

非线性热弹性问题的 Hamilton 半解析法及其在层合板固化降温过程中热应力的分布研究

杨正林

(大连理工大学土建学院, 大连 116024)

陈浩然

(大连理工大学力学系, 大连 116024)

摘 要 推导了考虑材料随温度变化非线性特征的增量形式 Hamilton 半解析有限元法的列式; 给出了层合板非线性热弹性问题的求解过程; 通过算例, 研究了复合材料层合板在固化降温过程非线性热应力分布规律, 并同线性分析结果进行了比较。结果表明, 非线性分析与线性分析结果存在很大差异。

关键词 层板, 热弹性, Hamilton 半解析法, 瞬态热弹性问题, 材料非线性

中图分类号 O 343 6, TB 332

复合材料层合板在固化后期的降温过程中, 由于温度梯度的存在, 常常出现层间破坏现象, 为了分析层间破坏原因, 必须正确求解层间应力, 但目前基于各种假定的板理论还都不能很好地解决这一问题。文献[1~ 3]提出的在板厚度方向无任何假定的 Hamilton 半解析法为此分析提供了理论基础。然而, 由于复合材料层合板在固化降温过程中材料性质存在明显的随温度而变化的非线性特征, 而以往的 Hamilton 半解析法仅限于线性分析。故本文将此方法进一步推广到非线性层间应力分析问题。首先, 推导了非线性热弹性问题的修正型 Hellinger-Reissner 泛函表达式的增量式, 并介绍了相应的增量形式的 Hamilton 半解析方法; 其次, 给出了层合板非线性热弹性问题的求解过程; 最后, 对层合板在固化降温过程层间热应力进行了分析, 通过数值结果分析和讨论, 说明了在固化降温过程中考虑材料性质随温度变化的非线性的重要性。

1 理论分析

1.1 材料非线性问题增量形式修正的 Hellinger-Reissner 泛函表达式

进行瞬态热弹性问题分析时, 必须将整个过程划分成许多时间段, 在每个时间段内所有的物理量均采用增量形式, 为此, 非线性热弹性问题 Hellinger-Reissner 泛函表达式的增量形式为

$$\Delta \Pi_R = \iiint [\Delta \alpha_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_x \Delta T \right) + \Delta \alpha_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \alpha_y \Delta T \right) + \Delta \alpha_z \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \alpha_z \Delta T \right) + \Delta \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \Delta \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \Delta \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha_{xy} \Delta T \right) -$$

收修改稿、初稿日期: 1997-03-23, 1997-01-06

国家自然科学基金资助项目 (19272015) 和辽宁省博士启动基金资助项目 (961077)

$$1/2\{\Delta\sigma\}^T[S]\{\Delta\sigma\} - \Delta f_x\Delta u - \Delta f_y\Delta v - \Delta f_z\Delta w]dV + \iint_{S_A}(\lambda_n - 1)\Delta P_n(\Delta u_n - \Delta \bar{u}_n) +$$

$$(\lambda_s - 1)\Delta P_s(\Delta u_s - \Delta \bar{u}_s) + (\lambda_z - 1)\Delta P_z(\Delta w - \Delta \bar{w}) - \lambda_n\Delta \bar{P}_n\Delta u_n - \lambda_s\Delta \bar{P}_s\Delta u_s - \lambda_z\Delta \bar{P}_z\Delta w]ds \quad (1)$$

式中: α_x 、 α_y 、 α_z 和 α_{xy} 为偏轴热膨胀系数, 在材料非线性分析中它们均为温度的函数; S_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) 为柔度矩阵分量, 非线性分析时 S_{ij} 亦为温度的函数; $S_A = S_{\sigma^+} S_u + S_m$, S_m 为混合边界; 特征系数 λ_n , λ_s 和 λ_z 分别表示板侧面边界法向、切向和厚度方向的边界约束特征, 如图1所示, 如 n 方向为应力边界条件, 则令 $\lambda_n = 1$, 否则 $\lambda_n = 0$, 对于 λ_s 和 λ_z 的定义与此类似。 ΔP_i ($i = n, s, z$) 和 Δu_i ($i = n, s$) 在边界上的值为侧面边界上:

$$\begin{aligned} \Delta P_n &= n_x^2\Delta\sigma_x + n_y^2\Delta\sigma_y + 2n_xn_y\Delta\tau_{xy} \\ \Delta P_s &= n_xn_y(\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_x) + (n_x^2 - n_y^2)\Delta\tau_{xy} \\ \Delta P_z &= n_x\Delta\tau_{xz} + n_y\Delta\tau_{yz} \\ \Delta u_n &= n_x\Delta u + n_y\Delta v \\ \Delta u_s &= n_x\Delta v - n_y\Delta u \end{aligned} \quad (2)$$

