

非均匀复合材料中反平面裂纹的动态断裂力学研究

王保林 杜善义 韩杰才

(哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要 对于非均匀复合材料中多个裂纹的动态断裂力学问题, 提出了一种分析方法, 假设复合材料为正交各向异性并含有多个垂直于厚度方向的裂纹, 材料参数沿厚度方向为变化的, 沿该方向将复合材料划分为许多单层, 假设单层材料参数为常数, 应用柔度矩阵/刚度矩阵方法及 Fourier 变换法, 在 Laplace 域内推导出了控制问题的奇异积分方程组, 并用虚位移原理求解, 给出了应力强度因子及能量释放率的表达式, 然后利用 Laplace 数值反演, 得出了裂纹尖端的动态应力强度因子和能量释放率。作为算例, 研究了带有两个裂纹的功能梯度结构, 分析了材料参数的优化对降低应力强度因子的意义。

关键词 非均匀复合材料, 反平面裂纹, 动态断裂力学, 应力强度因子, 能量释放率

中图分类号 O 346.1, TB 33

非均匀材料的物理参数沿某一坐标方向(通常为厚度方向)为变化的, 其变化方式可以是不连续的(比如复合材料层合板、薄膜-基底结构等层状介质), 也可以是连续的(比如功能梯度材料), 这类材料在工程实际中有着广泛的应用, 对其进行断裂力学研究, 特别是多裂纹的动态断裂力学研究, 具有十分重要的意义。

对于材料参数沿某一坐标方向是连续变化的情况, 比如功能梯度材料, 在进行断裂力学研究时, 通常是把它们假设为该坐标方向的指数函数, 由此得出的控制方程仍为常系数, 可以用 Fourier 变换法化为奇异积分方程, 比如 Erdogan 等人的一系列工作^[1~6]。实际分析时, 还可以把材料参数假设为坐标的幂函数, 这方面的工作有 Hata 对半无限体的热应力分析^[7]及 Sih 等人对含裂纹弹性介质在机械载荷作用下的断裂力学研究^[8]。层状介质的材料参数沿厚度方向的变化是不连续的, 虽然每一单层是均匀的, 但是各单层的材料参数可以互不相同, 对这类材料的断裂力学研究, 一般只限于较少层数^[8,9]或结构非常特殊^[10]的情况, 对于层数比较多的情形, 当裂纹尺寸与单层厚度相比很小时, 可以将开裂层以外的各层用等效的单层代替, Ashbaugh 采用这种方法研究了等效三层板中的 I 型裂纹问题^[11]。同样, Hilton 及 Sih 采用这种简化模型研究了多层材料中的裂纹问题, 分析了裂纹位置对应力分布的影响^[12]。

对于层状介质中的裂纹尺寸与单层厚度相比不是很小, 或者材料参数虽然是连续变化, 但不是按指数函数或幂函数规律变化的情况, 目前都缺乏有效的分析方法, 尤其是对多个裂纹的动态断裂力学分析, 即使是对于最简单的 III 型裂纹问题也未见报道。本文中, 我们将非均匀材料沿厚度方向划分为许多单层, 假设每一单层材料参数为常数, 利用 Laplace 变换及 Fourier 变换求解各单层的运动方程, 再利用刚度矩阵方法表达界面应力与界面位错密度函数的关系,

收修改稿、初稿日期: 1997-05-26, 1997-03-16。国防科研基金资助项目

推导出了控制问题的奇异积分方程组,并用虚位移原理求解,得出了裂纹尖端的动态应力强度因子和能量释放率,最后通过一个功能梯度结构的数值算例,研究了材料非均匀性参数的变化对应力强度因子的影响。

1 问题的描述、基本方程及其求解

图1所示的非均匀复合材料,水平方向尺寸为无限大, (x, y, z) 为总体坐标系,材料参数沿厚度方向(y 方向)为变化的,将该复合材料沿厚度方向划分为 N 个单层(对于层状介质,还可以将各单层进一步细划),各单层的材料参数为常数并取其形心处的值,弹性主轴平行于 x 轴和 y 轴, xz 平面的剪切模量为 $(G_x)_J$, yz 平面的剪切模量为 $(G_y)_J$, 密度为 ρ_J , 各层的厚度为 h_J , 总厚度为 h (本文中,以下标 J 代表层号: $1, 2, \dots, N$; 以下标 j 代表第 $J+1$ 层和第 J 层之间的界面号),对每一单层建立局部坐标 y_J , 其原点位于该单层的底面,局部坐标与总体坐标的关系为

$$y_J = y - \sum_{l=1}^{J-1} h_l \quad (1)$$

记相邻两单层的界面剪应力 $(\tau_{yz})_j$ 为 $\tau_j(x, t)$, 假设相邻两单层为理想粘接或有一贯穿 z 向的界面裂纹,其长度为 $2a_j$, 中心位于 $x = c_j$ 处, N 个单层一共 $N-1$ 个界面,最多可以有 $N-1$ 个裂纹。问题的初始条件为位移和速度等于零,边界条件为

