第 15 卷　第 4 期　　复　合　材　料　学　报　　Vol. 15　No. 4
1998 年　10 月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　October　1998

复合材料弹性模量随机计算模型

范建华　　杨庆雄
(西北工业大学120信箱, 西安 710072)

摘　要　从纤维在复合材料中排列不规则的事实出发, 运用数值模拟的方法初步研究了纤维排列的随机性, 并将结果初步应用在复合材料模量的细观力学计算当中, 发现纤维随机排列对细观力学研究复合材料的力学性能有较大的影响, 表明如何在复合材料细观力学中恰当地考虑纤维随机排列是一个值得研究的问题。

关键词　数值统计实验, 计算细观力学, 纤维排列随机性
中图分类号　TB 333, O 343

复合材料弹性模量的微观力学研究, 其精确度在很大程度上取决于计算模型的选取。目前建立的计算模型基本上都是复合材料实际结构的一种抽象, 未能反映真实材料的一些重要特征, 因而导致在计算除纵向弹性模量之外的其他常数时, 有较大的误差[1]。且这种误差的产生应归咎于模型误差, 故仅通过改进计算手段的方法来减小误差是很困难的。

观察复合材料横截面上纤维的排列(图1(a)、(b)、(c)、(d)), 可以看出呈现明显的随机性(直径较粗的硼纤维除外)。然而现有的计算模型很少虑及这种特性, 或是考虑的不够直观[3]。事实上, 纤维排列的这种随机特性, 亦即就位特性, 对单向复合材料力学性能, 特别是强度, 会产生显著的影响。本文中根据单层板横断面纤维排列的随机特性, 提出一种考虑纤维就位特性的计算模型。

1　纤维排列随机性研究

1.1　纤维排列的统计研究

采用金相学方法可以比较准确地研究单层板中纤维排列的统计规律, 但是需要花费相当多的研究经费。本文中根据对纤维排列微观照片的研究, 提出可以采取数值实验的办法来研究连续纤维增强复合材料中纤维排列的统计规律。不失一般性, 在进行数值模拟时采用如下几点假设:

(1) 所有纤维的截面都为圆形, 并且直径相同(设为单位长度1)。

(2) 在所考察的矩形区域内纤维截面是完整的, 即该区域里包含整数个纤维。

(3) 纤维截面中心的位置(x, y)由伪随机数产生。

(4) x 坐标和 y 坐标均服从均匀分布, 并且 x 和 y 相互独立。

(5) 所有纤维截面不发生重叠。

收修改稿、初稿日期: 1997-10-13, 1997-04-29

(a) 硼纤维增强复合材料层板横切面 (Boron laminate 100×)　　(b) Nicalon 纤维(48%)增强金属基复合材料横切面

(c) 碳纤维/环氧层板横切面 (T800/5245 laminate)　　(d) 碳纤维/环氧层板横切面 (T300/914 laminate)

图1　复合材料横截面上纤维的排列

Fig. 1　The fiber arrangements on the trans-sections of the composites

(6) 用于统计计算纤维体积分比 V_f 的小正方形尺寸由式 $a=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\overline{V}_f}}$ 确定。式中, a 为正方形边长; d 为纤维直径; $\overline{V}_f$ 为复合材料平均纤维体积分比。

对几种不同大小尺寸的矩形区域进行纤维圆形横截面的均匀随机数值模拟投放, 并且对每种投放方案分别用边长为 a 的正方形对投放区域进行划分, 然后统计每个小正方形内的纤维面积比 V_f, 此 V_f 即是一个随机变量。

图2是几种典型的 V_f 的频率分布图, 亦即概率密度 $P(V_f)$, 图例中 V_{fm} 为平均纤维体积分比 $\overline{V}_f$。

1.2　V_f 的统计规律

为了能够更直观地反映 V_f 概率分布的特点, 对图2所列的不同 V_f 下的概率密度进行统一化处理。处理方法为将 $P(V_f)$ 曲线改为 $P(r)$, 其中 $r=V_f/\overline{V}_f$。经这样处理后的概率密度曲线 $P(r)$ 见图3所示。观察图3中的概率密度曲线, 可以看出有以下几个特点:

