

文章编号: 1000-3851(2004)03-0102-08

颗粒增强复合材料的界面模型与界面相模型的关系

段慧玲, 王建祥*, 黄筑平, 黄红波

(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘要: 对颗粒增强复合材料界面模型与界面相模型的关系进行了研究。通过界面位移和应力的间断量建立了与球形粒子薄界面相等效的不完善界面条件和线弹簧界面条件。根据线弹簧界面和具有任意弹性模量的薄界面相之间的等效关系, 得到了弹簧常数的表达式。数值结果表明: 当界面相和基体的模量比值较小时, 与薄界面相模型的精确解相比较, 不完善界面和线弹簧界面的解有很高的精确性。另外针对线弹簧模型的性质, 讨论了界面可能的法向嵌入, 并建立了保证无嵌入的条件。

关键词: 界面相; 不完善界面; 线弹簧界面; 球形粒子; 界面嵌入

中图分类号: TB330.1 文献标识码: A

RELATIONS BETWEEN THE INTERFACE MODELS AND THE INTERPHASE MODEL FOR PARTICLE-REINFORCED COMPOSITES

DUAN Huiling, WANG Jianxiang*, HUANG Zhuping, HUANG Hongbo

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The relations between the interface models and the interphase model are studied for particle-reinforced composites. The imperfect interface condition which is equivalent to the effect of a thin interphase for a spherical particle is derived in terms of interface displacement and traction jumps, as is the linear spring interface condition which is equivalent to the effect of a thin interphase. According to the equivalent condition between the linear spring interface and the thin interphase with arbitrary elastic properties, the exact expressions of the spring constants are obtained. The numerical results show that by comparison with the exact solutions of the thin interphase model, high accuracy of the solutions in terms of the imperfect interface and linear spring interface is demonstrated at low modulus ratios of the interphase and the matrix. For the linear spring model, the possible normal interpenetration at the interface is discussed. The conditions for ensuring no interpenetration are established.

Keywords: interphase; imperfect interface; linear spring interface; spherical particle; interface interpenetration

界面性质是影响整个复合材料性质的重要因素之一, 目前已提出许多模型来模拟界面的性质。在分析界面区域对复合材料微观和宏观性质的影响方面主要有两类模型。第一类是界面模型, 这种模型假定界面是没有厚度但具有不同于基体和粒子弹性性质的物质。这类模型有很多种, 例如, 切向滑动模型^[1]、线弹簧界面模型^[2~5]、粘聚力模型和非线性模型等^[6]。这些界面模型一般采用特定的假设作为界面条件, 界面条件中一般包括一些未知参数。在界面模

型中, 以不完善界面模型和线弹簧界面模型最具代表性。所谓不完善界面是指界面处存在位移和应力间断量; 线弹簧界面模型是指应力在界面处连续而位移有间断量, 并且切向和法向位移的间断量分别与切向应力及法向应力成正比。第二类用来描述界面性质的模型是界面相模型, 这类模型包含了位于夹杂和基体之间的界面相, 其中界面相是具有一定厚度并且弹性模量不同于基体和夹杂的物质, 界面相的弹性常数可以是均匀的也可以是非均匀的, 基

体与界面相、界面相与夹杂之间的界面是完好粘结。这类模型对分析具有均匀和非均匀界面相的功能梯度复合材料很重要, 近年已被众多研究者所关注。

既然界面相模型和界面模型都能用来模拟界面的性质, 那么能否建立它们之间的联系呢? Hashin^[2]近似地给出了薄的柔性界面相模型和线弹簧模型之间的联系。Benveniste 和 Miloh^[7]认为二维的极软或极硬的薄圆柱形界面相可以与不完善界面条件等效。最近, 对于纤维复合材料, Hashin^[8]给出了具有任意刚度的薄界面相与不完善界面条件之间的等效理论, 并且用纤维增强复合材料在远场横向剪切载荷作用下的不完善界面条件和薄界面相模型弹性场的比较验证了理论的精确性。

基于 Hashin 的思路^[2, 8], 本文作者根据无限大体中单个球形粒子具有界面相、不完善界面和线弹簧界面时的弹性解, 对由界面相模型得到的精确解与由等效的不完善界面和线弹簧界面得到的弹性解进行数值比较, 接着根据线弹簧模型与薄的任意模量界面相模型之间的等效条件, 得到了弹簧常数的表达式。最后, 根据线弹簧模型的性质, 讨论了界面可能发生的法向嵌入, 并建立了防止嵌入发生的条件。这些问题以前未见相关文献报道。

1 问题描述

考虑无限大基体中有一个具有同心界面相的球形粒子(见图 1), 粒子和界面相外半径分别为 a 和 b 。三个区域 1、 i 和 2 都是各向同性且均匀的, 分别代表粒子、界面相和基体。1 和 i 、 i 和 2 之间的完善界面分别记为 S_{1i} 和 S_{i2} 。为了简化起见, 用 r/a 来代表体系中的物质点。界面相的厚度是 $S_{1i}(r=1)$ 和 $S_{i2}(r=b/a)$

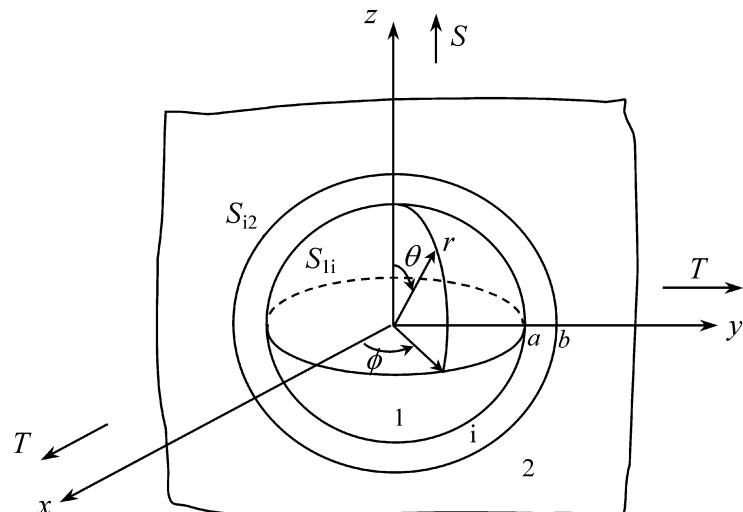


图 1 无限大基体中带界面相的球形粒子受轴对称载荷作用

Fig. 1 A spherical particle with an interphase

in an infinite matrix under the axisymmetric loading

间的法向距离, 用 t 表示, $t = b/a - 1$ 。文中用到的弹性模量分别是剪切模量 μ 、体积模量 K 和泊松比 ν 。假设整个材料体系受轴对称载荷作用, 远场载荷为: $e_{zz} = S$, $e_{xx} = e_{yy} = T$ 。为不失一般性, 假设 $0 < T < S$, 定义远场载荷三轴度参数 $m = T/S$, 则 m 将在 $0 \sim 1$ 的范围变化。