上、下表面上(可令 n, s 分别与 x, y 轴平行):

$$\begin{aligned} \Delta P_n &= \Delta P_x = n_z\Delta\tau_{xz} & \Delta P_s &= \Delta P_y = n_z\Delta\tau_{yz} \\ \Delta P_z &= n_z\Delta\sigma_z & \Delta u_n &= \Delta u & \Delta u_s &= \Delta v \end{aligned} \quad (3)$$

上面二式中, n_x 、 n_y 和 n_z 分别代表边界法线矢量的三个方向余弦分量。经过简单的推导, 可以证明, 由(1)式可以导出非线性热弹性问题增量形式的所有控制方程和各种边界条件。

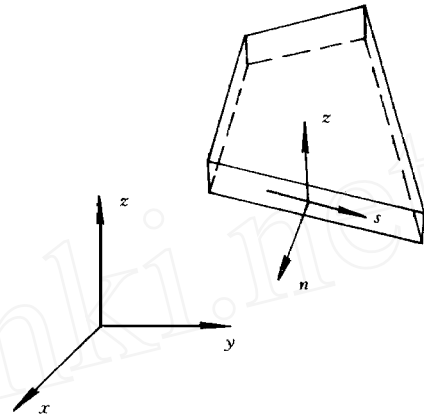


图1 异形边界示意图

Fig 1 Expression of irregular boundary shape

以 z 为展开方向, 为从(1)式中消去应力分量 $\Delta\sigma_x$ 、 $\Delta\sigma_y$ 和 $\Delta\tau_{xy}$, 对(1)式取变分 $\frac{\delta\Delta\Pi_R}{\delta\Delta\sigma} = 0$, $\frac{\delta\Delta\Pi_R}{\delta\Delta\sigma_y} = 0$ 及 $\frac{\delta\Delta\Pi_R}{\delta\Delta\tau_{xy}} = 0$, 经整理得到

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = [C]_{3 \times 3} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - s_{13}\Delta\sigma_z \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - s_{23}\Delta\sigma_z \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - s_{36}\Delta\sigma_z \end{aligned} \right\} - \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (4)$$

式中:

$$[C]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [C]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5, 6)$$

将(4)式代回(1)式, 即可得到层合板非线性热弹性问题修正的 Hellinger-Reissner 泛函表达式的增量形式

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_R^* &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Gamma_{k-1}}^{\Gamma_k} \iint_{S_k} \{\Delta p\}^T \{\Delta q\} - \Delta H_{(\Delta p, \Delta q)}] dx dy + [(\lambda_n - 1)\Delta P_n(\Delta u_n - \Delta \bar{u}_n) + \right. \\ &\quad \left. (\lambda_s - 1)\Delta P_s(\Delta u_s - \Delta \bar{u}_s) + (\lambda_z - 1)\Delta P_z(\Delta w - \Delta \bar{w}) - \lambda_n\Delta \bar{P}_n\Delta u_n - \lambda_s\Delta \bar{P}_s\Delta u_s - \lambda_z\Delta \bar{P}_z\Delta w] ds \right) dz \quad (7) \end{aligned}$$

式中: 下标 k 表示层合板第 k 子层, $\{\Delta p\}^T = \{\Delta \tau_{xz} \Delta \tau_{yz} \Delta \sigma_z\}$, $\{\Delta q\}^T = \{\Delta u \Delta v \Delta w\}$, $\{\Delta q^\circ\}^T = \{\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}\}$, ΔH 为非线性 Hamilton 函数的增量形式

$$\begin{aligned} \Delta H = & -\frac{1}{2} C_{11} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} C_{22} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} C_{66} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 - C_{12} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - \\ & C_{16} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right) - C_{26} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right) - \Delta \tau_{yz} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \Delta \tau_{xz} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \sigma_z [D_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \\ & D_3 \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right) + D_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial y}] + \frac{1}{2} S_{33} \Delta \sigma_z^2 + \frac{1}{2} S_{44} \Delta \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2} S_{55} \Delta \tau_{xz}^2 + S_{45} \Delta \tau_{xz} \Delta \tau_{yz} + \Delta f_x \Delta u + \\ & \Delta f_y \Delta v + \Delta f_z \Delta w - C_\alpha \Delta T^2 + [(T_x \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial \Delta v}{\partial y}) + (T_{xy} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + T_y \frac{\partial \Delta v}{\partial y}) - \bar{\alpha} \Delta \sigma_z] \Delta T \quad (8) \end{aligned}$$