(1) 裂纹面上、下表面作用反平面剪应力(要求其满足 Laplace 变换的条件)

$$\tau_j(x, t) = \tau_{0j}(x, t) \quad (c_j - a_j) < x < (c_j + a_j) \quad (2)$$

(2) 裂纹面以外各边界剪应力为零, (3) 无穷远处所有应力和位移都为零。

由于仅考虑反平面剪切变形,各单层的位移场和应力场为

$$(U_z)_J = W_J(x, y_J, t) \quad (3a)$$

$$(\tau_{xz})_J = (G_x)_J \partial W_J / \partial x, \quad (\tau_{yz})_J = (G_y)_J \partial W_J / \partial y \quad (3b)$$

小变形情况下各单层的运动方程为

$$(G_x)_J \frac{\partial^2 W_J}{\partial x^2} + (G_y)_J \frac{\partial^2 W_J}{\partial y_J^2} = \rho_J \frac{\partial^2 W_J}{\partial t^2} \quad (4)$$

定义无量纲参数: $\bar{x} = x/h$, $\bar{y}_J = y_J/h$, $\bar{h}_J = h_J/h$, $\bar{a}_j = a_j/h$, $\bar{c}_j = c_j/h$, $\bar{G} = (G_x)_J/(G_y)_J$ 以及波速 $(C_y)_J = \sqrt{(G_y)_J/\rho_J}$ 。对时间 t 作 Laplace 变换, 再对 x 作 Fourier 变换, 可得 Laplace 域内运动方程的解为

$$W_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_J(s, p) e^{-s_J \bar{y}_J} + B_J(s, p) e^{s_J \bar{y}_J}] e^{-s \bar{x}} ds \quad (5)$$

其中

$$s_J = \sqrt{\bar{G} s^2 + [p h / (C_y)_J]^2} \quad (6)$$

在本文中, 上标 * 代表相应变量的 Laplace 变换, p 为时间 t 的变换变量, $A(s, p)$ 、 $B(s, p)$ 为待求未知参数, 利用本构方程 (3b) 可求得各单层剪应力 $(\tau_{yz})_j$ 在该层底面 ($\bar{y}_J = 0$) 的值 $\tau_{j-1}^*(\bar{x}, p)$ 和顶面 ($\bar{y}_J = \bar{h}_J$) 的值 $\tau_j^*(\bar{x}, p)$, 再利用 Fourier 变换可解出由 τ_{j-1}^* 和 τ_j^* 表示的 $A_J(s, p)$ 和 $B_J(s, p)$, 将其代入 (5) 求得第 J 个单层位于 $(x, y_J) = (r, y_J)$ 处的位移为

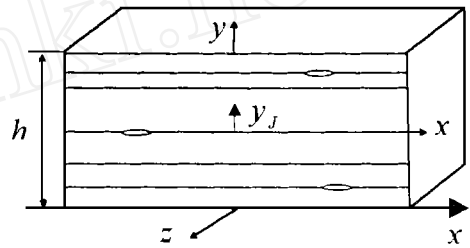


图1 非均匀复合材料的几何形状及坐标系

Fig. 1 Geometry and coordinates of non-homogeneous composite plate

$$W_J^*(\bar{r}, \bar{y}_J, p) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\bar{r}} ds \int_{-\infty}^{+\infty} R_J(s, p) [(e^{-S_J \bar{y}_J} + e^{S_J \bar{y}_J}) \tau_J^*(\bar{x}, p) - (e^{-S_J (\bar{h}_J - \bar{y}_J)} + e^{S_J (\bar{h}_J - \bar{y}_J)}) \tau_{J-1}^*(\bar{x}, p)] e^{-is\bar{x}} d\bar{x} \quad (7)$$

其中, $\bar{r} = r/h$, $R_J(s, p)$ 的表达式见附录 A。

2 奇异积分方程(组)的推导

为了推导积分方程, 引入位错密度函数 $\phi(\bar{x}, t)$ 定义为第 $J+1$ 个单层和第 J 个单层之间的界面位移差对 x 的偏微分, 即

$$\phi(\bar{x}, p) = \frac{\partial W_{J+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{J+1} = 0, p)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial W_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J = \bar{h}_J, p)}{\partial \bar{x}} \quad (8)$$

按照位移的单值性, $\phi(\bar{x}, p)$ 应该满足下列要求:

(1) 如果两单层之间有一界面裂纹, 则

$$\phi(\bar{x}, p) = 0 \quad \bar{x} > \bar{c}_j + \bar{a}_j \text{ 或 } \bar{x} < \bar{c}_j - \bar{a}_j \quad (9)$$

$$\int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \phi(\bar{x}, p) d\bar{x} = 0 \quad (10)$$

(2) 如果两单层之间为理想粘接, 则

$$\phi(\bar{x}, p) = 0 \quad -\infty < \bar{x} < +\infty \quad (11)$$

根据 $\phi(\bar{x}, p)$ 的定义式(8)以及 $W_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p)$ 的表达式(7)可得

$$\phi(\bar{r}, p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\bar{r}} ds \int_{-\infty}^{+\infty} [L_J \tau_{J-1}^*(\bar{x}, p) + M_J \tau_J^*(\bar{x}, p) + N_J \tau_{J+1}^*(\bar{x}, p)] e^{is\bar{x}} d\bar{x} \quad (12)$$

其中 $L_J(s, p)$ 、 $M_J(s, p)$ 及 $N_J(s, p)$ 的表达式见附录 B。

定义下列向量:

$$\{T^*(\bar{x}, p)\} = [\tau_1^*(\bar{x}, p), \dots, \tau_J^*(\bar{x}, p), \dots, \tau_{N-1}^*(\bar{x}, p)]^T \quad (13a)$$

$$\{\Phi^*(s, p)\} = \left[\int_{\bar{c}_1 - \bar{a}_1}^{\bar{c}_1 + \bar{a}_1} \phi(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r}, \dots, \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \phi(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r}, \dots, \int_{\bar{c}_{N-1} - \bar{a}_{N-1}}^{\bar{c}_{N-1} + \bar{a}_{N-1}} \phi(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r} \right]^T \quad (13b)$$

对(12)式进行 Fourier 逆变换, 可以写成下列矩阵形式:

$$[D(s, p)] \int_{-\infty}^{+\infty} \{T^*(\bar{x}, p)\} e^{is\bar{x}} d\bar{x} = \frac{1}{i} \{\Phi^*(s, p)\} \quad (14)$$

其中 $[D(s, p)]$ 为与 $L_J(s, p)$ 、 $M_J(s, p)$ 及 $N_J(s, p)$ 有关的三对角矩阵, 其表达式见附录 C。

由上式可见, 各界面的广义位移向量 $\{\Phi^*(s, p)\}$ 通过 $[D(s, p)]$ 与界面应力向量 $\{T^*(\bar{x}, p)\}$ 相联系, 因此 $[D(s, p)]$ 可以定义为柔度矩阵, 相应地, $[D(s, p)]$ 的逆矩阵 $[K(s, p)]$ 可以定义为刚度矩阵。对(14)式进行 Fourier 逆变换得

$$\tau_j^*(\bar{x}, p) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \phi(\bar{r}, p) d\bar{r} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{jk}(s, p) e^{is(\bar{r} - \bar{x})} ds \quad (15)$$

其中, $K_{jk}(s, p)$ 为 $[K(s, p)]$ 中第 j 行第 k 列元素。为了分离出积分方程(15)中的核 $\int_{-\infty}^{+\infty} K_{jk}(s, p) e^{is(\bar{r} - \bar{x})} ds$ 的奇异项, 需要研究 $K_{jk}(s, p)$ 在 $s \rightarrow \pm \infty$ 时的渐近行为^[1~6]。为此, 记 $K_{jk}(\infty, p)$ 为 $K_{jk}(s, p)$ 在 $s \rightarrow \pm \infty$ 时的渐近值, 同时定义 $K'_{jk}(s, p) = K_{jk}(s, p) - K_{jk}(\infty, p)$, 由附录 C 可知, $K_{jk}(\infty, p)$ 为

$$k_{jk}(\infty, p) = \lim_{s \rightarrow \pm \infty} K_{jk}(s, p) = \frac{\text{sgn}(s)}{2} G_j \delta_{jk} \quad (16)$$

$$\text{式中, } G_j = 2 / \left[1 / \sqrt{(G_x)_j (G_y)_j} + 1 / \sqrt{(G_x)_{j+1} (G_y)_{j+1}} \right]$$

根据附录 C 中 $[D(s, p)]$ 的表达式可知其中各元素均为 s 的奇函数, 因此 $K_{jk}(s, p)$ 及 $K'_{jk}(s, p)$ 也是 s 的奇函数, 此外, 利用下面积分公式^[14]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sgn}(s)}{2} e^{is(\bar{r}-\bar{x})} ds = \frac{i}{\bar{r}-\bar{x}} \quad (17)$$