本文的主要目的是把区域 1 中 S_{1i} 界面上的弹性场参数和区域 2 中 S_{i2} 界面上的相应参数建立起联系, 这种联系就是界面模型的界面条件。两个界面之间弹性场参数的不同联系反映了基体和粒子间不同的粘结条件。这种联系能够代替 S_{1i} 和 S_{i2} 界面上的完善界面条件, 把一个三相、两个完善界面的弹性力学边值问题转化为一个具有二相、一个界面的边值问题。

2 具有界面相和界面模型的球形粒子的解

2.1 具有界面相的球形粒子的解

对具有界面相的球形粒子在无限大体中的轴对称问题, 位移和应力分量可写成如下形式:^[2]

$$\begin{aligned} u_r = & F_n(-2 + 4\zeta_n)r - \frac{C_n}{r^2} + 12\zeta_n A_n r^3 + 2B_n r + \\ & \frac{2(5 - 4\zeta_n)C_n}{r^2} - 3 \frac{D_n}{r^4} P_2(\cos[\theta]) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_i = & (7 - 4\zeta_n)A_n r^3 + B_n r + \\ & \frac{2(1 - 2\zeta_n)C_n}{r^2} + \frac{D_n}{r^4} \frac{dP_2(\cos[\theta])}{d[\theta]} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} e_{rr} = & 2\zeta_n F_n(-2 - 2\zeta_n) + \frac{2C_n}{r^3} + -6\zeta_n A_n r^2 + \\ & 2B_n - \frac{4(5 - \zeta_n)C_n}{r^3} + \frac{12D_n}{r^5} P_2(\cos[\theta]) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} e_{ri} = & 2\zeta_n (7 + 2\zeta_n)A_n r^2 + B_n + \\ & 2(1 + \zeta_n) \frac{C_n}{r^3} - 4 \frac{D_n}{r^5} \frac{dP_2(\cos[\theta])}{d[\theta]} \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $P_2(\cos[\theta])$ 是二阶勒让德多项式; $n = 1, i$ 和 2, 分别代表粒子、界面相和基体; A_n, B_n, C_n, D_n, F_n 和 G_n 是待定常数, 由远场解($r \rightarrow \infty$)、粒子内部($r \rightarrow 0$)避免奇异性条件以及 S_{1i} 和 S_{i2} 界面上的应力和位移连续性条件求得。

2.2 具有不完善界面的球形粒子的解

采用类似于 Hashin^[8] 的假设: S_{1i} 和 S_{i2} 之间沿法向的位移和应力变化可足够精确地近似表示为

$$[u] = u_r^{(i)}(1+t) - u_r^{(i)}(1) = t u_{r,r}^{(i)}|_{S_{1i}} \quad (5)$$

$$[u_l] = u_l^{(i)}(1 + t) - u_l^{(i)}(1) = t u_{l,r}^{(i)}|_{S_{1i}} \quad (6)$$

$$[e_{rr}] = e_{rr}^{(i)}(1 + t) - e_{rr}^{(i)}(1) = t e_{rr,r}^{(i)}|_{S_{1i}} \quad (7)$$

$$[e_{rl}] = e_{rl}^{(i)}(1 + t) - e_{rl}^{(i)}(1) = t e_{rl,r}^{(i)}|_{S_{1i}} \quad (8)$$

其中:下标 S_{1i} 代表在 S_{1i} 界面上靠近区域 1 的一侧取相应的量,上标 i 代表界面相的量。在 S_{1i} 界面上,位移分量 u_r 、 u_l 和应力分量 e_{rr} 、 e_{rl} 连续。为了建立不完善界面和薄界面相之间的等效关系,要把界面相内的量替换成粒子内相应的量。根据式(5)和式(6)以及界面相内的应力-应变关系、应变-位移关系和在 S_{1i} 界面上的应力和位移连续性条件,用界面相性能参数和 S_{1i} 界面上区域 1 的量表示两界面 S_{1i} 和 S_{i2} 间的位移间断量为

$$[u_r] = t (1 - 2\zeta_i) \frac{e_{rr}^{(1)}}{2\zeta_i(1 - \zeta_i)} - \frac{\zeta_i}{1 - \zeta_i} \frac{u_{l,r}^{(1)} + u_l^{(1)} \operatorname{ctg}[\zeta_i] + 2u_r^{(1)}}{r} \quad (9)$$

$$[u_l] = t \frac{e_{rl}^{(1)}}{\zeta_i} + \frac{u_l^{(1)} + u_{r,l}^{(1)}}{r} \quad (10)$$

其中,上标 1 代表粒子的量。把式(1)~式(4)代入式(9)、式(10)得

$$[u_r] = (C_{13}A_1 + C_{14}B_1)P_2(\cos[\zeta_i]) + C_{15}F_1 \quad (11)$$

$$[u_l] = (C_{23}A_1 + C_{24}B_1)P_2(\cos[\zeta_i]) \quad (12)$$

根据球坐标系下的平衡方程和 S_{1i} 界面上的连续性条件,方程(7)和(8)变为

$$[e_{rr}] = \frac{t}{r} \frac{-2 + 4\zeta_i}{1 - \zeta_i} e_{rr}^{(1)} - \operatorname{ctg}[e_{rl}^{(1)} + \frac{Le_{rl}^{(1)}}{L}] + \frac{2\zeta_i(1 + \zeta_i)}{r(1 - \zeta_i)} u_{l,r}^{(1)} \operatorname{ctg}[\zeta_i] + u_{l,r}^{(1)} + 2u_r^{(1)} \quad (13)$$

$$[e_{rl}] = \frac{t}{rsin[\zeta_i]} 3\sin[e_{rl}^{(1)}] + \frac{L}{L} (\sin[e_{rl}^{(1)}] - \cos[e_{rl}^{(1)}]) \quad (14)$$

把式(1)~式(4)代入式(13)、式(14)得

$$[e_{rr}] = 2\zeta_i [(C_{33}A_1 + C_{34}B_1)P_2(\cos[\zeta_i]) + C_{35}F_1] \quad (15)$$

$$[e_{rl}] = 2\zeta_i (C_{44}A_1 + C_{45}B_1) \frac{dP_2(\cos[\zeta_i])}{d[\zeta_i]} \quad (16)$$

