

非测地线缠绕稳定条件和缠绕工艺性的判别

苏红涛 刘华明* 路 华*

(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室, 杭州 310027) (* 哈尔滨工业大学机械工程系, 哈尔滨 150001)

摘 要 本文首次给出一般曲面上非测地线缠绕稳定条件的推导, 推导结果还得到了该条件更精确的形式。为判别缠绕工艺性, 给出了一种确定曲面外法矢的算法, 以此为基础通过分析总结出了非测地线缠绕工艺性的判别。

关键词 纤维缠绕, 非测地线缠绕稳定条件, 工艺性

中图分类号 TQ 340.6

纤维缠绕是一种制造高强度纤维复合材料的自动化方法。在航天、军工、体育、化工、建材等工业中具有广泛的用途。

纤维缠绕在工艺上, 早期采用测地线(短程线)轨迹进行缠绕, 因为它最稳定且计算也相对简单。但后来人们发现了其局限性:

(1) 缠绕角不可控制。由微分几何定理知, 任意给定曲面上一个起始点及一个方向, 存在唯一的一条测地线通过该点, 并以该方向为切矢。因此按力学性能最优设计的缠绕角就有可能无法用测地线实现。

(2) 工程上常用一些零件无法缠绕。由回转曲面测地线的 Clairaut 定理: $r_i \sin \alpha = \text{const}$ (r_i ——母线上第 i 点的半径; α ——相应点的缠绕角) 可知对不等开口容器或有限长圆管/筒就无法完全用测地线缠绕。

为解决上述问题, 扩大缠绕工艺范围, 1978 年德国 Aachen 工业大学塑料工艺研究所 (IKV) 在 SPI 第 33 届技术年会发表了他们的新方法, 即考虑摩擦可在一定范围内阻止滑线的非测地线缠绕。原文给出非测地线缠绕稳定条件是

$$k_g/k_n \leq \mu \quad (1)$$

式中: k_g ——测地曲率; k_n ——法曲率; μ ——摩擦系数。但原文未给出该条件的推导, 只是用照片说明进行了成功的实验^[1], 此后, 各国围绕非测地线缠绕也发表了大量的文献。如文献[2, 3, 7]曾探讨了常见曲面非测地线缠绕的计算公式。文献[4, 5]首先假定式(1)成立, 利用微分几何推出了回转体非测地线缠绕轨迹的微分方程。更多的文献如[6, 8]等都是提到他们是利用式(1)这一基本条件实现了非测地线稳定缠绕的。综观已发表的大量文献(本文无法一一列出), 没有一个给出式(1)的推导或证明的。这在理论上不仅是一种缺憾, 而且难免引起对该条件正确性的质疑。我们在为航天工业总公司某所研制缠绕机软件时, 对非测地线缠绕的机理进行了仔细研究, 并推导了非测地线稳定缠绕的条件, 避免了开发工作的盲目性。

1 纤维平衡方程的建立

首先我们假定纤维是连续的, 由缠绕工艺知缠绕张力在缠绕开始时已经产生, 它是纤维在张力器开卷机构作用下伸长产生的。纤维在芯模上沿出纱速度方向的滑动受到张力约束, 可认为没有滑移及滑移趋势, 该方向的摩擦力为零, 所以张力处处相等。我们选取任意形状芯模上纤维的任一点 P , 取其近旁的一块曲面, 以 P 为原点建立活动标架 $\{P; \alpha, v, n\}$ 。其中 α 是纤维轨迹在 P 点的单位切矢量, n 是曲面在 P 点的单位法矢量, $v = \alpha \times n$ 。设固定坐标系为 $\{o; x, y, z\}$ 。以 o 为起点, 弧长 s 为参数的径矢为 $r(s)$ 。对以 P 为中心的纤维微段 $P_1 P P_2$ 分析其受力, 如图 1 所示。