可进一步将(15)简化成

$$\tau_j^*(\bar{x}, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \phi(\bar{r}, p) d\bar{r} \int_{-\infty}^{+\infty} K'_{jk}(s, p) \sin s(\bar{r}-\bar{x}) ds + \frac{G_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi(\bar{r}, p)}{(\bar{r}-\bar{x})} d\bar{r} \quad (18)$$

为了便于分析, 定义下列参数:

$$\bar{r}_j = (\bar{r} - \bar{r}_j) / \bar{a}_j, \quad \bar{x}_j = (\bar{x} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j, \quad \varphi_j(\bar{r}_j, p) = \phi(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) \quad (19)$$

$$h_{jk}(\bar{r}_k, \bar{x}_j, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K'_{jk}(s, p) \sin s[\bar{a}_k \bar{r}_k + \bar{c}_k - (\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j)] ds \quad (20)$$

则式(18)可以写成

$$\tau_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{jk}(\bar{r}_k, \bar{x}_j, p) \varphi_j(\bar{r}_j, p) d\bar{r}_k + \frac{G_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_j(\bar{r}_j, p)}{\bar{r}_j - \bar{x}_j} d\bar{r}_j \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (21)$$

3 奇异积分方程组的解

方程(21)对裂纹内部 ($|\bar{x}_j| < 1$) 以及裂纹外部 ($|\bar{x}_j| > 1$) 均成立, 对于裂纹面内部的情形, 上述方程成为具有简单柯西类型核 $1/(\bar{r}_j - \bar{x}_j)$ 的奇异积分方程组, 因此, 裂纹尖端应力具有标准的平方根奇异性, 按照积分方程的理论, $\varphi_j(\bar{r}_j, p)$ 具有下列形式的解^[13]

$$\varphi_j(\bar{r}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}^*(p) \cos(m \arccos \bar{x}_j) / \sqrt{1 - \bar{r}_j^2} \quad |\bar{r}_j| < 1 \quad (22)$$

$C_{jm}^*(p)$ 为待求未知常数, 实际求解时, 只需截取级数的前 M 项, 显然, $\phi(\bar{r}_j, p)$ 的上述表达式使得条件(10)自动满足, 将上式代入(21), 同时利用下列积分公式^[14]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_m(\bar{r}_j)}{(\bar{r}_j - \bar{x}_j) \sqrt{1 - \bar{r}_j^2}} d\bar{r}_j = \begin{cases} U_{m-1}(\bar{x}_j) & m \geq 1 \quad |\bar{x}_j| < 1 \\ -\frac{\text{sgn}(\bar{x}_j)}{\sqrt{\bar{x}_j^2 - 1}} \left[\bar{x}_j - \text{sgn}(\bar{x}_j) \sqrt{\bar{x}_j^2 - 1} \right]^m & m \geq 0 \quad |\bar{x}_j| > 1 \\ 0 & m = 0 \quad |\bar{x}_j| < 1 \end{cases} \quad (23)$$

得

$$\tau_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M C_{km}^*(p) V_j^{km}(\bar{x}_j) + \frac{G_j}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^*(p) U_{m-1}(\bar{x}_j) \quad |\bar{x}_j| < 1 \quad (24)$$

其中, $U_{m-1}(\bar{x}_j)$ 为第二类切比雪夫多项式, 而 $V_j^{km}(\bar{x}_j)$ 为

$$V_j^{km}(\bar{x}_j) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_{jk}(\bar{r}_k, \bar{x}_j, p) T_m(\bar{r}_k)}{\sqrt{1 - \bar{r}_k^2}} d\bar{r}_k \quad (25)$$

由(8)、(9)可知, 裂纹上、下表面相对位移 $w_j^*(\bar{x}, p)$ 为

$$w_j^*(\bar{x}, p) = -a_j \sum_{m=1}^M C_{jm}^*(p) \frac{\sin(m \arccos \bar{x}_j)}{m} \quad |\bar{x}_j| < 1 \quad (26)$$

裂纹面应力边界条件(2)要求 $\tau_j^*(\bar{x}, p) = \tau_{0j}^*(\bar{x}, p)$, 这一条件可用虚位移原理表示成

$$\int_{-1}^1 [\tau_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) - \tau_{0j}^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)] \delta w_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) d\bar{x}_j = 0 \quad (27)$$

式中, δ 为变分符号, 将 τ_j^* 的表达式(21)及 w_j^* 的表达式(26)代入, 得下列关于 $C_{jm}(p)$ 的线性代数方程组

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M R_{jn}^{km}(p) C_{km}^*(p) + \frac{\pi}{4} G_j C_{jn}^*(p) = Q_{jn}^*(p) \quad (j = 1, 2, \dots, N-1; n = 1, 2, \dots, M) \quad (28)$$