其中:

$$C_{13} = -6t \frac{g_{1i}\zeta_i(1 - 2\zeta_i) + \zeta_i(8\zeta_i - 7)}{1 - \zeta_i},$$

$$C_{14} = 2t \frac{g_{1i}(1 - 2\zeta_i) + \zeta_i}{1 - \zeta_i},$$

$$C_{15} = t \frac{g_{1i}(1 - 2\zeta_i)(-2 - 2\zeta_i) - 2\zeta_i(4\zeta_i - 2)}{1 - \zeta_i},$$

$$C_{23} = t[2g_{1i}(7 + 2\zeta_i) + 7 - 16\zeta_i],$$

$$C_{24} = t(2g_{1i} - 1),$$

$$C_{33} = 6t \times$$

$$\frac{2 - 4\zeta_i}{1 - \zeta_i} - g_{1i} \frac{1 + \zeta_i}{1 - \zeta_i} (7 - 8\zeta_i) + 7 + 2\zeta_i,$$

$$C_{34} = 2t \frac{1 + \zeta_i}{1 - \zeta_i} (1 - g_{1i}), \quad C_{35} =$$

$$4t \frac{(1 - 2\zeta_i)(1 + \zeta_i) - g_{1i}(1 - 2\zeta_i)(1 + \zeta_i)}{1 - \zeta_i},$$

$$C_{44} = t(49 + 20\zeta_i), \quad C_{45} = 5t \quad (17)$$

其中: $g_{1i} = 1/g_{ii} = \zeta_i/\zeta_1$; A_1 、 B_1 和 F_1 为待定常数。薄界面相等效于法向和切向位移间断量,满足式(11)、式(12),应力间断量满足式(15)、式(16)的不完善界面条件。等效条件可写为

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(S_{i2}) - u_r^{(1)}(S_{1i}) &= [u_r] \\ u_l^{(2)}(S_{i2}) - u_l^{(1)}(S_{1i}) &= [u_l] \\ e_{rr}^{(2)}(S_{i2}) - e_{rr}^{(1)}(S_{1i}) &= [e_{rr}] \\ e_{rl}^{(2)}(S_{i2}) - e_{rl}^{(1)}(S_{1i}) &= [e_{rl}] \end{aligned} \quad (18)$$

其中上标 2 代表基体的量,为了把式(18)表示为界面条件,应考虑在同一个界面上进行。不失一般性,在 S_{1i} 界面上评价不完善界面条件,由于 u_r 、 u_l 、 e_{rr} 和 e_{rl} 都是连续函数,根据 Hashin^[8] 理论, $u_r^{(2)}(S_{i2})$ 、 $u_l^{(2)}(S_{i2})$ 、 $e_{rr}^{(2)}(S_{i2})$ 和 $e_{rl}^{(2)}(S_{i2})$ 可用 $u_r^{(2)}(S_{1i})$ 、 $u_l^{(2)}(S_{1i})$ 、 $e_{rr}^{(2)}(S_{1i})$ 和 $e_{rl}^{(2)}(S_{1i})$ 作 t 阶的近似,这仅对式(18)造成 t^2 阶的误差,这样不完善界面条件(18)变为

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(1, []) - u_r^{(1)}(1, []) &= [u_r] \\ u_l^{(2)}(1, []) - u_l^{(1)}(1, []) &= [u_l] \\ e_{rr}^{(2)}(1, []) - e_{rr}^{(1)}(1, []) &= [e_{rr}] \\ e_{rl}^{(2)}(1, []) - e_{rl}^{(1)}(1, []) &= [e_{rl}] \end{aligned} \quad (19)$$

若 S_{1i} 界面是完善的,上述条件可写为 $[\cdot] = 0$ 。把粒子和基体的位移及应力表达式(1)~式(4)、位移间断量式(11)、式(12)和应力间断量式(15)、式(16)代入式(19),可确定出常数 A_1 、 B_1 、 F_1 、 G_2 、 C_2 和 D_2 ,从而确定出 S_{i2} 界面上的位移和应力分量。

2.3 与薄界面相等效的线弹簧界面

线弹簧界面模型是最有代表性的界面模型之一,它基于如下假设:即应力在界面处连续,而界面上的法向和切向位移间断量分别与相应应力成正比。在 S_{1i} 界面上有

$$\begin{aligned} e_{rr}^{(1)}(1, []) &= e_{rr}^{(2)}(1, []) = k_r[u_r] \\ e_{rl}^{(1)}(1, []) &= e_{rl}^{(2)}(1, []) = k_l[u_l] \end{aligned} \quad (20)$$

其中: k_r 和 k_l 为弹簧常数,也称界面参数, $[\cdot] = (\text{外}) - (\text{内})$ 。 k_r 和 k_l 代表了界面的性质。例如, $k_r = +$ 和 $k_l = +$ 相当于完好界面; $k_r = +$

和 $k_l > 0$ 相当于界面法向完好而切向有滑动的界面; $k_r = +$ 和 $k_l = 0$ 代表了自由滑动的界面; $k_r > 0$ 和 $k_l > 0$ 为一般意义上的不完善界面。

若薄界面相模型与线弹簧界面模型等效, 则等效条件为

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(S_{i2}) - u_r^{(1)}(S_{1i}) &= [u_r] \\ u_l^{(2)}(S_{i2}) - u_l^{(1)}(S_{1i}) &= [u_l] \\ e_{rr}^{(2)}(S_{i2}) - e_{rr}^{(1)}(S_{1i}) &= 0 \\ e_{rl}^{(2)}(S_{i2}) - e_{rl}^{(1)}(S_{1i}) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

采用由式(18)得到不完善界面条件(19)的方法, 式(21)可变为

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(1, []) - u_r^{(1)}(1, []) &= [u_r] \\ u_l^{(2)}(1, []) - u_l^{(1)}(1, []) &= [u_l] \\ e_{rr}^{(2)}(1, []) - e_{rr}^{(1)}(1, []) &= 0 \\ e_{rl}^{(2)}(1, []) - e_{rl}^{(1)}(1, []) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

当球形粒子和无限大基体之间为线弹簧界面时, 其弹性解仍由式(1)~式(4)给出。六个常数 G_1, C_1, D_1, F_2, A_2 和 B_2 与具有界面相时的相同, 而另六个常数 A_1, B_1, F_1, G_2, C_2 和 D_2 可由把式(1)~式(4)和式(11)、式(12)代入到等效条件式(22)得到。确定出这些常数后就可确定出 S_{i2} 界面上的位移和应力分量。