(1) 曲线关于 $r=1.0$ 基本呈对称分布。

(2) 曲线在 $r=1.0$ 处概率取得最大值。

(3) 随平均纤维体积分比 $\overline{V}_f$(图中的 V_{fm}) 的增加, 概率密度曲线分布的分散性减小。

(4) 随平均纤维体积分比 V_f(图中的 V_{fm}) 的加大, 概率密度曲线的最大值也增大。

(5) 概率密度曲线不呈正态分布。

针对图3中概率密度曲线的分布特点, 提出一种修正的指数分布来进行描述, 即

$$P(V_f) = a \cdot e^{-b|V_f - \bar{V}_f|} \qquad V_f \in [0, 1] \tag{1}$$

其中 a、b 为拟合参数。

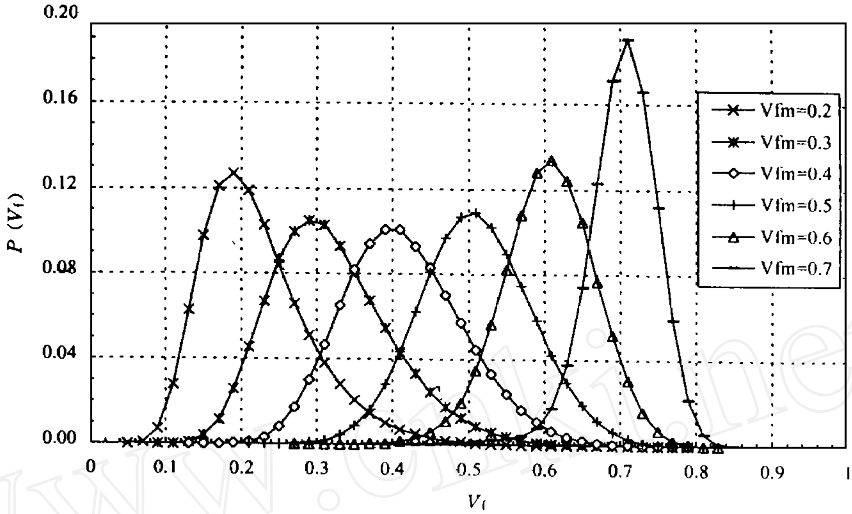

图2 局部 (用以划分的小正方形内) 纤维体积分比分布的概率曲线(区域内纤维数目9950, 统计样本≥1E6)

Fig. 2 The probability curves of local fiber volume fraction based on numerical simulations

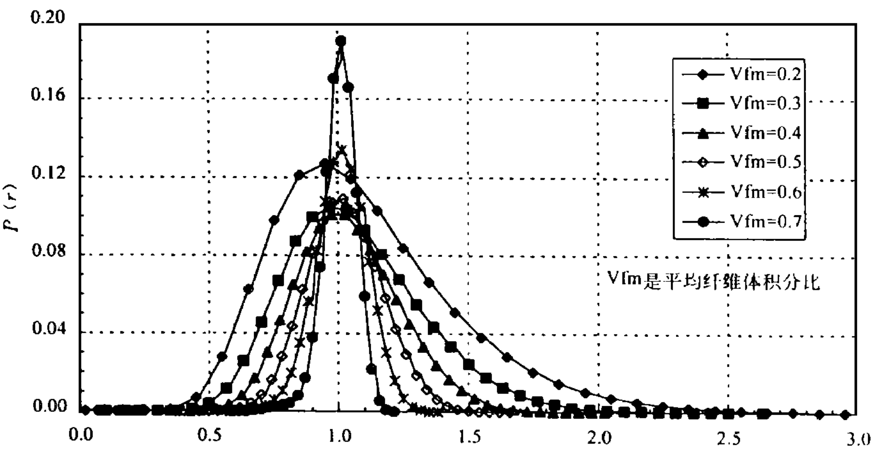

图3 局部纤维体积分比分布的正则化概率曲线(区域内纤维数目9950, 统计样本≥1E6)