其中

$$R_{jn}^{km}(p) = \int_{-1}^1 V_j^{km}(\bar{x}_j, p) \sin(n \arccos \bar{x}_j) d\bar{x}_j \quad (29a)$$

$$Q_{jn}^*(p) = \int_{-1}^1 \tau_{0j}^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) \sin(n \arccos \bar{x}_j) d\bar{x}_j \quad (29b)$$

如果裂纹上、下表面 $\bar{x}_j = \bar{x}_{j0}$ 处作用集中剪切力 $F_j(t)$, 则

$$Q_{jn}^*(p) = F_j^*(p) \sin(n \arccos \bar{x}_{j0}) \quad (29c)$$

以上推导对每一个界面均引入一个位错密度函数, 对于没有裂纹的界面(比如第 k 个界面), 则该界面的位错密度函数为零, 即 $C_{km}(p)$ 恒等于零($m = 1, 2, \dots, M$), 因此(21)中实际需要求解的方程个数等于裂纹的个数。

利用(28)解出系数 $C_{jm}^*(p)$ 后, 即可由(22)求出 $\phi_j(\bar{x}_j, p)$, 由(21)式求出界面剪应力, 然后由(7)解出各层的位移, 从而可得全场应力。

4 应力强度因子、能量释放率

下面分析裂纹面以外的界面应力和裂纹上、下表面的相对位移, 将(22)代入(21)并利用(23)得

$$\tau_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p) = -\frac{G_j}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^*(p) \frac{\operatorname{sgn}(\bar{x}_j)}{\sqrt{\bar{x}_j^2 - 1}} \left[\bar{x}_j - \frac{\operatorname{sgn}(\bar{x}_j)}{\sqrt{\bar{x}_j^2 - 1}} \right]^m + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M C_{km}^*(p) V_j^{km}(\bar{x}_j, p) \quad |\bar{x}_j| > 1 \quad (30)$$

显然裂纹尖端应力具有平方根奇异性, 裂纹左、右两端应力强度因子分别为

裂纹左端:

$$(K_a^*)_j = \left[\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]} \right]_{x \rightarrow (c_j - a_j)^-} \quad \tau_j^*(\bar{x}, p) = \frac{G_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^*(p) \quad (31a)$$

裂纹右端:

$$(K_b^*)_j = \left[\sqrt{2[x - (c_j + a_j)]} \right]_{x \rightarrow (c_j + a_j)^+} \quad \tau_j^*(\bar{x}, p) = -\frac{G_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^*(p) \quad (31b)$$

当 $|\bar{x}_j| \rightarrow 1^-$ 时, 由(26)取极限得到裂纹尖端的张开位移为

裂纹左端:

$$w_{aj}^*(\bar{x}, p) = w_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)_{\bar{x}_j \rightarrow (c_j - a_j)^+} = \sqrt{2h} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^*(p) \left[\sqrt{1 + \bar{x}_j} \right]_{\bar{x}_j \rightarrow (c_j - a_j)^+} \quad (32a)$$

裂纹右端:

$$W_{bj}^*(\bar{x}, p) = W_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)_{\bar{x}_j-1} = -\sqrt{2h} \sum_{m=1}^M C_{jm}^*(p) \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{x}}{\bar{x}_j}} \right)_{\bar{x}_j-1} \quad (32b)$$

对于缓慢加载的准静态情况, 裂纹右端的能量释放率为(33a)

$$(G_b)_j = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \bar{a} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \bar{a}} \int_{a_j}^{\bar{a}_j} (\bar{x} + \bar{c}_j + \bar{a}_j, t) W_{aj}(\bar{x} + \bar{c}_j + \bar{a}_j - \Delta \bar{a}, t) d\bar{x} = \frac{\pi G_j a_j}{8} \left[\sum_{m=1}^M C_{jm}(t) \right]^2$$

同理可求得裂纹左端的能量释放率为

$$(G_a)_j = \frac{\pi G_j a_j}{8} \left[\sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}(t) \right]^2 \quad (33b)$$

比较(31)与(33)可得应力强度因子与能量释放率的关系

$$(G_a)_j = \frac{\pi}{2G_j} [(K_a)_j]^2 \quad (G_b)_j = \frac{\pi}{2G_j} [(K_b)_j]^2 \quad (34)$$

以上我们在 Laplace 变换域内推导了应力、裂纹尖端应力强度因子等的表达式, 再利用 Laplace 数值反演即可求得这些参数的动态变化规律, 关于 Laplace 数值反演的方法, 有许多文献可以引用, 比如文献[8]。