利用薄界面相和线弹簧界面模型之间的等效条件式(22), 可以确定线弹簧模型的弹簧常数。根据位移间断量公式(11)和法向应力表达式(3), 可得在静水载荷下法向位移间断量 $[u_{r1}]$ 和在 S_{1i} 界面上的法向应力 $e_{rr1}^{(1)}$, 从而由式(20)计算出静水载荷下的法向弹簧常数

$$k_{r1} = \frac{3k_i(3k_i + 4_{-i})}{t(9k_i - 6k_i + 4_{-i})} \quad (23)$$

按照同样的方法可得到偏量载荷下的法向弹簧常数 k_{r2} 及切向弹簧常数 k_l , 见式(24)、式(25)。

把由等效条件式(22)得到的常数 A_1 和 B_1 代入式(24)和式(25)中, 可得弹簧常数 k_{r2} 和 k_l

$$\begin{aligned} k_{r2} = -2_{-1}(3k_i + 4_{-i})[12k_{i-1}^2 + 24k_{i-1-2}(17 + 39t) + 16_{-1-i}^2 + 16_{-1-2-i}(34 - 39t) + 171k_ik_{-1} + 144k_ik_{-2}(1 + 6t) + 228k_{i-1-i} + 192k_{i-2-i}(1 - 3t)]/q \end{aligned} \quad (26)$$

$$k_{r2} = \frac{-2_{-1}[2B_1(3k_i + 4_{-i}) + A_1(-9k_i + 6_{-i})](3k_i + 4_{-i})}{t\{9A_1[-1(15k_i + 2_{-1} - 10_{-i}) + 3k_i(3k_i - _{1-} - 2_{-i})] + B_1(3k_i + 4_{-i})(3k_i + 6_{-1} - 2_{-i})\}} \quad (24)$$

$$k_l = \frac{2_{-1-i}[B_1(3k_i + 4_{-i}) + A_1(24k_i + 5_{-i})]}{t\{B_1(3k_i + 4_{-i})(2_{-1} - 4_{-i}) + A_1[k_1(48_{-1} - 3_{-i}) + _{1-}(10_{-1} + 23_{-i})]\}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} k_l = -2_{-1-i}[171k_ik_{-1} + 72k_ik_{-2}(2 - 7t) - 228k_{i-1}(6t_{-2} - _{1-i}) + 48k_{i-2-i}(4 + 7t) + 12k_{i-1}^2 + 24k_{i-1-2}(17 + 35t) + 16_{-1-2-i} \times (34 - 35t) + 16_{-1}^2(-6t_{-2} + _{1-i})]/q \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} q = t[-24k_{i-1}^3 - 48k_{i-1-2}^2(17 + 35t) + 12k_{i-1-i}^2 + 24k_{i-1-2-i}(17 + 91t) + 32_{-1}^3(6t_{-2} - _{1-i}) + 16_{-1-2-i}^2(34 - 91t) + 64_{-1-i-2}^2(-17 + 37t) + 16_{-1-i}^2 - 342k_ik_{i-1}^2 + 144k_ik_{i-1-2}(-2 + 7t) + 171k_ik_{i-1-i} + 456k_{i-1}^2(6t_{-2} - _{1-i}) + 72k_ik_{i-1-2}(2 + 7t) + 48k_{i-2-i}^2(4 - 7t) - 24k_{i-1-i-2}(16 + 43t) + 228k_{i-1-i}^2] \end{aligned} \quad (28)$$

从式(23)和式(26)~式(28)可见, 当线弹簧界面条件等效于薄界面相时, k_{r1}, k_{r2} 和 k_l 可表示为材料常数 $k_i, _{1-i}, k_{i-1}$ 和 $_2$ 及界面相厚度 t 的函数。所得到的 k_{r1}, k_{r2} 和 k_l 的表达式有两点不合理之处, 其一是 k_{r1} 和 k_{r2} 的表达式不相等, 而理论上二者的表达式应该相同; 其二是当粒子、界面相和基体的弹性模量任意变化时, k_{r1}, k_{r2} 和 k_l 有可能出现负值。但是, 如果令 $k_i, _{1-i} \ll k_{i-1}$, 即界面相较软时, 则式(23)~式(25)可退化为

$$k_{r1} = k_{r2} = (k_i + \frac{4}{3}_{-i})/t, \quad k_l = _{1-i}/t \quad (29)$$

式(29)与 Hashin^[2]的结果相同, 表明线弹簧模型可以与薄的软界面相等效。可以这样理解它们之间的等效关系: 线弹簧模型允许有负的法向位移间断量, 意味着基体和粒子在法向会出现相互嵌入的现象, 这从物理角度上讲是不合理的。当界面相较软时, 界面相的法向变形可用来表示线弹簧模型的法向位移间断量, 因为当界面相较软时, 基体和界面相界面可以向内移动最多等于界面相厚度的距离, 从这个角度理解负的法向位移间断量是可以实现的, 它相当于软界面相厚度的减小量^[2], 所以线弹簧模型可以与薄的软界面相等效。但当界面相较硬时, 基体和界面相界面不能向内移动界面相厚度的距离, 即负的法向位移间断量不可能发生, 线弹簧界面模型与薄的硬界面相模型不能等效, 因此, 式(23)、式(26)和式(27)也就不合理了。

2.4 数值结果和讨论

为了验证不完善界面条件和线弹簧界面条件下解的精确性, 将它们与具有界面相的三相问题的精确解相比较, 根据式(1)~式(4)、式(18)和式(21), 在 S_{i2} 界面上的弹性场表达式为

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(S_{i2}) &= U_{r1}^{(2)}(S_{i2}) + U_{r2}^{(2)}(S_{i2})P_2(\cos[\cdot]), \\ u_t^{(2)}(S_{i2}) &= U_t^{(2)}(S_{i2}) \frac{dP_2(\cos[\cdot])}{d[\cdot]}, \\ e_{rr}^{(2)}(S_{i2}) &= T_{rr1}^{(2)}(S_{i2}) + T_{rr2}^{(2)}(S_{i2})P_2(\cos[\cdot]), \\ e_{rt}^{(2)}(S_{i2}) &= T_{rt}^{(2)}(S_{i2}) \frac{dP_2(\cos[\cdot])}{d[\cdot]} \end{aligned} \quad (30)$$

其中: $U_{r1}^{(2)}(S_{i2})$ 和 $T_{rr1}^{(2)}(S_{i2})$ 分别是法向位移和法向应力的球量部分; $U_{r2}^{(2)}(S_{i2})$ 和 $T_{rr2}^{(2)}(S_{i2})$ 分别是法向位移和法向应力的偏量部分; $U_t^{(2)}(S_{i2})$ 和 $T_{rt}^{(2)}(S_{i2})$ 分别是切向位移和切向应力。

在 S_{i2} 界面上, z 向单轴拉伸载荷($m = 0$)作用下的 $U_{r1}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $T_{rr1}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $U_{r2}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $T_{rr2}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $U_t^{(2)}(S_{i2})$ 和 $T_{rt}^{(2)}(S_{i2})$ 与 $Z = \log(\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2)$ 的关系曲线如图2、图3所示。图中比较了三相时的精确解、不完善界面和线