式中:

$$\{D_1 \ D_2 \ D_3\}^T = [C]_{3 \times 3} \{S_{13} \ S_{23} \ S_{36}\}^T \quad (9)$$

$$\bar{S}_{33} = S_{33} - \{S_{13} \ S_{23} \ S_{36}\} [C]_{3 \times 3} \{S_{13} \ S_{23} \ S_{36}\}^T \quad (10)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha - S_{13} T_x - S_{23} T_y - S_{36} T_{xy} \quad (11)$$

$$C_\alpha = 1/2 (\alpha_x T_x + \alpha_y T_y + \alpha_{xy} T_{xy}) \quad (12)$$

在非线形分析时, (9) 式到 (12) 式中各项均为温度的函数。

1.2 增量形式的混合状态方程

在每个时间步内, 本文方法的求解过程为: 先在板平面内进行有限元离散, 以建立增量形式的混合状态方程; 然后沿板厚度方向精确积分, 对混合状态方程进行求解。对于层合板任一子层 k , 参考公式 (7), 在板平面内的泛函表达式可表示为

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_k = & \iint_{S_k} \{\Delta p\}^T \{\Delta q^\circ\} - \Delta H \, dx \, dy + [(\lambda_n - 1) \Delta P_n (\Delta u_n - \Delta \bar{u}_n) + (\lambda_s - 1) \Delta P_s \\ & (\Delta u_s - \Delta \bar{u}_s) + (\lambda_z - 1) \Delta P_z (\Delta u_w - \Delta \bar{w}) - \lambda_n \Delta \bar{P}_n \Delta u_n - \lambda_s \Delta \bar{P}_s \Delta u_s - \lambda_z \Delta \bar{P}_z \Delta w] ds \quad (13) \end{aligned}$$

在 xy 面内采用八结点等参数单元进行离散

$$\begin{aligned} \Delta u = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta u_i, \quad \Delta v = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta v_i, \quad \Delta w = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta w_i \\ \Delta \tau_{xx} = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta \tau_{xi}, \quad \Delta \tau_{yz} = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta \tau_{zi}, \quad \Delta \sigma_z = \sum_{i=1}^8 N_i \Delta \sigma_{zi} \end{aligned}$$

式中, N_i 为插值函数。令 $\{\Delta p^e\} = \{\Delta \tau_{zx1} \Delta \tau_{yz1} \Delta \sigma_{z1} \dots \Delta \tau_{zx8} \Delta \tau_{yz8} \Delta \sigma_{z8}\}^T$, $\{\Delta q^e\} = \{\Delta u_1 \Delta v_1 \Delta w_1 \dots \Delta u_8 \Delta v_8 \Delta w_8\}^T$, 经过推导^[3], 可得第 k 层第 e 单元混合状态方程的增量形式为

$$[C]^e \frac{\partial}{\partial} \begin{Bmatrix} \Delta q^e \\ \Delta p^e \end{Bmatrix} = [K]^e \begin{Bmatrix} \Delta q^e \\ \Delta p^e \end{Bmatrix} + \{\Delta f\}^e \quad (14)$$

式中, 上标 e 代表第 e 单元。经单元组装, 可得第 k 层增量形式的混合状态方程为

$$[C]_k \frac{\partial}{\partial} \begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \end{Bmatrix}_k = [K]_k \begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \end{Bmatrix}_k + \{\Delta f\}_k \quad (15)$$