5 数值算例及讨论

作为算例, 分析了一功能梯度结构的 III 型裂纹问题(几何尺寸及裂纹分布如图2所示), 该结构由金属基底(厚度为 h_m) 和金属-陶瓷功能梯度涂层(厚度为 h_c) 组成, 金属(Al)和陶瓷(Al_2O_3)的剪切模量与质量密度分别为^[15]

$$\text{Al:} \quad G_m = 25.9 \text{ GPa} \quad \rho_m = 2700 \text{ kg/m}^3 \quad (35a)$$

$$\text{Al}_2\text{O}_3: \quad G_c = 118.1 \text{ GPa} \quad \rho_c = 3900 \text{ kg/m}^3 \quad (35b)$$

由上述数据可求得金属 Al 中 $C_y = 98 \text{ m/s}$, 假设功能梯度涂层底面 $y = h_m$ 处为纯金属, 顶面 $y = h$ 处为纯陶瓷, 从 $y = h_m$ 到 $y = h$ 剪切模量和质量密度的变化采用下列简单的混合律:

$$G(y) = G_c + (G_m - G_c) \left(1 - \frac{y - h_m}{h_c} \right)^{q_1}, \quad \rho(y) = \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left(1 - \frac{y - h_m}{h_c} \right)^{q_2} \quad (36)$$

其中 q_1 、 q_2 为非均匀性参数, 我们固定下列参数以研究层数的划分对计算结果的影响以及非均匀性参数与应力强度因子的关系, 即: 裂纹数为2, 其中裂纹1位于金属基底内部 $y = h_m/2$ 处, 裂纹2位于基底和涂层之间的界面上, 裂纹长度均为 $a = h$, 裂纹中心位于 $x = 0$ 处。

外载条件为两裂纹面作用均匀分布的冲击载荷 $\tau_0 H(t)$, 其中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数, 在具体计算时, 所有的数值积分都采用 Gauss-Chebyshev 公式, 积分点数的选取以及 Chebyshev 多项式的项数的确定均保证计算误差小于1%。

由于金属基底为均匀材料, 因此仅需要沿裂纹1将其划分为两个单层, 将涂层划分为 N_c 个等厚度的单层, 层数的划分对计算结果的影响如图3所示, 可以看出, N_c 的变化对裂纹1的应力强度因子几乎没有影响, 这是因为本文考虑的涂层厚度远小于基底厚度的缘故, 从图3(b)可以看出 N_c 分别等于8和28时, 计算结果已经非常接近, 如果进一步加大 N_c , 计算结果几乎没有变化, 计算发现, 层数的增加对计算时间影响不大, 这说明可以将层数划分得很密, 以便精确模拟材料参数的变化情况, 显示出本文方法的优越性。

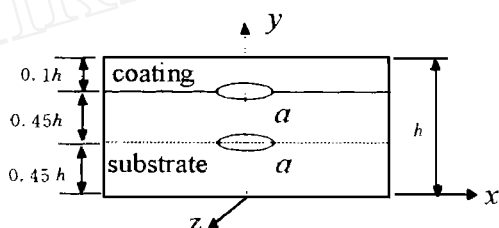


图2 含两个裂纹的基底/功能梯度涂层结构

Fig. 2 A substrate/functionally graded coating structure with two cracks

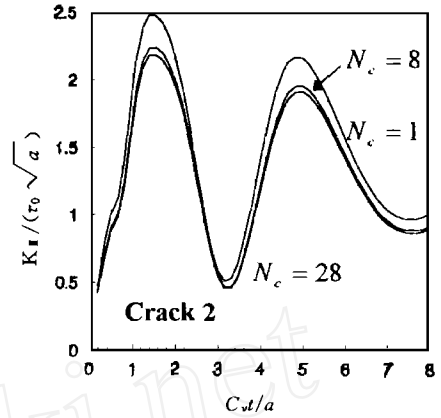
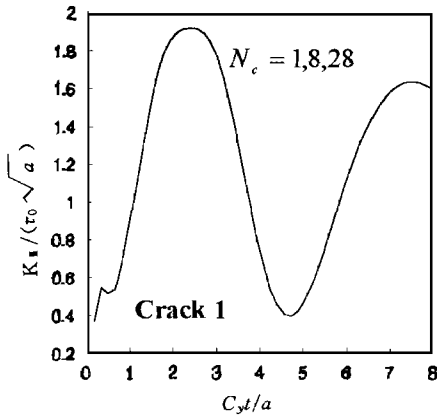


图3 层数的划分对计算结果的影响 ($q_1 = q_2 = 1$)

Fig 3 The influences of divided plies number N_c on SIFs ($q_1 = q_2 = 1$)