弹簧界面下的解。图中采用的材料性质为: $\underline{\epsilon}_1/\underline{\epsilon}_2 = 10$ 、 $\underline{\epsilon}_1 = 0.2$ 、 $\underline{\epsilon}_i = 0.3$ 、 $\underline{\epsilon}_2 = 0.35$ 。图2给出了界面相厚度 $t = 0.002$ 时的比较结果。由图可见, 当 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2$ 较小时($\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2 < 10^2$), 这三组解都很接近, 说明不完善界面和线弹簧界面下的解比较精确; 但当 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2$ 较大时, 三相时的精确解趋于刚性粒子的极限, 即 $U_{r1}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $U_{r2}^{(2)}(S_{i2})$ 和 $U_t^{(2)}(S_{i2})$ 为零, 应力 $T_{rr1}^{(2)}(S_{i2})$ 、 $T_{rr2}^{(2)}(S_{i2})$ 和 $T_{rt}^{(2)}(S_{i2})$ 为常数, 而不完善界面和线弹簧界面下的解则不然。这三组解在 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2$ 达到 10^2 后开始分化。当 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2 < 10^2$ 时, 线弹簧界面的曲线与不完善界面的曲线吻合很好; 但当界面相较硬($\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2 > 10^2$)时, 两组曲线出现分化。

图3显示了 $t = 0.08$ 时的结果。此时不完善界面和线弹簧界面下的解不再精确, 它们远离三相时的精确解, 在 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2$ 的值较小和较大时尤其明显。但是不完善界面和线弹簧界面两者的曲线仍非常接近, 特别是界面很软($\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2 < 10^{-2}$)时, 它们的曲线完全重合, 两者在 $\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2 > 10^2$ 后开始分化。不完善