式中, 下标 k 表示第 k 子层。

对于层合板的每一子层, 均可按上述类似的方法进行离散和单元组装, 得到每一子层增量形式的混合状态方程。

1.3 沿板厚度方向的解析解

混合状态方程 (15) 是状态向量的一阶常微分方程, 为便于求解, 令 $\{\Delta \delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \end{Bmatrix}$, 将其改写为

$$\frac{d}{dz} \{\Delta\delta(z)\}_k = [A]_k \{\Delta\delta(z)\}_k + \{\Delta F(z)\}_k \quad (16)$$

式中: $[A]_k = [C]_k^{-1} [K]_k$, $\{\Delta F(z)\}_k = [C]_k^{-1} \{\Delta f\}_k$ 。方程(16)的解析解为

$$\{\Delta\delta(z)\}_k = [T]_k \{\Delta\delta(0)\}_k + \{\Delta\tilde{F}\}_k \quad (17)$$

式中: $[T]_k = \exp([A]_k \cdot z)$; $\{\Delta\tilde{F}\}_k = \int_0^z \exp([A]_k(z-\tau)) \cdot \{\Delta F(\tau)\}_k d\tau$ 。假定层合板共有 N 层, 考虑层间连续条件

$$\{\Delta\delta(h_k)\}_k = \{\Delta\delta(0)\}_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

式中, h_k 为第 k 子层的厚度。由(17)、(18)两式可推导出层合板上、下表面状态变量 $\{\Delta\delta\}$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} \{\Delta\delta(h_N)\}_N &= \left(\prod_{k=1}^N [T]_k \right) \{\Delta\delta(0)\}_1 + \left(\prod_{k=1}^N [T]_k \right) \{\Delta\tilde{F}(h_1)\}_1 + \left(\prod_{k=1}^N [T]_k \right) \{\Delta\tilde{F}(h_2)\}_2 + \dots + \\ &\quad \left(\prod_{k=N-1}^N [T]_k \right) \{\Delta\tilde{F}(h_{N-2})\}_{N-2} + [T]_N \{\Delta\tilde{F}(h_{N-1})\}_{N-1} + \{\Delta\tilde{F}(h_N)\}_N \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{式中,} \quad \prod_{k=1}^N [T]_k = [T]_N [T]_{N-1} \dots [T]_k [T]_{k-1} \dots [T]_2 [T]_1 \quad (20)$$

(19)式可用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \Delta q(h_N) \\ \Delta p(h_N) \end{Bmatrix}_N = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta q(0) \\ \Delta p(0) \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} \Delta F_q \\ \Delta F_p \end{Bmatrix} \quad (21)$$

通过上式可求出该时间步下层合板上、下表面未知量应力和位移的增量值, 再利用公式(18)、(17)及公式(4), 即可求得该时间步下, 层合板任意位置处的所有应力和位移分量的增量。

1.4 材料非线性情况下层合板瞬态热弹性问题分析

在材料非线性情况下, 层合板的热膨胀系数和弹性常数均是温度的函数。因此, 用 Hamilton 半解析法求解层合板在瞬态温度作用下的热应力时, 所建立的混合状态方程是一组非线性方程, 它们也是温度的函数。目前求解非线性方程组一般都采用分段线性化的方法。本文中假定当时间步长取得足够小时, 每个时间步内热膨胀系数和弹性常数保持为常数, 即该时间步的初值, 而在不同时间步它们可取不同的值。例如复合材料层合板的热膨胀系数和柔度常数随温度的变化可用函数表示为

$$\alpha = \alpha(T) \quad i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

$$s_{ij} = s_{ij}(T) \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (23)$$

采用文献[4]的分析方法和程序对温度场进行分析, 当第 $k+1$ 时间步下的温度求出之后, 即可通过上述二式求出该时间步下的热膨胀系数和柔度常数, 然后进行该时间步内增量热应力分析。若用 $\{\delta\}_k$ 表示前 k 步状态变量的值, 则前 $k+1$ 步其值变为

$$\{\delta\}_{k+1} = \{\delta\}_k + \{\Delta\delta\}_{k+1} \quad (24)$$

式中, $\{\delta\}_{k+1}$ 表示状态变量在第 $k+1$ 时间步的增量。只要步长选得合理, 通过步进分析和线性迭加, 即可得到非线性热弹性问题的解答。

