

模拟纤维增强复合材料的相似子域边界元法

孔凡忠¹, 张金换¹, 王朋波², 姚振汉^{2,*}

(1. 清华大学 汽车安全与节能国家重点实验室, 北京100084; 2. 清华大学 工程力学系, 北京100084)

摘要: 根据夹杂相积分区域的相似性, 提出了相似子域边界元法求解方案。把含随机分布夹杂相的固体归结为对一个含有内边界条件复连通域问题的求解, 与传统的有限元和边界元分域解法相比, 显著地提高了计算效率。应用相似子域边界元法, 对含有随机分布圆形和椭圆形夹杂相的固体材料进行了大量数值计算, 并把夹杂相与基体材料之间从理想粘结扩展到带有界面层的情况。这些计算为相应纤维增强复合材料宏观等效力学特性研究提供了有效的数值模拟方法。

关键词: 纤维增强复合材料; 随机分布; 夹杂; 相似子域; 边界元法

中图分类号: TB 330. 1 **文献标识码:** A

NUMERICAL SIMULATION OF FIBER REINFORCED COMPOSITES USING SIMILAR SUB-DOMAIN BEM SCHEME

KONG Fanzhong¹, ZHANG Jinhuan¹, WANG Pengbo², YAO Zhenhan^{2,*}

(1. State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the similarity of integration area of random inclusions, similar sub-domain boundary element method scheme has been presented for the first time in this paper. Then, the 2D solid with randomly distributed inclusions can be reduced to a multiply connected domain of the matrix with inner boundary conditions. In this way, computational efficiency is enhanced significantly comparing to the conventional multi-domain approach of the FEM or BEM. As numerical examples, plenty of numerical computation for the solid with randomly distributed circular or elliptic inclusions is performed using the similar sub-domain BEM scheme. Furthermore, the interface between the matrix and inclusion can be not only ideal interface, but also the interface with interphase layers. The above mentioned computation provides reliable numerical simulation methods for the investigation of the macroscopically effective properties of the corresponding fiber-reinforced composites.

Keywords: fiber-reinforced composites; randomly distributed; inclusion; similar sub-domain; boundary element method

随着科学技术的进步和现代工业的发展, 大量纤维增强复合材料在汽车工程、土木建筑等行业得到广泛应用, 复合材料等效力学特性及其破坏过程的研究日益受到工程界和学术界的重视。一般地, 复合材料可以看作在基体材料中嵌入了各种不同的夹杂相, 其宏观等效力学特性主要取决于所嵌入夹杂相的尺寸、形状、性质、体积比和空间分布。许多学者采用不同的均匀化方案, 建立复合材料的宏观-微观本构模型, 得到各种近似求解方案, 主要

包括稀疏解法、CCM方法^[1]、广义自洽法^[2]、Mori-Tanaka方法^[3]和IDD方法^[4]等。这些近似解法都进行了简化处理, 可以采用统一的Budiansky能量框架进行描述^[5], 其缺点在于不能够精确描述夹杂相之间的相互作用。

据本文作者所知, 对于复合材料宏观等效力学特性的研究, 公开发表的文献中只有少量的试验结果和数值结果, 但此项研究还在不断取得新的进展。Isida^[6]提出复位势函数级数展开的方案, 对周

期性排列的孔洞模型进行了计算。Day^[7] 对域内含有三角形或者六角形排列的圆孔模型和域内含有随机分布相互重叠贯穿的圆孔模型进行了计算分析。Suquet^[8,9] 等提出基于快速傅立叶变换 (FFT) 的计算方案, 对含随机分布圆形和六边形夹杂的板材进行了计算。本研究组将边界元法用于模拟含随机分布圆形夹杂的二维弹性体, 得到了等效弹性常数随孔洞体积比的变化规律^[10,11]。

根据夹杂相积分区域的相似性, 本文中提出了相似子域边界元法求解方案。把含随机分布夹杂相的固体归结为对一个含有内边界条件复连通域问题的求解, 与传统的有限元和边界元分域解法相比, 显著地提高了计算效率。应用相似子域边界元法, 对含有随机分布圆形和椭圆形夹杂相的固体材料进行了计算, 并把夹杂相与基体材料之间从理想粘结扩展到带有界面层的情况。