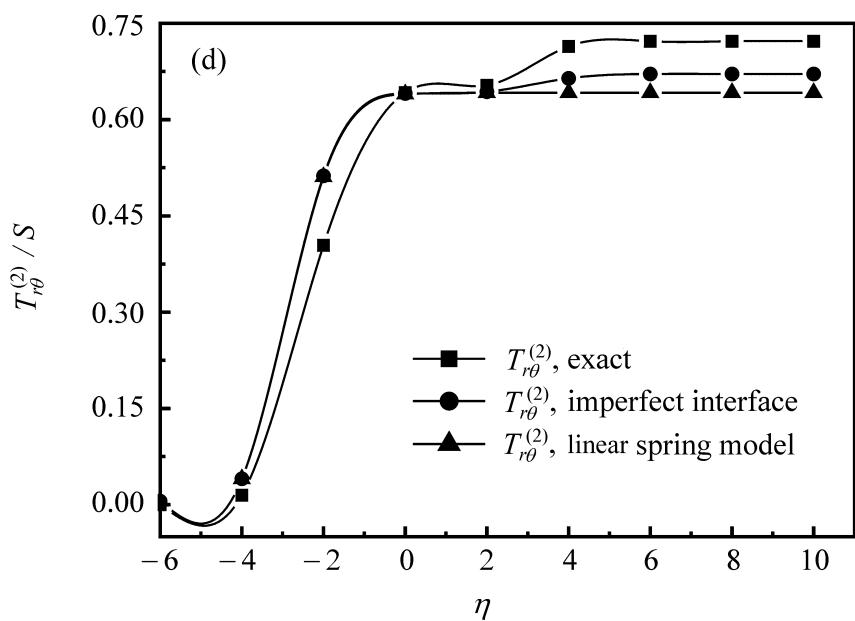
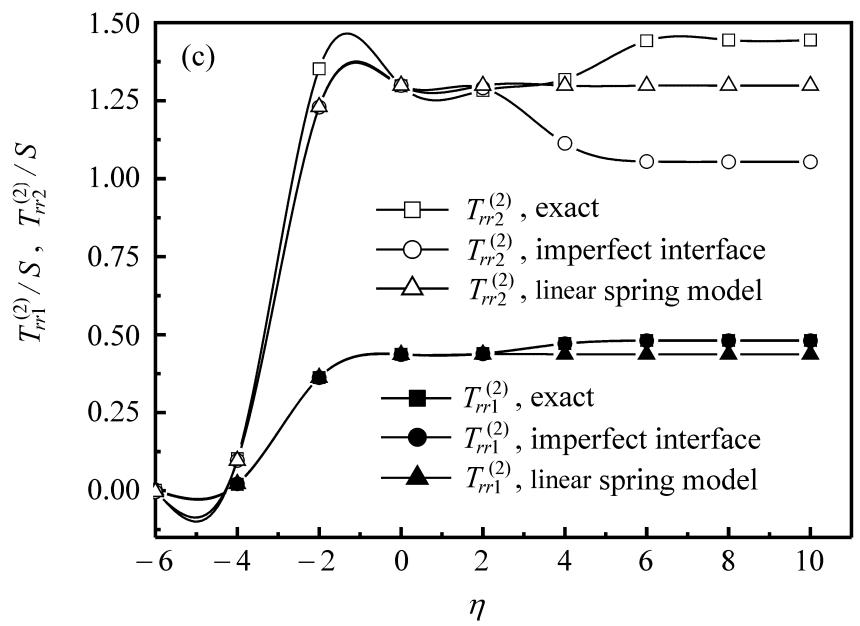
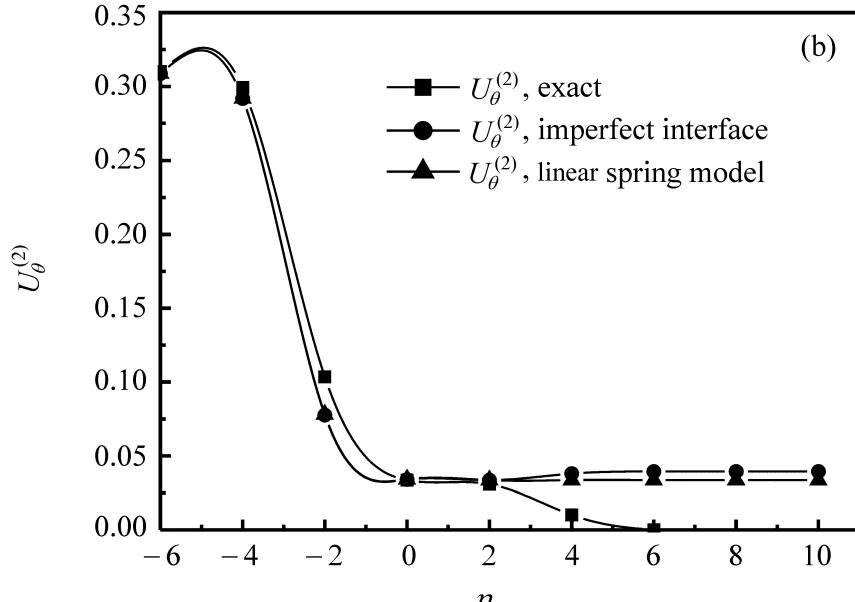
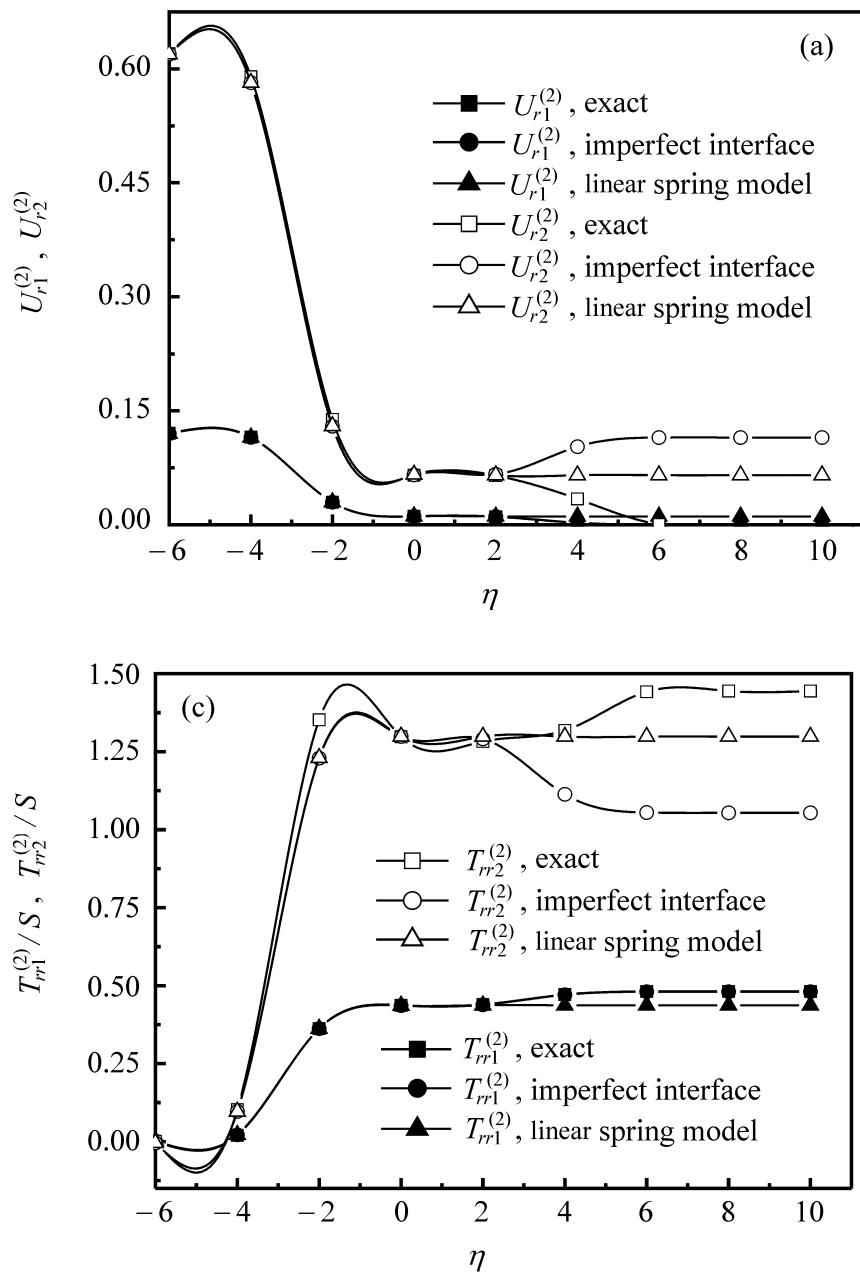
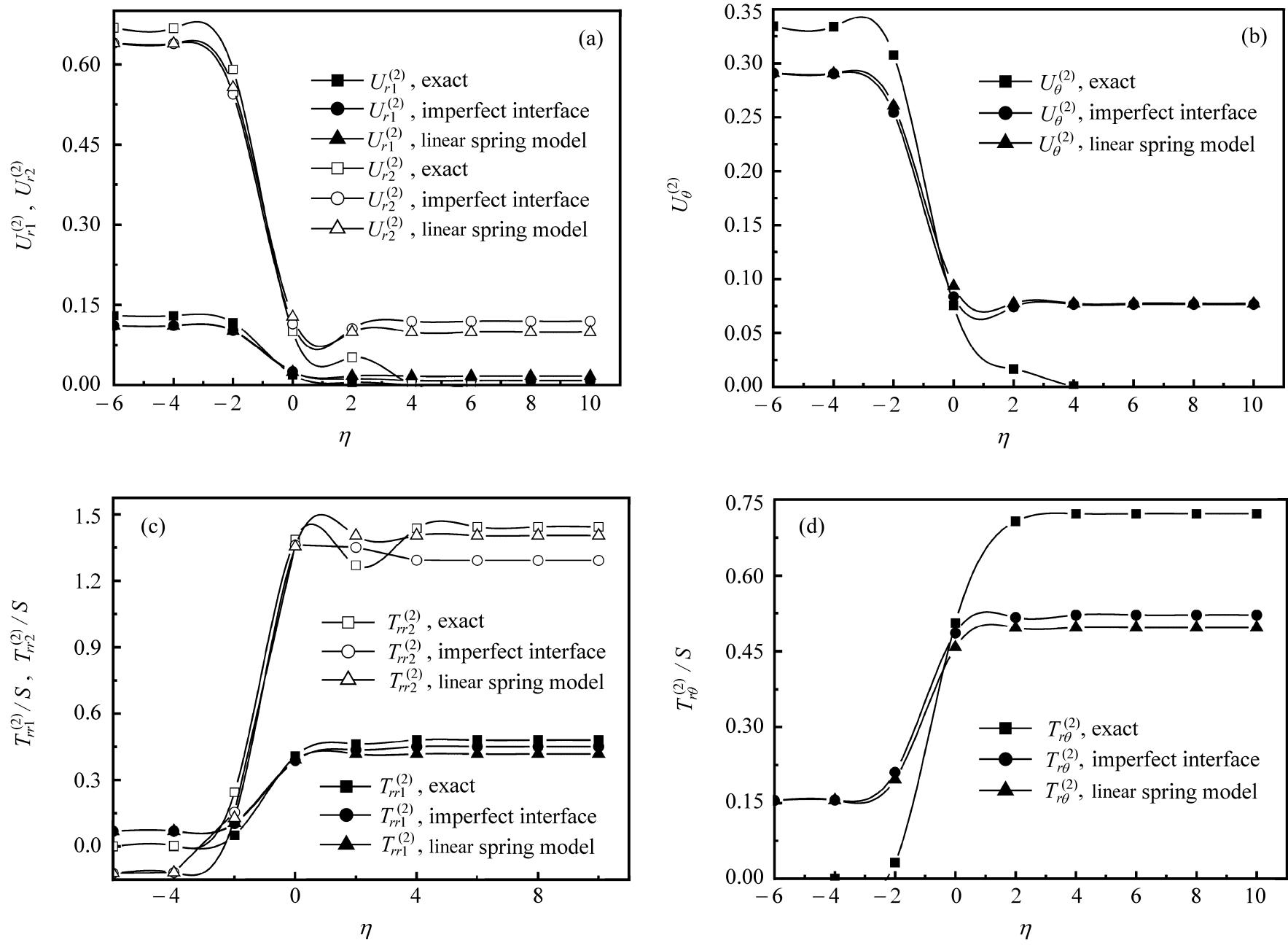