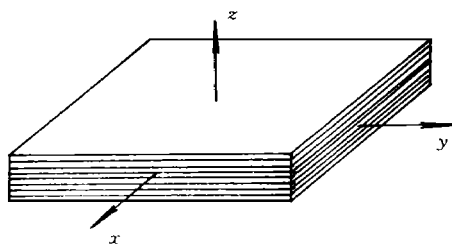


图2 矩形层合板示意图

Fig 2 Expression of rectangular laminates

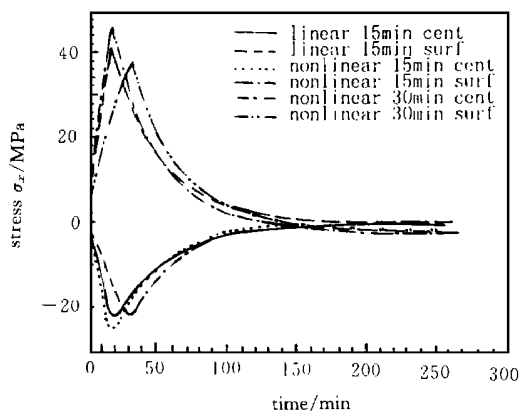
图3 层合板表层和心层 σ_x 的数值结果

Fig 3 The numerical result of σ_x in the surface and the center layers of the laminae

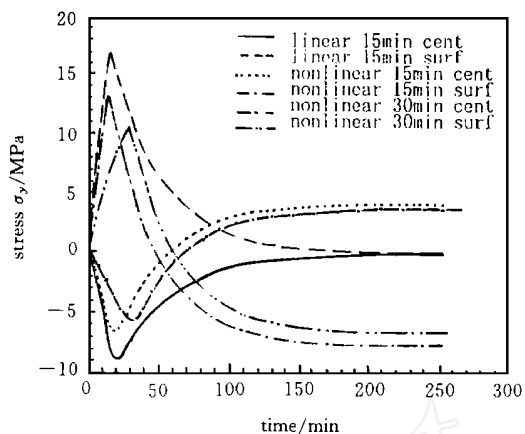
图4 层合板表层和心层 σ_y 的数值结果

Fig 4 The numerical result of σ_y in the surface and the center layers of the laminae