1 相似子域边界元法求解方案

选用如图1 所示的含 n 个随机分布夹杂相的二维平面问题, 以说明相似子域边界元求解方案。其中: Ω_0 为基体弹性材料所占区域; $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_n$ 分别为各个弹性夹杂相所占区域; Γ_j 为基体和夹杂相的界面边界; Γ_0 是基体的外边界。此外, \bar{u}_0, \bar{t}_0 分别表示外边界中给定面力和给定位移的部分。

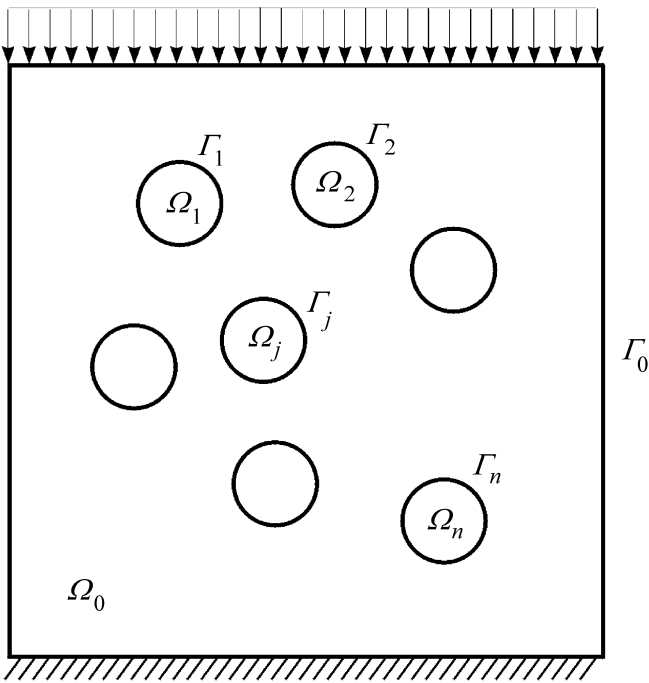


图1 含随机分布圆形夹杂的二维弹性体

Fig 1 Model of 2D solids with random inclusions

对基体子域 Ω_0 和第 j 个夹杂相 Ω_j 分别列出边界积分方程

$$C(p)u(p) = \int_{\Gamma_0 + \Gamma_j} U(p,q)t^0(q)d(q)$$

$$- \int_{\Gamma_j} T^0(p,q)u(q)d(q) \tag{1}$$

$$C(p)u(p) = \int_j U(p,q)t^j(q)d(q) - \int_j T^j(p,q)u(q)d(q) \tag{2}$$

式中: 上下标 0 和 j 分别代表基体子域和第 j 个夹杂相子域; $C(p)$ 是依赖于边界点 p 处几何特征的常数; $U(p,q)$ 、 $T^0(p,q)$ 和 $T^j(p,q)$ 分别是二维弹性问题的基本解; u 、 t 分别为边界位移和边界面力。

分元插值离散后, 写成矩阵方程形式

$$\begin{matrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & U^0 & B_{11}^0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 & \bar{T}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & A_{23}^0 & T^0 & B_{21}^0 & B_{22}^0 & B_{23}^0 & \bar{U}^0 \\ A_{31}^0 & A_{32}^0 & A_{33}^0 & U^j & B_{31}^0 & B_{32}^0 & B_{33}^0 & T^{j0} \end{matrix} = \tag{3}$$

$$G^j T^{jj} = H^j U^j \tag{4}$$

式中: U^0 、 \bar{T}^0 分别为基体给定面力边界 Γ_0 的未知结点位移矢量和给定结点面力矢量; T^0 、 \bar{U}^0 分别为基体给定位移边界 Γ_0 的未知结点面力矢量和给定结点位移矢量; U^j 为夹杂界面 Γ_j 的未知位移矢量; T^{j0} 、 T^{jj} 分别为对应于基体子域的界面结点未知面力矢量和对应于夹杂子域的界面结点未知面力矢量。