图2 不完善界面、线弹簧界面和薄界面相的法向、切向位移和法向、切向应力随 $Z(\log(\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2))$ 的变化关系(界面厚度 $t = 0.002$)

Fig. 2 Normal, tangential displacements and normal, tangential stresses as functions of $Z(\log(\underline{\epsilon}_i/\underline{\epsilon}_2))$ (Thickness of interphase $t = 0.002$)

图3 不完善界面、线弹簧界面和薄界面相的法向、切向位移和法向、切向应力随 $Z(\log(_1/_2))$ 的变化关系(界面相厚度 $t=0.08$)Fig. 3 Normal, tangential displacements and normal, tangential stresses as functions of $Z(\log(_1/_2))$ (Thickness of interphase $t=0.08$)

界面和线弹簧界面的解受界面相厚度影响不大, 其原因是界面模型假定界面是没有厚度但具有不同于基体和粒子弹性性质的物质。

对于与薄的任意刚度的界面相等效的不完善界面, 当薄界面相较软时, 位移间断量较大而应力间断量很小, 不完善界面类似于线弹簧界面。因此, 线弹簧模型和界面相模型之间可以建立起精确的关系, 所得的弹簧常数表达式(29)是合理的。但是, 当薄界面相较硬时, 位移间断量很小而应力间断量较大, 不完善界面和线弹簧界面差别较大, 线弹簧界面模型和界面相模型之间的等效关系就不再精确了, 这进一步解释了弹簧常数的计算结果式(26)~式(28)不合理的原因。

3 线弹簧界面的法向嵌入

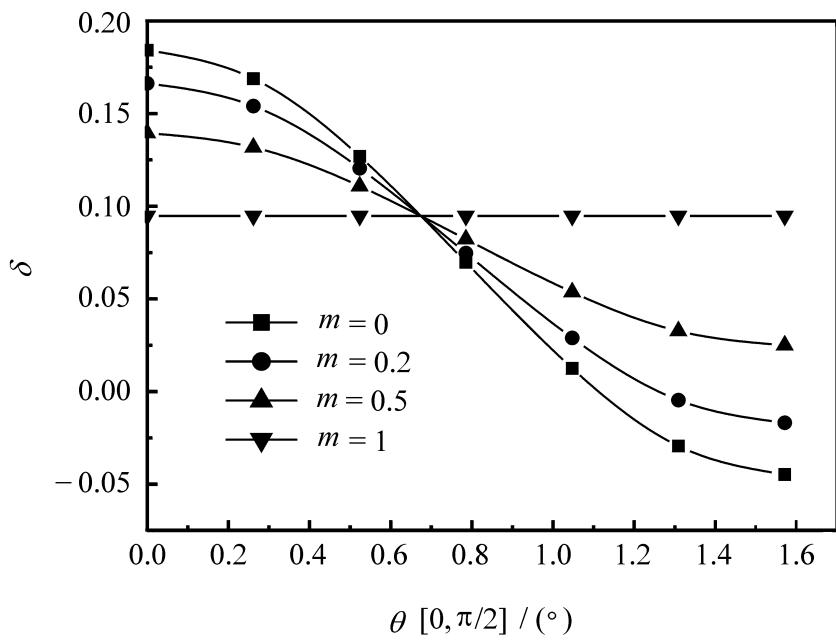
线弹簧模型条件(20)会引起界面的法向嵌入的不合理现象。Gao^[5]讨论了单轴拉伸载荷作用下线弹簧界面模型的二维嵌入问题。以下将讨论具有线

弹簧界面的球形粒子在远场三轴度载荷下的法向嵌入条件。

当球形粒子和无限大基体之间为线弹簧界面连接时, 其弹性解仍由式(1)~式(4)给出。六个常数 G_1, C_1, D_1, F_2, A_2 和 B_2 具有相同的界面相, 其余六个常数 A_1, B_1, F_1, G_2, C_2 和 D_2 由式(1)~式(4)代入式(20)得到。保证界面不嵌入的条件是在 S_{11} 界面上的法向位移间断量大于或等于零, 即

$$\begin{aligned} [u_r(1, \cdot)] &= u_r^{(2)}(1, \cdot) - u_r^{(1)}(1, \cdot) \\ &= -G_2 + \frac{6F_{1_1}}{3k_1 + _1} - \frac{6F_{2_2}}{3k_2 + _2} + \\ &\quad \left(-\frac{1 + 3\cos^2 _1}{2} - 2B_1 - \frac{6A_1(3k_1 - 2_1)}{3k_1 + _1} + \right. \\ &\quad \left. 2B_2 - 3D_2 + \frac{18C_2(k_2 + _2)}{3k_2 + _2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

图4给出了 S_{11} 界面上的法向位移间断量在不同的三轴度参数 m 下随 $_1$ 的变化关系($_1/_2 = 25, k_1/k_2 = 11.6, _1 = 0.3, _3 = 0.4$)。从图4可以看出:

图 4 位移间断量在不同的 m 时随 θ 的变化关系Fig. 4 Displacement jump as a function of θ at different triaxiality parameter m

最大的正位移间断量出现在极点, 并且最大正位移间断量随 m 减小而增大。对静水拉伸载荷 ($m = 1$), 位移间断量总大于零且为常数, 这表示此时无嵌入发生。当 m 很小或单轴拉伸载荷 ($m = 0$), S_{1i} 界面上的位移间断量逐渐从极点 ($\theta = 0$) 处的最大正值变化到赤道 ($\theta = \pi/2$) 处的最大负值。所以在 m 值较小时, 嵌入将发生在赤道处。

在轴对称载荷 ($m = T/S$) 下, 赤道处的位移间断量为

$$W = B_1 - B_2 + \frac{3}{2}D_2 - G_2 + \frac{3A_1(3k_1 - 2\gamma_1)}{3k_1 + \gamma_1} + \frac{6F_{1\gamma_1}}{3k_1 + \gamma_1} - \frac{6F_{2\gamma_2}}{3k_2 + \gamma_2} - \frac{9C_2(k_2 + \gamma_2)}{3k_2 + \gamma_2} \quad (32)$$