当所取微段充分小时, 可认为外力集中作用于点 P 。当纤维处于平衡态时, α, v, n 方向的合力应该为零, 即

$$T_1 \cdot \alpha + T_2 \cdot \alpha = 0 \tag{2}$$

$$T_1 \cdot v + T_2 \cdot v + F_f \cdot v = 0 \tag{3}$$

$$T_1 \cdot n + T_2 \cdot n + F_n \cdot n = 0 \tag{4}$$

式中: F_f, F_n, T_1, T_2 分别是摩擦力矢量, 支反力矢量和两个方向不同的张力矢量。纤维侧向的滑线趋势是由张力 T_1, T_2 在 v 方向的分量产生的, F_n 与由 T_1, T_2 在 n 方向的分量即正压力, 大小相等方向相反。因为研究对象是所有缠在芯模上的纤维, 所以摩擦主要指静摩擦力。摩擦力大小的范围符合

$$|F_f| \leq |F_n| \cdot \mu_{\max}$$

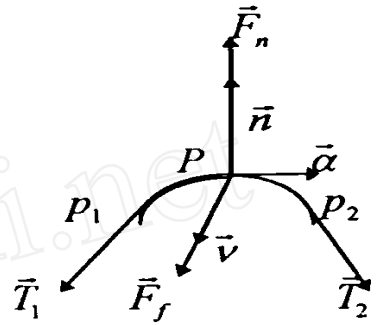


图 1 纤维微段受力分析
Fig 1 Analysis of forces acting on a micro filament segment

2 纤维平衡方程的求解

要求解上述方程必须首先确定 T_1, T_2 的方向, 为此我们把 $r(s)$ 在点 P 用 Taylor 公式展开, 图 2 是动静坐标系的关系, s 是弧长, $r(s)$ 是对应径矢; 令 $l = \Delta s, R(l)$ 是在动坐标系对应的径矢, 考虑到工程上应用的曲面多是不超过 C^3 (如, 二次曲面, Coons 曲面, B'ezier 曲面, B 样条曲面), 我们按 C^4 展开具有足够的精度。表达式中, 字母顶上打点表示对弧长参数的求导, s_P 表示点 P 处的弧长 s (静坐标系)。 $r(s)$ 的泰勒展开式为

$$r(s) = r(s_P) + \dot{r}(s_P) \cdot \Delta s + \frac{\ddot{r}(s_P) \cdot \Delta s^2}{2} + \frac{\dddot{r}(s_P) \cdot \Delta s^3}{6} + o(\Delta s)^3 \tag{5}$$

动坐标系的径矢 $R(l)$ 为

$$R(l) = r(s) - r(s_P) = \dot{r}(s_P) \cdot l + \frac{\ddot{r}(s_P) \cdot l^2}{2} + \frac{\dddot{r}(s_P) \cdot l^3}{6} + o(l^3) \tag{6}$$

其切矢为
$$R(l) = \dot{r}(s_P) + \ddot{r}(s_P) \cdot l + \frac{\dddot{r}(s_P) \cdot l^2}{2} + o(l^2) \tag{7}$$

为便于计算, 需把 (7) 式表示为 α, v, n 的线性组合。由微分几何理论文献 [9] 知

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= k_g \cdot v + k_n \cdot n \\ \frac{dv}{ds} &= -k_g \cdot \alpha + \tau_g \cdot n \\ \frac{dn}{ds} &= -k_n \cdot \alpha + \tau_g \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 τ_g 是纤维轨迹在点 P 的测地挠率。注意到 $r(s_p) = \alpha$, 其中 $r(s_p) = k(s_p)\beta$ 是纤维轨迹在 P 点的曲率矢量, β 是纤维轨迹在点 P 的主法矢, 它与测地曲率 k_g 和法曲率 k_n 具有如下关系:

$$k(s_p)\beta = k_g(s_p)v + k_n(s_p)n \quad (9)$$

将(8)(9)式代入(7)式经求导和整理得

$$\begin{aligned} \dot{R}(l) &= \left[1 - \frac{(k_g^2(s_p) + k_n^2(s_p))l^2}{2} \right] \alpha + \left[k_g(s_p)l + \frac{(k_g(s_p) - k_n(s_p)\tau_g(s_p))l^2}{2} \right] v + \\ &\quad \left[k_n(s_p) \cdot l + \frac{(k_n(s_p) + k_g(s_p)\tau_g(s_p))l^2}{2} \right] n + o(l^2) \end{aligned} \quad (10)$$