考虑到夹杂界面两边连续条件, 可以得到

$$T^{jj} = -T^{j0} \tag{5}$$

把方程 (5) 代入方程 (4), 可以得到夹杂界面边界线的位移面力之间的关系

$$T^{jj} = -T^{j0} = -(G^j)^{-1} H^j U^j \tag{6}$$

表征夹杂界面面力与位移之间的关系矩阵为

$$D^j = (G^j)^{-1} H^j \tag{7}$$

式中: 对应于某一夹杂子域的系数矩阵 G 和 H 为

$$G^j = \sum_{m=1}^{N^e} U_{n(m)}^* N_m d(j) \tag{8}$$
$$H^j = C_n + \sum_{m=1}^{N^e} T_{n(m)}^* N_m d(j)$$

把方程 (6) 代入方程 (3), 可以得到模拟含单个夹杂相二维固体的求解方程组为

$$\begin{matrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & + & B_{13}^0 (G^j)^{-1} H^j & U^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & A_{23}^0 & + & B_{23}^0 (G^j)^{-1} H^j & T^0 \\ A_{31}^0 & A_{32}^0 & A_{33}^0 & + & B_{33}^0 (G^j)^{-1} H^j & U^j \end{matrix} = \begin{matrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 & \bar{T}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 & \bar{U}^0 \\ B_{31}^0 & B_{32}^0 & \bar{U}^0 \end{matrix} \tag{9}$$

对于含 n 个随机分布夹杂相的固体而言, 如果仍然按照常规的边界元分域解法进行计算, 将会得到一个 $n+1$ 子域的问题, 需要 $n+1$ 个方程组联合求解。显然, 随着夹杂相数目的增加, 计算量迅速增加。

对于完全相同的夹杂相 (形状、大小和材料性质完全相同), 在相同分元插值离散条件下, 其关系矩阵 D^j 是相同的, 如方程 (10) 所示。因此, 由方程 (8) 所确定的系数矩阵 G 和 H 对于相同的夹杂相只需要求解一次。

$$D^j = D \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

与方程 (9) 类似, 可以把含 n 个随机分布相同夹杂相的固体简化为对一个含有内边界条件基体复连通域问题的求解, 如下述方程所示。

$$\begin{array}{ccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{13} & \dots & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{23} & \dots & A_{23} \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 & \dots & A_{33}^1 & \dots & A_{33}^n \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots & W & \dots \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i & \dots & A_{33}^i & \dots & A_{33}^i \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots & W & \dots \\ A_{31}^n & A_{32}^n & A_{33}^n & \dots & A_{33}^n & \dots & A_{33}^n \\ U & B_{11} & B_{12} & & & & \\ T & B_{21} & B_{22} & & & & \\ U^1 & B_{31}^1 & B_{32}^1 & & & \bar{T} & \\ \dots & \dots & \dots & & & \bar{U} & \\ U^i & B_{31}^i & B_{32}^i & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ U^n & B_{31}^n & B_{32}^n & & & & \end{array} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A_{13}^i &= A_{13}^i + B_{13}^i (G)^{-1} H \\ A_{23}^i &= A_{23}^i + B_{23}^i (G)^{-1} H \\ A_{33}^{ij} &= A_{33}^{ij} + B_{33}^{ij} (G)^{-1} H \end{aligned} \quad (12)$$

式中: 第一下标表示离散化边界积分方程中的源点结点 p 处在哪段边界线; 第二下标表示场点结点 q 处在哪段边界线。1 代表外边界给定面力的部分; 2 代表外边界给定位移的部分; 3 代表基体与夹杂的界面。当下标出现 3 时, 使用第一个和第二个上标 (如果有第二个) 表示源点结点 p 和场点结点 q 所在的内边界线的数目。