Fig. 3 The normalized probability curves of local fiber volume fraction for several mean values

2 弹性常数计算模型

根据统计力学 Gibbs 系统理论, 复合材料单层板的总体弹性模量可由一系列的不同纤维体积分比的 RVE (Representative Volume Element) 单元的弹性模量经加权后得到。亦即由下式计算:

$$M_c = \int M_c(V_f)\,\rho(V_f)\,\mathrm{d}V_f \tag{2}$$

上式左端的 M_c 为单层板总体弹性模量, 右端的 $M_c(V_f)$ 为由纤维体积分比为 V_f 的 RVE 单元采用材料力学或弹性力学等方法计算而来的局部弹性模量, $\rho(V_f)$ 是纤维体积分比为 V_f 的 RVE 单元的概率密度。从 V_f 的定义易知(2)式的积分区间为[0, 1]。

2 1　纵向弹性模量 E_L

关于纵向弹性模量的计算, 在复合材料的微观力学研究中是比较经典且成功的。

$$E_L = E_f\overline{V}_f + E_m V_m = E_m + (E_f - E_m)\overline{V}_f \tag{3}$$

考虑纤维排列的随机性, 应用式(2)可得

$$E_L = \int E_L(V_f)\rho(V_f)\mathrm{d}V_f = \int [E_m + (E_f - E_m)V_f]\rho(V_f)\mathrm{d}V_f = E_m + (E_f - E_m)\overline{V}_f \tag{4}$$

由此可见, 对于纵向弹性模量 E_L, 由于纤维随机排列造成的纤维体积分比的概率分布不会对它产生影响。因此也说明了公式(3)之所以经典, 并且也是复合材料细观力学中最成功的弹性模量计算公式。

2 2　横向弹性模量 E_T 及剪切弹性模量 G_{LT} 和 G_{TN}

与纵向弹性模量不同, 纤维排列方式对横向弹性模量及剪切弹性模量等有较大影响。现有的几种分析模型在计算这些模量时的差异也充分说明了这一点[1]。

并联模型所得模量值过高, 而且分析式(4)可知并联模型不受纤维体积分比 V_f 的随机化的影响, 故在下面的讨论中不再提及。并且由于公式的相似性, 仅讨论横向弹性模量 E_T。

2 2 1　串联模型公式引入 V_f 的随机性

串联公式为

$$E_T = \frac{E_{f2}E_m}{E_m V_f + E_{f2} V_m} \tag{5}$$

考虑纤维排列的随机性, 应用式 (2) 得

$$E_T = \int E_T(V_f)\rho(V_f)\mathrm{d}V_f = \int \frac{E_{f2}E_m}{E_{f2} - (E_{f2} - E_m)V_f}\rho(V_f)\mathrm{d}V_f \tag{6}$$

以上这个积分运算比较复杂(用Mathematics 软件包推得), 应用起来不方便。这里仅给出一些数值结果, 主要目的在于说明考虑纤维随机排列后的一些效果, 对比见图4。

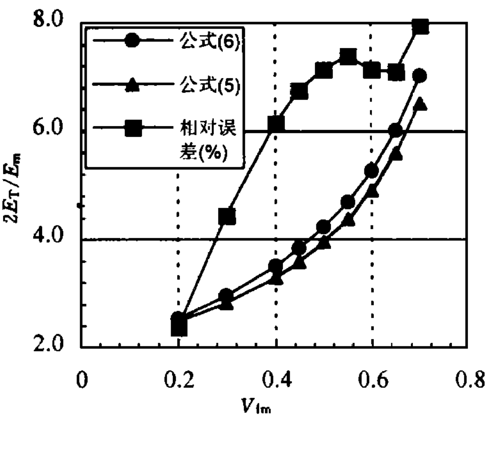

图4　式(6)、(5)计算横向模量结果对比

Fig. 4　The comparison of formula (6) *via* (5)