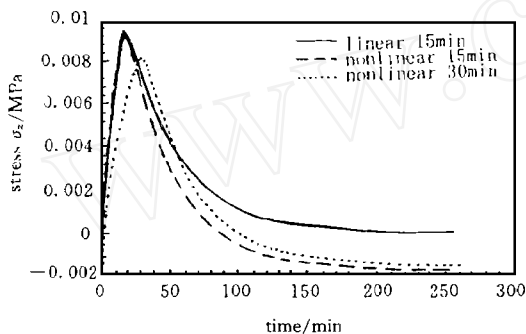
图5 层合板心层 σ_z 的数值结果

Fig 5 The numerical result of σ_z in the center layer of the laminae

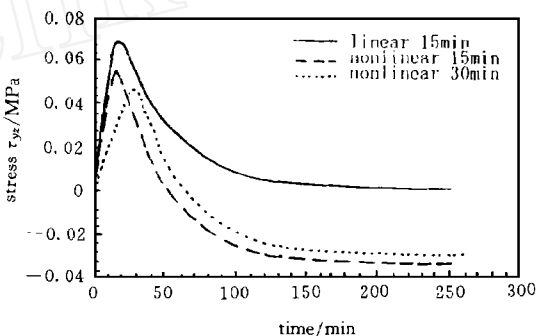
图6 层合板心层 τ_{yz} 的数值结果

Fig 6 The numerical result of τ_{yz} in the center layer of the laminae

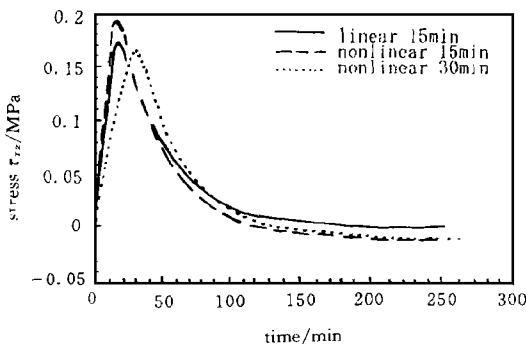
图7 层合板心层 τ_{xz} 的数值结果

Fig 7 The numerical result of τ_{xz} in the center layer of the laminae

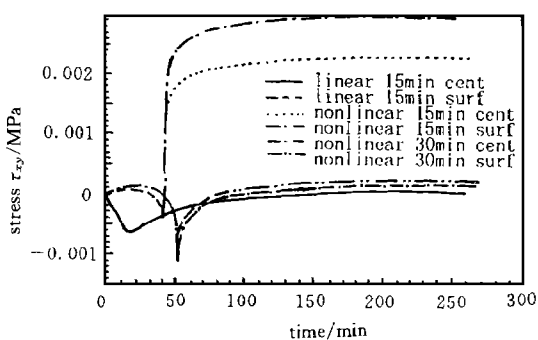
图8 层合板表层和心层 τ_{xy} 的数值结果

Fig 8 The numerical result of τ_{xy} in the surface and the center layers of the laminae

2 数值算例及讨论

如图2所示层合板, 其几何尺寸为 $100\text{cm} \times 100\text{cm} \times 1\text{cm}$, 密度为 $2.007\text{g}/\text{cm}^3$, 组成复合材料单层板的热物理性质为: 热传导系数 $\lambda_1 = 2.4\text{W}/\text{m}^2\text{K}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.62 - 0.0005(T_g - T)\text{W}/\text{m}^2\text{K}$, 比热容 $c_p = 1100 - 3.07(T_g - T)\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$; 力学性质为: $E_1 = 206.08 + 0.0111377(T_g - T)\text{GPa}$, $E_2 = E_3 = 7.75 + 0.06725(T_g - T)\text{GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 1.78 + 0.02102(T_g - T)\text{GPa}$, $G_{23} = 2.76786 + 0.02402(T_g - T)\text{GPa}$, 泊松比 $\mu_{12} = \mu_{13} = 0.2$, $\mu_{23} = 0.4$, 热膨胀系数为 $\alpha_1 = 2.85 - 0.00389(T_g - T)10^{-6}/^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 19.8 - 0.575(T_g - T)10^{-6}/^\circ\text{C}$, 铺设角为 0° ; 当其表面温度在 15min 和 30min 两个时间段内分别从固化温度 $T_g = 177^\circ\text{C}$, 降至室温 $T_R = 24^\circ\text{C}$, 直到其各子层温度均达到 T_R 的过程中, 本文中对其线性和非线性热应力进行了计算, 相应温度场分析参见文献[4], 其在层合板中心($x = 0, y = 0$)处的应力结果如图3~图8所示。为便于比较, 本文还将 15min 降温过程中的线性结果也标在图中, 图中 surf 表示表层, cent 表示心层。由图可知, 层合板在出现热应力峰值时线性结果和非线性结果会出现较大差异, 显然线性结果是保守的; 同时还发现, 降温时间越短, 即降温速率越大, 应力峰值就越大, 因此, 本文中的分析对正确选取降温时间有参考价值。

参 考 文 献

- 1 唐立民 弹性力学的混合方程和Hamilton 正则方程 计算结构力学及其应用, 1992 9(4): 347~ 360
- 2 Yang Zhenglin, Chen Haoran Fine integration solving method on the thermo-elastic problem of composite laminates In: Proceeding of ICAM '96 Beijing, China: Peking University Press, 1996 605~ 610
- 3 杨正林 复合材料固化过程的数值模拟与Hamilton 半解析法的研究: [博士学位论文] 大连: 大连理工大学, 1996
- 4 杨正林, 陈浩然 层合板在固化全过程中瞬态温度场和固化度的有限元分析 玻璃钢/复合材料, 1997 (3): 3~ 7

HAMILTON SEMI-ANALYTICAL METHOD FOR NONLINEAR THERMO-ELASTIC PROBLEM AND INVESTIGATION OF RESIDUAL THERMO-STRESS DISTRIBUTION OF COMPOSITE LAMINATES DURING THE COOLING-DOWN STAGE OF CURE PROCESS

Yang Zhenglin Chen Haoran
(Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract In this paper, the incremental formulation of Hamilton Semi-analytical Method and corresponding computational process for transient nonlinear thermo-elastic problem are given. The numerical results on thermo-stresses and deformation are obtained for the composite laminates during the cooling-down stage of cure process. The results indicate that the nonlinear effect of the temperature-dependent mechanical properties is important on residual thermo-stress of composite laminates for the cure analysis.

Key words laminates, thermal elasticity, Hamilton semi-analytical method, transient thermo-elastic problem, nonlinearity