方程 (11) 中的 U 、 T 和 U^i 分别为外边界给定面力部分的未知位移矢量、外边界给定位移部分的未知面力矢量和基体与第 i 个夹杂相界面处的未

知位移矢量; \bar{T} 和 \bar{U} 分别为外边界的给定面力值和给定位移值。

如果固体材料中随机分布的弹性夹杂相具有相同的大小、形状和波松比, 只是杨氏模量不同, 那么, 上述的边界元求解方案也很容易推广应用于此类问题的求解。对于仅仅杨氏模量不同的弹性夹杂相, 其关系矩阵 D^j 之间具有方程 (13) 确定的关系。由方程 (8) 所确定的系数矩阵 G 和 H 对于不同杨氏模量的夹杂相只需要求解一次。

$$D^{j+1} = \frac{E^{j+1}}{E^j} D^j \quad (13)$$

如果域内随机分布的夹杂相具有相同的形状和杨氏模量, 只是大小不同, 根据方程 (7) 和方程 (8), 推导得到不同大小圆形夹杂相关联矩阵 D^j 之间的关系如方程 (14) 所示。于是, 由方程 (8) 所确定的系数矩阵 G 和 H 对于不同大小的夹杂相只需要求解一次。

$$\begin{aligned} D^{j+1} &= (G^{j+1})^{-1} H^{j+1} \\ D^j &= (G^j)^{-1} H^j \\ H^j &= H^{j+1} \\ G^{j+1} &= C G^j - \ln C \quad N_j \quad d_{j+1} \end{aligned} \quad (14)$$

式中: C 为表征圆形夹杂相尺寸大小的比例因子。

如果各个夹杂相的形状不同, 而且不同形状夹杂相的类型数 k 远远小于夹杂相的总数 N , 那么, 与夹杂相有关的矩阵方程 (12) 可以改写为

$$\begin{aligned} A_{13}^i &= A_{13}^i + B_{13}^i (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)} \\ A_{23}^i &= A_{23}^i + B_{23}^i (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)} \\ A_{33}^{ij} &= A_{33}^{ij} + B_{33}^{ij} (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $k=1, 2, \dots, j, \dots, m$ 表示不同形状的夹杂类型数; $k(i)$ 是一个随机函数。对于每一种不同形状的夹杂相, 由方程 (8) 所确定的系数矩阵 G 和 H 需要求解一次。

总之, 对含 n 个随机分布多种不同形状、不同大小、不同杨氏模量弹性夹杂相的二维固体, 采用本文中提出的边界元求解方案, 只需求解一个相应于基体材料的含内边界条件的复连通域问题, 由方程 (11) ~ 方程 (15) 确定, 则在保持计算精度的条件下, 显著提高了计算效率。本文中把上述求解过程称之为相似子域边界元法求解方案。

2 夹杂相界面层处理方案

选用图2 所示有界面层的夹杂模型, 以说明夹

杂相界面层的处理方案。其中: 边界线 Γ_i 内为夹杂相; 边界线 Γ_i 和 Γ_i' 之间为界面层材料; 边界线 Γ_i' 以外为基体材料。

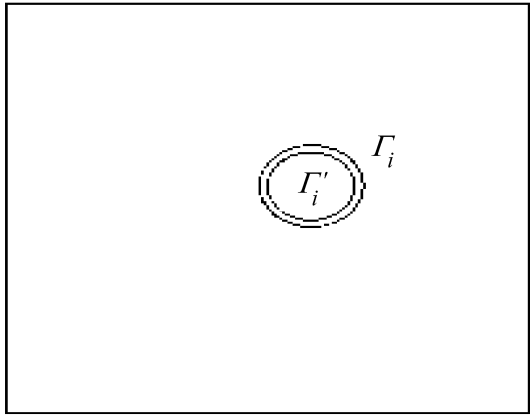


图2 带有界面层的夹杂相

Fig 2 Model of inclusion with interphase

对应于界面层和夹杂相的边界元方程可以分别写成下述矩阵方程。

$$\begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^i \\ T^{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^i \\ U^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$H^i U^i = G^i T^{ii} \quad (17)$$

