型分析公式计算得到的纵向有效弹性模量 E_L 、主泊桑比 ν 的数值结果, 它们与文[6]、文[7]中的结果是吻合的。

参 考 文 献

- 1 Hashin Z, Rosen B W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials J Appl Mech, 1964, 31: 223~ 232
- 2 Christenson R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models J Mech Phys Solids, 1979, 27: 315~ 330
- 3 Jayaraman K, Reifsnider K L, Swain R E. Elastic and thermal effects in the interphase: Part I Comments on characterization methods Journal of Composites Technology & Research, 1993, 15(1) 3~ 13
- 4 Theocaris P S, Papanicolaou G C, Spathis G D. Physical model for the thermal expansion behaviour of fibre-reinforced viscoelastic composites Fibre Sci and Technology, 1981, 15: 187~ 197
- 5 Jayaraman K, Reifsnider K L, Swain R E. Elastic and thermal effects in the interphase: Part II. Comments on modelling studies Journal of Composites Technology & Research, 1993, 15(1): 14~ 22
- 6 Theocaris P S, Sideridis E P, Papanicolaou G C. The elastic longitudinal modulus and Poisson's ratio for fiber composites Journal of Reinforced Plastics and Composites, 1985, 4: 396~ 418
- 7 Papanicolaou G C, Messinis G J, Karakatsanidis S S. The effect of interfacial condition on the elastic-longitudinal modulus of fibre reinforced composites Journal of Materials Science, 1989, 24(2): 395~ 401

ANALYSIS OF COMPOSITE INTERPHASE MODEL COMPOSED OF THREE-PHASE COAXIAL CYLINDERS

Wang Yingjian Peng Shu

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871)

Abstract A theoretical analysis of composite interphase model composed of three-phase coaxial cylinders is developed and the work done by Theocaris *et al* is improved in this paper. The elastic properties of interphase layer are described with an exponential law of variation. The results presented in this paper agree well with those given in the literature.

Key words interphase, three-phase coaxial cylinders, composite interphase model