不妨设 T_2 指向弧长 s, l 增加的方向, 因为 T_1, T_2 沿纤维轨迹相互背离, 所以 T_1 指向弧长 s, l 减少的方向。另由弧长导数的定义式: $F(s) = \frac{dr(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{r(s+\Delta s) - r(s)}{\Delta s}$ 及导矢是割线极限位置的几何意义, 知无论 Δs 取正或负, 其导矢都指向弧长增加的方向。由此可确定两张力矢量为

$$\vec{T}_1 = -|\vec{T}_1| \cdot \dot{R}(-l) \quad (11)$$

$$\vec{T}_2 = |\vec{T}_2| \cdot \dot{R}(l) \quad (12)$$

$$\vec{T}_1 = \vec{T}_2 \quad (13)$$

$R(l)$ 是单位矢量。考虑 $l \rightarrow 0$ 时, 可忽略其 $o(l^2)$, 将(10)代入(11)(12), 然后再代入方程(2)、(3)、(4), 并注意到点 P_1, P_2 对应弧长参数 l 的符号相反, 分别得。

轴 α 方向的合力方程变为一个恒等式

$$\left[1 - \frac{(k_g^2(s_p) + k_n^2(s_p))l^2}{2} \right] |\vec{T}_2| - \left[1 - \frac{(k_g^2(s_p) + k_n^2(s_p))l^2}{2} \right] |\vec{T}_1| = 0 \quad (14)$$

轴 v 方向的合力方程变为

$$\begin{aligned} \left[k_g(s_p)l + \frac{(k_g(s_p) - k_n(s_p)\tau_g(s_p))l^2}{2} \right] |\vec{T}_2| - \left[-k_g(s_p)l + \frac{(k_g(s_p) - k_n(s_p)\tau_g(s_p))l^2}{2} \right] |\vec{T}_1| \\ = -|\vec{F}_f| \cos \theta \quad \theta = 0 \text{ 或 } \pi \end{aligned} \quad (15)$$

其中 θ 是摩擦力 F_f 与 v 正向的夹角。

轴 n 方向的合力方程变为

$$\left[k_n(s_p) \cdot l + \frac{(k_n(s_p) + k_g(s_p)\tau_g(s_p))l^2}{2} \right] |\vec{T}_2| -$$

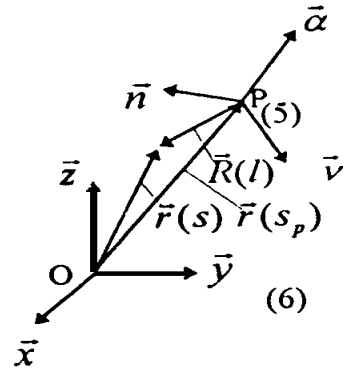


图2 动静坐标的关系

Fig 2 Relation between fixed and moving coordinate system s

$$\left[-k_n(s\rho) \cdot l + \left(\frac{k_n(s\rho) + k_g(s\rho) \tau_c(s\rho)}{2} \right) l^2 \right] |\vec{T}_1| = -|\vec{F}_n| \cos\varphi \quad \varphi = 0 \text{ 或 } \pi \quad (16)$$

φ 是支反力 F_n 与 n 正向的夹角。

由(15)化简得

$$2k_g(s\rho) l |\vec{T}_2| = -|\vec{F}_f| \cos\theta \quad (17)$$

由(16)化简得

$$2k_n(s\rho) l |\vec{T}_2| = -|\vec{F}_n| \cos\varphi \quad (18)$$

对(17)、(18)式取绝对值相除得

$$|\vec{F}_f| = |\vec{F}_n| \left| \frac{k_g(s\rho)}{k_n(s\rho)} \right| \quad (19)$$

通过平衡方程, 可求出由张力产生的侧滑分力 F_s 大小等于(19)式 F_f 的大小。因为摩擦力的数值受压力和摩擦系数决定, 所以平衡不是总能成立的。要使纤维侧向的滑线分力由摩擦力平衡必须满足下述条件:

$$|\vec{F}_s| \leq |\vec{F}_f|_{\max} = |\vec{F}_n| \cdot \mu_{\max} \quad (20)$$

将(19)式代入(20)式得

$$\left| \frac{k_g(s\rho)}{k_n(s\rho)} \right| \leq \mu_{\max} \quad (21)$$

这就是非测地线稳定缠绕的内蕴几何条件, 与文献[1]给出的条件(1)式相比, 本文中综合考虑了 k_g, k_n 的符号对 F_f, F_n 方向的影响, 所以更为严密。