式中: U^i 、 T^{ii} 分别为边界线 Γ_i 和 Γ_i' 上的位移; T^i 、 U^i 分别为界面层在边界 Γ_i 和 Γ_i' 上的面力; T^{ii} 是夹杂边界线 Γ_i' 上的面力。显然, T^{ii} 和 T^{ii} 是作用面力和反作用面力。于是

$$T^{ii} = -T^{ii} = -(G^i)^{-1} H^i U^i = -D^i U^i \quad (18)$$

把方程 (18) 代入方程 (16), 可得

$$\begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i + A_{12}^i D^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i + A_{22}^i D^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^i \\ U^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^i \\ A_{21}^i \end{bmatrix} U^i \quad (19)$$

于是

$$\begin{bmatrix} T^i \\ U^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i + A_{12}^i D^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i + A_{22}^i D^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11}^i \\ A_{21}^i \end{bmatrix} U^i = \begin{bmatrix} D^i \\ C^i \end{bmatrix} U^i \quad (20)$$

式中: 关联矩阵 D^i 和在方程 (7) 中的作用相同。在本文中第 2 节所述的相似子域边界元求解方案中, 引入由方程 (20) 确定的关联矩阵 D^i , 就可以处理带有界面层的夹杂相问题了。

由于夹杂相界面层通常是非常薄的, 因此, 当源点和场点分别处于界面层两表面邻近时, 边界元数值计算将出现处理近奇异积分的问题。对此, 本文中采用文献 [12] 提出的方案来处理。

3 数值算例

一般地, 含随机分布椭圆夹杂的固体可作为纤维增强复合材料的计算模型。当椭圆度为 1.0 时, 椭圆夹杂就退化为圆形夹杂。

3.1 含单个和两个非常接近椭圆夹杂的板材

如图 3 和图 4 所示。含单个和两个非常接近椭圆形夹杂的方板对边受拉, 方板边长 $L = 100 \text{ mm}$, 载荷 $q = 10 \text{ MPa}$ 。椭圆长半轴 $a = 1.0 \text{ mm}$, $a/b = 2.0$; 夹杂边界线间最小距离 $e = 0.1 \text{ mm}$; 基体材料参数 $E_1 = 10 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.3$; 椭圆夹杂材料参数 $E_2 = kE_1$, $\nu_2 = 0.3$ 。