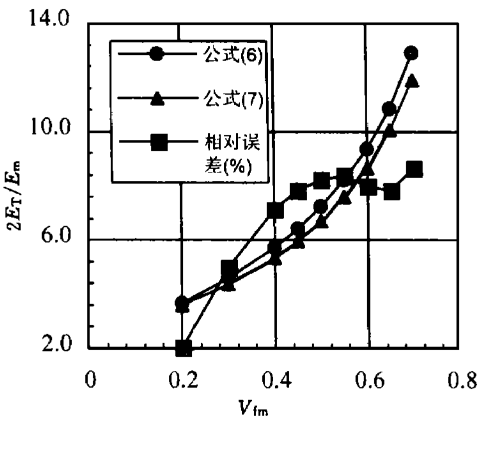

图5　式(6)、(7)计算横向模量结果对比

Fig. 5　The comparison of formula (6) *via* (7)

2 2 2　回字形模型和等应变假设

回字形模型采用等应变假设所导出的公式较好[1], 公式为

$$E_T = E_m = \left\{1 - \sqrt{V_f} + \sqrt{V_f}\left[1 + \sqrt{V_f}\left(\frac{E_{f2}}{E_m} - 1\right)\right]^{-1}\right\}^{-1} \tag{7}$$

根据式(2)并经过类似积分运算后,计算结果与原式的对比见图5。

可以看出,加入随机性后,计算结果改进方向是正确的(串联模型计算值较之实验值小百分之几十),改进幅度随纤维模量和基体模量的比值及$\overline{V}_f$而变。并有一个突出特点就是,考虑纤维排列随机性后,所有模量值都有不同程度的加大,这说明纤维排列存在着较强的聚集性。由于在一般的计算模型中模量值与纤维平均体积分比不成线性关系(并联模型除外),故有此现象。

3 结　　论

复合材料作为一种多相材料组成的结构,其力学性能必然受到组成方式的影响。这也正是微(细)观力学研究复合材料的基本出发点。从本文的简略计算中可以初步看出,在考虑了纤维排列的随机因素之后,不同模型的计算值有一定程度的改善。当然本文的工作仍需进一步深入。可以估计,复合材料力学性能当中,弹性模量对纤维排列的随机性的反应比之强度对此随机性的反应可能会弱一些。由于模量是一种总体平均值,而强度却相关于局部量。并且复合材料强度不仅仅只表现为局部量,还相对地表现出一种较之金属强得多的区域特性。由此可以估计,如果能够恰当地将纤维排列的这种随机性应用到复合材料强度预报方面,可能会取得更好的效果。

参 考 文 献

1 王震鸣, 游绍建. 单向复合材料弹性常数微观力学分析的探讨. 复合材料学报, 1987, 4(4): 72～79

2 Guild F J, Davy P J, Young R J. Mechanical properties of particulate reinfroced composites predicted using finite element analysis and spatial statistical techniques. Six International Conference on Composite Materials ICCM & ECCM, Second European Conference on Composite Materials, Vol 5. 1987

3 孟庆元, 杜善义. 随机双相介质宏观弹性模量的边界元法预报. 复合材料学报, 1990, 7(1): 45～50

4 Everett R K. Quantification of random fiber arrangements using a radial distribution function approach. Journal of Composite Materials, 1996, 30(6): 748～757

5 Bernard Paluch. Analysis of geometric imperfections affecting the fibers in unidirectional composites. Journal of Composite Materials, 1996, 30(4): 454～485

COMPOSITES MODULES CALCULATED BY RANDOM FIBER DISTRIBUTION METHOD

Fan Jianhua　　Yang Qingxiong

(Mail box 120, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract　Fibers are randomly arranged in a continuous fiber reinforced composite, and this affects its mechanical characteristics. This fact was investigated *via* numerical simulation; and some modules were calculated considering the fiber arrangement. Conclusions are drawn from the coarse calculation, and the tentative work shows the importance of considering the effect of fiber arrangement in micro-mechanics of composite.

Key words　numerical simulation, micro-mechanics, fiber random arrangement