3 曲面外法矢的确定

我们注意到微分几何理论只介绍了确定曲面法线的一般公式, 即

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \quad (22)$$

显然交换 u, v 参数的取法, 则 r_u 就变成了 r_v , 对应 n 也改变了符号。由此可见这种算法不能确定法线到底指向曲面的哪一侧。前述公式中的 n 就有这种不确定性。可是在缠绕工艺中, 必须判断张力在法线方向的分力是压向芯模表面还是相反。如果我们能确定式(22)中的 n 与确定的外法矢符号关系, 则张力在法线方向的分力相对外矢的符号也就可以计算出来了。

如图3所示, 我们首先选取所求法线点 P 处切平面两侧的两个已知点 Q_1, Q_2 。例如对于回转曲面, 可以取点 P 下对应回转轴上的一点 Q_1 , 并由直观规定点 Q_1 位于芯模表面的内侧。因点 Q_1 位于切平面的下方, 显然外法线 n 与 $\overrightarrow{PQ_1}$ 的夹角 A 大于 $\frac{\pi}{2}$ 。于是我们有确定曲面外法矢的公式来补充(22)式

$$\text{sign}(n \cdot \overrightarrow{PQ_1}) = \begin{cases} 1 & n \text{ 为内法线} \\ -1 & n \text{ 为外法线} \end{cases} \quad (23)$$

显然, 当 Q_2 在曲面外侧, 切平面上方时(夹角为 B), 结论与(23)相反。

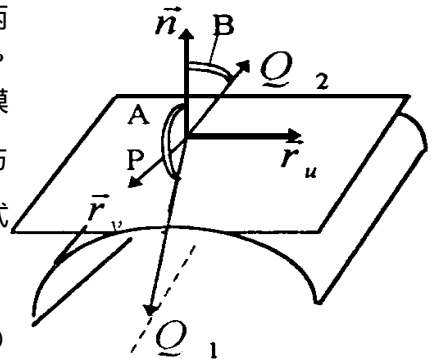


图3 确定曲面外法矢的方法

Fig. 3 Method for determining the direction of the outwards normal to the surface

4 构件缠绕工艺性的判据

4.1 判据1

再分析式(18), 这里规定 n 为外法矢。实际情况中正压力的反力 F_n 只可能与 n 同向, 即 $\varphi = 0$; 另外因为要产生摩擦力必须有 $|F_n| > 0$, 从式(18)可推出只有 $k_n(s^p) < 0$ 。意即若要张力产生正压力, 在纤维轨迹的切方向上, 曲面应朝外法线相反的方向弯曲。这是非测地线缠绕的先决条件。

反之若 $k_n(s^p) = 0$ 将(18)移项有

$$2k_n(s^p) (l) |T_2| + |F_n| = 0 \Rightarrow \text{当 } k_n(s^p) = 0 \text{ 时, } |F_n| = 0; \text{ 当 } k_n(s^p) > 0 \text{ 时, } F_n \text{ 不存在。}$$

这意味着若在纤维轨迹的切线方向的法曲率大于或等于零, 非测地线缠绕就无法实现。特别是当该法曲率大于零时, 将产生纤维架空。因为此时在纤维轨迹的切向, 曲面朝外法线的相同方向弯曲。

4.2 判据2

由式(21)可以建立针对已知曲面非测地线稳定缠绕的纤维轨迹方程。以力学设计给定的关键点处的缠绕角为已知条件, 先假设一个虚拟摩擦系数, 将其代入纤维轨迹方程用数值迭代法反求得摩擦系数。若求得的摩擦系数大于实验值或经验值, 说明按设计缠绕角实施缠绕要发生滑线。这是非测地线缠绕的校验条件。不滑线的最大摩擦系数可由文献[1]中给出的方法确定。

5 结束语

文中利用的活动标架能将曲面(芯模)与其上的曲线(纤维)联系起来, 通过对充分小的纤维微段建立静力平衡方程, 化简得到了非测地线稳定缠绕的条件。通过该条件, 可以推出工程上常用的曲面的非测地线稳定缠绕的纤维轨迹方程。求解该微分方程时, 应将不易求解的弧长参数替换掉。