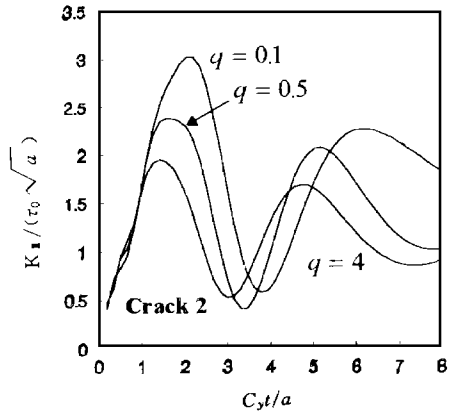
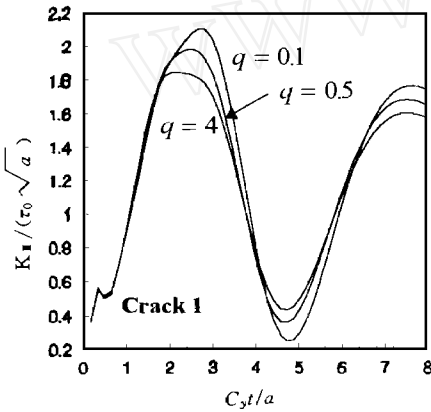


图4 非均匀性参数与应力强度因子的关系 ($q_1 = q_2 = q$)

Fig 4 The effects of non-homogeneous parameters on SIFs ($q_1 = q_2 = q$)

非均匀性参数与应力强度因子 K_{III} 的关系如图4所示 ($q_1 = q_2 = q$), 在不同的时刻, q 对 K_{III} 的影响是不一样的, K_{III} 可以随 q 的增加而增加或下降, 但是在所考虑的 q 值的范围内, K_{III} 的最大值随 q 的增加而下降, 这一点从图5也可以看出, 该图示出了静态应力强度因子与 q 的关系, 随着 q 的增加, K_{III} 先是很快下降, 到 q 等于6时达最低值, 然后缓慢上升, 这表明可以通过优化 q 值以降低应力强度因子。

6 结 论

文中提出一种适合研究含多个 III 型裂纹的非均匀介质动态断裂力学问题的方法, 进而可分析各种参数对裂纹尖端动态应力强度因子及能量释放率的影响, 基本结论有:

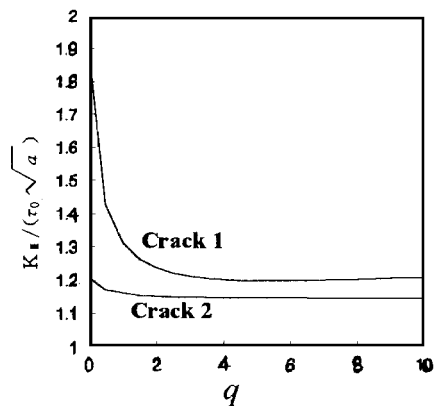


图5 静态应力强度因子与非均匀性参数的关系

Fig 5 The effects of non-homogeneous parameters on steady SIFs ($q_1 = q_2 = q$)

(1) 积分方程的个数与裂纹数相等, 因而计算时间主要由裂纹数决定, 故可以将层数划分得很密, 以便精确模拟材料参数的变化情况。

(2) 虽然本文的数值算例仅考虑了裂纹面上均匀外加应力的情形, 但对于裂纹面上的外加应力是非均匀(包括集中力)的情况, 本文的方法也是适用的, 而且各裂纹面上的应力可以互不相等。

(3) 分析表明, 本文提出的柔度矩阵/刚度矩阵方法对于分析含多个裂纹的非均匀介质(材料参数沿厚度方向连续变化或不连续变化)是十分有效的, 并可以推广到更加复杂的 I 型及 II 型裂纹问题。

附录 A:

$$R_J(s, p) = \frac{1}{(G_y)_J S_J (e^{S_J \bar{h}_J} - e^{-S_J \bar{h}_J})}$$

附录 B:

$$L_J(s, p) = 2sR_J(s, p), \quad N_J(s, p) = -2sR_{J+1}(s, p)$$

$$M_J(s, p) = s[(e^{S_{J+1} \bar{h}_{J+1}} + e^{-S_{J+1} \bar{h}_{J+1}})R_{J+1}(s, p) + (e^{S_J \bar{h}_J} + e^{-S_J \bar{h}_J})R_J(s, p)]$$

附录 C:

$$D(s, p) = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 & & & \\ L_2 & M_2 & N_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_{N-2} & M_{N-2} & N_{N-2} \\ & & & & & L_{N-1} & M_{N-1} \end{bmatrix}$$