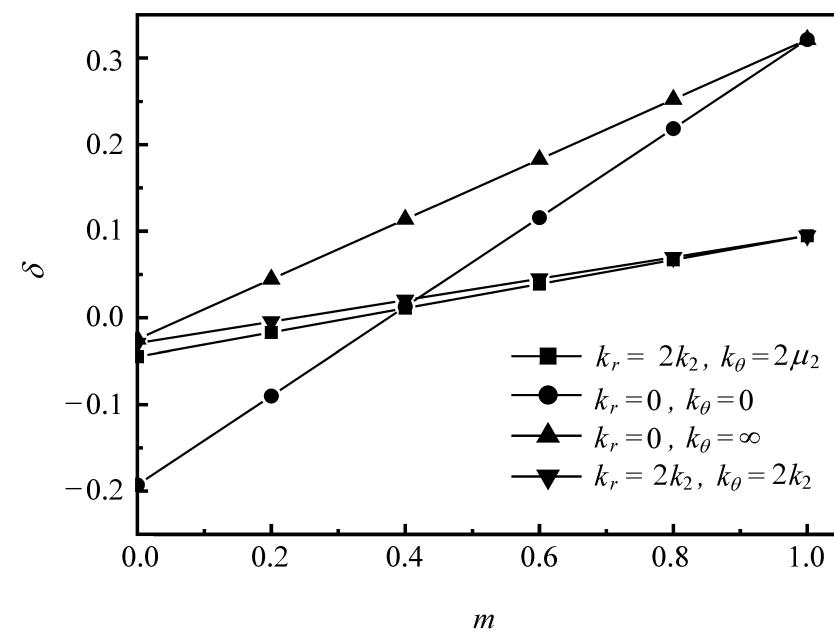
保证无嵌入的条件是

$$W = u_r(1, \frac{\pi}{2}) > 0 \quad (33)$$

赤道处的位移间断量 W 不仅取决于远场载荷的三轴度参数 m , 还与弹簧常数及基体和粒子的模量有关。粒子和基体的材料常数、界面的弹簧常数和 m 只要满足不等式 (33), 则无嵌入发生。否则, 就会出现嵌入现象。 W 是 m 的线性函数, 对于给定的模量和弹簧常数, 存在一个临界三轴度参数 m_{cr} , 若 $m < m_{cr}$, 则 $W < 0$, 嵌入发生, 否则, $W > 0$, 不会发生嵌入现象。图 5 给出了在赤道处的位移间断量 W 随三轴度 m 的变化关系 ($\gamma_1/\gamma_2 = 25$, $k_1/k_2 = 11.6$, $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_3 = 0.4$), 从图中可见, 当弹簧常数 $k_r = 2k_2$, $k_l = 2\gamma_2$ 时, m_{cr} 约等于 0.4。

为了进行全面的分析, 以下考虑几种特殊情形:

(1) 切向有滑动、法向完好连接 ($k_r = 0$)

图 5 位移间断量(赤道处)随三轴度参数 m 的变化关系Fig. 5 Displacement jump (at the equator) as a function of triaxiality parameter m

$$\lim_{k_r \rightarrow 0} W = 0 \quad (34)$$

上式表明: 对任意的弹性模量、切向弹簧常数 k_l 和远场载荷三轴度 m , 都不会发生嵌入现象。

(2) 法向和切向有脱粘 ($k_r = 0$, $k_l = 0$)

$$\lim_{k_l \rightarrow 0} W = \frac{(3k_2 + 4\gamma_2)S[3(-7 + 16m)k_2 + 8(1 + 2m)\gamma_2]}{36k_2\gamma_2(9k_2 + 8\gamma_2)} \quad (35)$$

$k_r = 0$ 和 $k_l = 0$ 意味着界面的整体或部分在法向和切向发生了脱粘, 由式 (35) 可见, 此时嵌入是否发生取决于基体的模量和三轴度 m , 保证不发生嵌入的临界三轴度为

$$m_{cr} = \frac{21k_2 - 8\gamma_2}{16(3k_2 + \gamma_2)} = \frac{1 + 5\gamma_2}{8} \quad (36)$$

从图 5 可以看出, 若 $m > m_{cr}$, 则 $W > 0$, 即在赤道处无嵌入发生。因此, 在这种情形下, 界面发生整体脱粘。但是当 $m < m_{cr}$, 则 $W < 0$, 赤道处有嵌入, 此时界面只是部分脱粘。

(3) 法向和切向参数相等 ($k_r = k_l$), 相应的临界三轴度值见图 5。

(4) 法向参数小而切向参数大 ($k_r = 0$, $k_l = \infty$)。

由图 5 可见, 此时 m_{cr} 很小 ($m_{cr} = 0.1$), 并且在单向拉伸载荷时位移嵌入量很小。

4 结 论

(1) 对于无限大基体中的单个球形粒子, 建立了与界面相等效的不完善界面条件和线弹簧界面条件。把不完善界面条件和线弹簧界面条件的解与界面相的精确解做了数值比较, 当界面相和基体的模量比值较小时, 不完善界面或线弹簧界面可精确地

等效于薄的界面相。

(2) 根据线弹簧界面与具有任意模量的薄界面相间的等效关系, 得到了弹簧常数的表达式。由于线弹簧界面不能与刚度较大的薄界面相等效, 因此弹簧常数的表达式在某些情况下是不合理的。

(3) 根据线弹簧界面的性质, 讨论了界面可能的法向嵌入, 建立了防止嵌入发生的条件。对给定的弹性模量和弹簧常数, 存在一个临界的应力三轴度值, 若三轴度小于此临界值, 则有嵌入发生, 否则不发生嵌入。

参考文献:

- [1] Jasiuk I, Tsuchida E, Mura T. The sliding inclusion under shear [J]. Int J Solids Struct, 1987, 23(10): 1373- 1385.
- [2] Hashin Z. The spherical inclusion with imperfect interface [J]. J Appl Mech, 1991, 58(2): 444- 449.

- [3] Zhong Z, Meguid S A. On the imperfectly bonded spherical inclusion problem [J]. J Appl Mech, 1999, 66(4): 839- 846.
- [4] Shen H, Schiavone P, Ru C Q, et al. Analysis of internal stress in an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity [J]. Math Mech Solids, 2000, 5(4): 501- 510.
- [5] Gao Z. A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby's tensor and related problems [J]. J Appl Mech, 1995, 62(4): 860- 866.
- [6] Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding [J]. ASME J Appl Mech, 1987, 54(3): 525- 533.
- [7] Benveniste Y, Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity [J]. Mech Mater, 2001, 33(6): 309- 323.
- [8] Hashin Z. The interphase/ imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites [J]. J Mech Phys Solids, 2002, 27(12): 2509- 2537.