参 考 文 献

- 1 Menges G, Wodicka R, Barking H L. Non-geodesic winding on a surface of revolution. 33rd Annual Conference of SPIE, 1978: Section 10-D, 1~4
- 2 冷兴武. 非测地线稳定缠绕的基本原理. 宇航学报, 1982(3): 90
- 3 黄毓圣, 谢军龙. 回转表面上非测地线缠绕的计算方法. 宇航学报, 1985(3): 63~69
- 4 邹蒙, 黄毓圣. 回转表面上非测地线缠绕方程及其解. 宇航学报, 1987(2): 53~61
- 5 Li Xianli, Lin Daohai. Non-geodesic winding equations on a general surface of revolution. Proc 6th conf on Composites Materials, 1987. 1. 152~1. 160
- 6 Wells G M, McAulty K F. Computer aided filament winding using non-geodesic trajectories. Proc 6th conf on Composites Materials, 1987. 1. 161~1. 182
- 7 冷兴武. 椭圆柱曲面缠绕滑线位置计算公式. 复合材料学报, 1991, 8(1): 27~33
- 8 Johan Scholliers, Hendrik Van Brussel. Computer-integrated filament winding: computer integrated design, robotic, filament winding and robotic quality control. Composites Manufacturing, 1994, 5(1): 17
- 9 陈维桓. 微分几何初步. 北京大学出版社, 1990. 157

DERIVATION OF THE STABLE CONDITION OF NON-GEODESIC WINDING AND CRITERIA OF MANUFACTURABILITY OF FLAMENT WINDING

Su Hongtao Liu Huaming Lu Hua

(National Key Laboratory of CAD & CG in Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(*Mechanical Engineering Department of Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract For the first time, this paper presents the mathematical derivation of non-geodesic winding on a general surface. It amends the theoretical defects of published literature and makes non-geodesic winding theoretically convincing. It also gives an algorithm to determine the outwards directed normal vector. Based on this method, criteria to evaluate the manufacturability of winding are concluded.

Key words filament winding, no-condition for non-geodesic winding, manufacturability of filament winding

(上接第139页)

与比较, 的价格约为的3倍, 的重量约为的60%。因此, 对于卡车等价格竞争严峻的车种多使用, 相反地重视减轻重量的轿车等则多使用。

从表中所列情况可知, 天然气汽车以卡车为多, 由此也可知CNG容器的材质的比例是和约占70%, 而占30%。

具体情况是, 在长野冬奥会上使用的30台丰田皇冠轿车中装载钢管Drum公司的型118L容器和SCI公司的型50L容器各一个。

理所当然, 如果CNG汽车的需要量增加, CNG用气瓶的需要也随之增加, 除上述公司之外, 有迹象表明有新的公司将涉足这一领域。

CNG 容器厂家钢管 Drum 公司设气瓶车间

现在日本国内导入天然气(CNG)汽车的车种和厂家如下:

轻型汽车——大发J, 大发M

小型货车——日产AD 货车, 三菱B, 丰田箱型货车

轿车——丰田皇冠, 日产C/G, 本田C-GX

卡车——马自达Titan, 丰田Dyna/Ace, 三菱Canter, 五十铃Elf, 日产柴油Condor

垃圾车——五十铃Elf, 马自达Titan, 日产柴油Condor

大型公车——日产柴油, 五十铃汽车

这些CNG汽车所装的CNG容器由前述四个公司供应。

其中, 约占日本国内CNG容器需要60%的钢管Drum公司为(1) 丰田皇冠、(2) 日产C/G、(3) 日产AD、(4) 三菱Rosa(公车)和(5) 日产柴油Condor 五种车制造铝内衬FW补强的复合材料容器, 为(6) 丰田箱型货车、(7) 日产柴油路线公车、(8) 丰田Dyna/Ace、(9) 三菱Canter和(10) 五十铃Elf垃圾车五个车种及(11) 五十铃Elf卡车和(12) 二吨型马自达Titan两车种的一部分制造钢制CNG容器。

钢管Drum公司为应付将来铝衬FW补强容器的需求增长, 去年投资约1亿7千万日元, 新设以制造CNG容器为主要目的的“燃气容器车间”(在日本钢管公司川崎工厂内), 于去年12月18日举行了竣工式, 并决定从今年4月正式投产。

新车间为钢筋混凝土结构, 车间宽25m、长60m(檐高8.58m), 建筑面积1500m², 另有200m²的办公楼, 把旧车间的FW装置搬进新车间内。

申 摘自日本EPJ 1998年2月5日第656号