参 考 文 献

- 1 Erdogan F. The crack problem for a bonded nonhomogeneous material under antiplane shear loading. *J Appl Mech*, 1985, 52: 823~ 825
- 2 Delale F, Erdogan F. On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes. *J Appl Mech*, 1988, 55: 317~ 324
- 3 Delale F, Erdogan F. Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. *Int J Engng Sci*, 1988, 26: 559~ 568
- 4 Ozturk M, Erdogan F. The anisymmetric crack problem in a nonhomogeneous medium. *J Appl Mech*, 1993, 60: 406~ 413
- 5 Ozturk M, Erdogan F. An axisymmetric crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone under torsion. *J Appl Mech*, 1995, 62: 116~ 125
- 6 Ozturk M, Erdogan F. Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region. *Int J Solids Structures*, 1996, 33: 193~ 219
- 7 Hata T. Thermal stress in a nonhomogeneous semi-infinite elastic solid under steady distribution of temperature. *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers(A)*, 1985, 51: 1789~ 1795
- 8 Sih G C, Chen E P. Cracks in Composite Materials. In: Sih G C, ed. *Mechanics of Fracture*. The Hague: Martinus Nijhoff, 1981
- 9 Chen E P, Sih G C. Interfacial delamination of a layered composite under antiplane strain. *J Comp Mat*, 1971, 5: 12~ 23
- 10 Ryvk in M. Mode III crack in a laminated medium. *Int J Solids Structures*, 1996, 33: 3361~ 3625
- 11 Ashbaugh N E. Stress in laminated composites containing a broken layer. *J Appl Mech*, 1973, 40: 533~ 540
- 12 Hilton P D, Sih G C. A laminate composite with a crack normal to the interfaces. *Int J Solids Structures*, 1971, 7: 913~ 930
- 13 Muskhelishvili N I. *Singular Integral Equations*. The Netherlands: Noordhoff, Groningen, 1953
- 14 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Tables of integrals, Series and Products*. New York: Academic Press, 1965
- 15 Koichi K AIZU, Yousuke SUZUKI, Shinji TAN MURA. Numerical analysis of stress wave propagation in a circular tube made of functionally gradient materials. *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers(A)*, 1991, 57: 143~ 147

DYNAMIC FRACTURE MECHANICS ANALYSIS FOR ANTIPLANE CRACKS IN NONHOMOGENEOUS COMPOSITE MATERIAL

Wang Baolin Du Shanyi Han Jiecai

(Center for Composite Material, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract The problem considered here is the antiplane response of a nonhomogeneous composite material containing some cracks subjected to dynamic loadings. It is assumed that the composite material is orthotropic and all the material properties only depend on the coordinate y (along the thickness direction). In the analysis, the elastic region is divided into a number of strips of infinite length. The material properties are taken to be constants for each strip. By utilizing the Laplace transform and Fourier transform technique, the general solutions for strips are derived. The complete solution of the entire elastic region is then obtained through introducing the mechanical boundary and strip interface conditions via the flexibility/stiffness matrix approach. Attention is focused on the time-dependent full field solutions of stresses, stress intensity factor and strain energy release rate. As a numerical illustration, the dynamic stress intensity factor of a functionally graded material with two cracks under sudden applied forces on crack faces are presented for various material nonhomogeneity parameters.

Key words nonhomogeneous composite material, antiplane cracks, dynamic fracture mechanics, stress intensity factor, energy release rate

(上接第101页)

4 现场发生的问题和解决方法

- 原材料引起的问题 有关制品性能的问题 有关外观和形状的问题 有关操作性的问题等
- 模具引起的问题
- 作业环境引起的问题

5 包括成本估算在内的多种实践实例

- HLU 法: (带洗涤盘的浴槽, 小型游艇的船壳)
- SU 法、冷压法: (小型净化槽)
- RTM 法: (带洗盘的浴槽, 小型艇)
- 热压法预成型: (水箱壁板)
- 热压法 SMC: (带洗盘浴槽, 水箱壁板, 浴槽)
- FW 法: (EP 小口径管, 大口径树脂砂浆夹层管)
- 拉挤成型法: (工字梁, 曲面梁)

介绍采用每种成型方法的理由, 生产形态(生产天数、生产时间、劳动时间、作业员配置、装备和设备等), 制造成本介绍。

对于经历过 FRP 成型的经营者的, 一直盼望有这样一本书, 也希望成型现场的负责人读一读。

另外, 贯穿全书在白边上注有专业用语的解说, 起到 FRP 手册的作用。

对于从事 FRP 成型者不言而喻, 对于原材料厂家或 FRP 成型机械设备厂家的技术人员和设计者, 也是一定要读一读的一本好书。