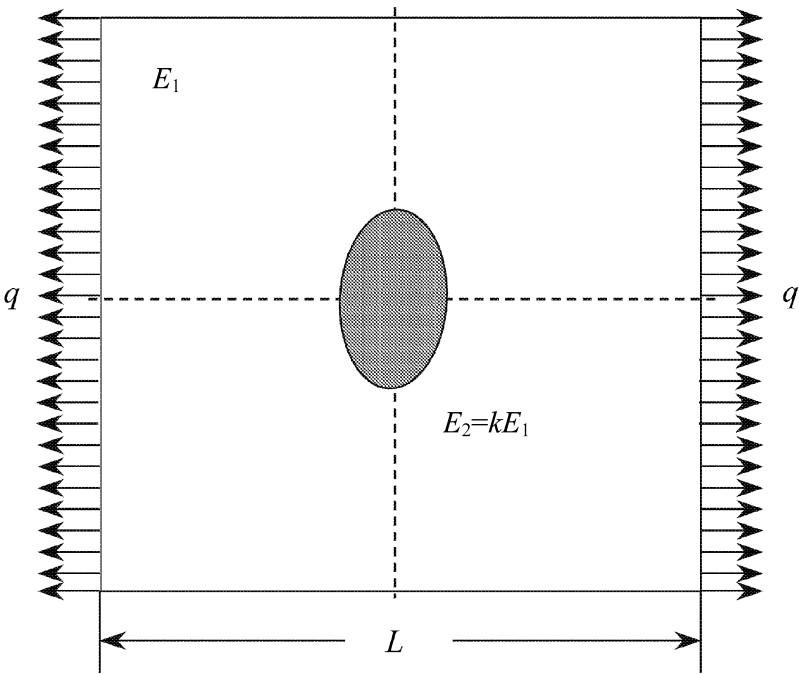


图3-1 中心含单个椭圆夹杂的方板

Fig 3-1 A square sheet with one elliptic inclusion in the center

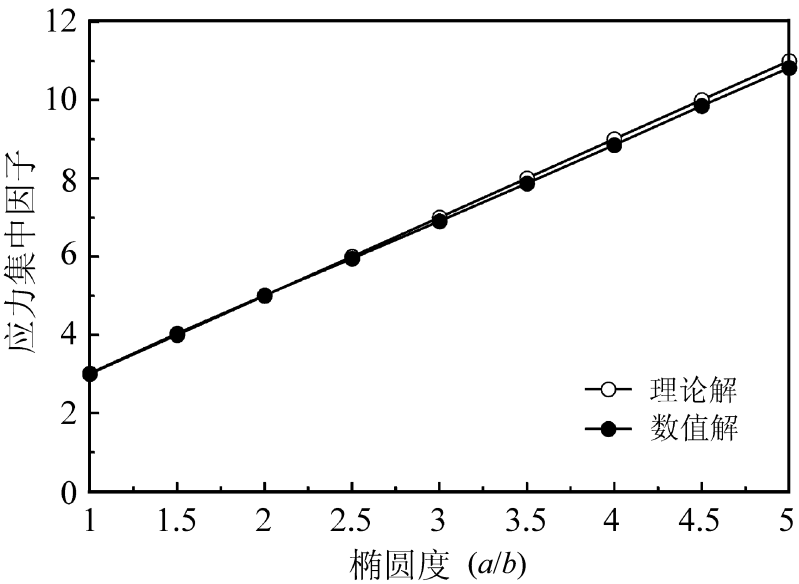


图3-2 应力集中因子 a/b 与之间的关系曲线

Fig 3-2 Relation between stress concentration factor and a/b of an elliptic inclusion

由 $E_2 = 0$ 时的应力集中因子与椭圆度关系曲线可知, 边界元数值解与理论解非常吻合。随着椭圆度增加, 数值解与理论解之间的误差缓慢趋于增大, 这表明相似子域边界元求解方案具有很高的计算精度。

由 $E_2 = 0$ 时夹杂界面 Von-Mises 应力曲线可

知，随着曲率的增大，Von-Mises 应力增大，Von-Mises 应力曲线的不对称性充分反应了椭圆夹杂之间的相互作用。相似子域边界元法（20 二次边界单元）与有限元法（38290 二次单元）计算精度基本相同，这表明对于此类问题的数值计算相似子域边界元法具有更高的计算效率。

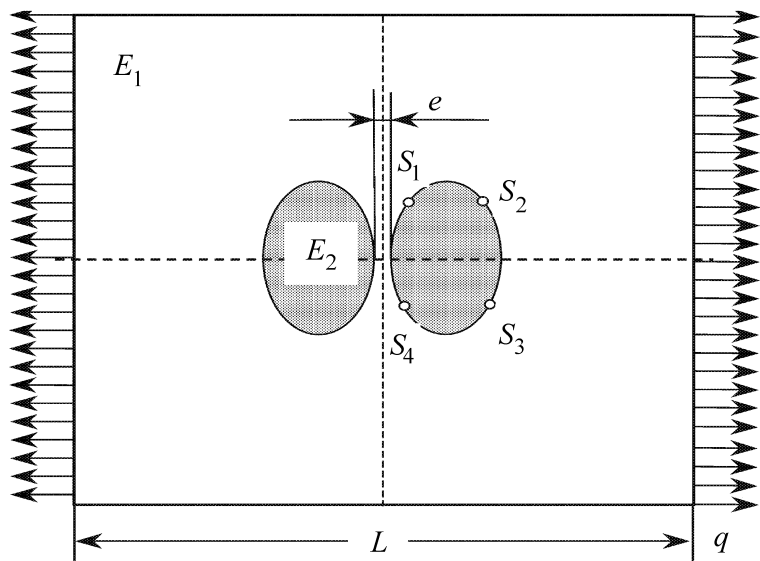


图 4-1 含两个非常接近椭圆夹杂的方板

Fig 4-1 A square sheet with two very dose elliptic i nclusions

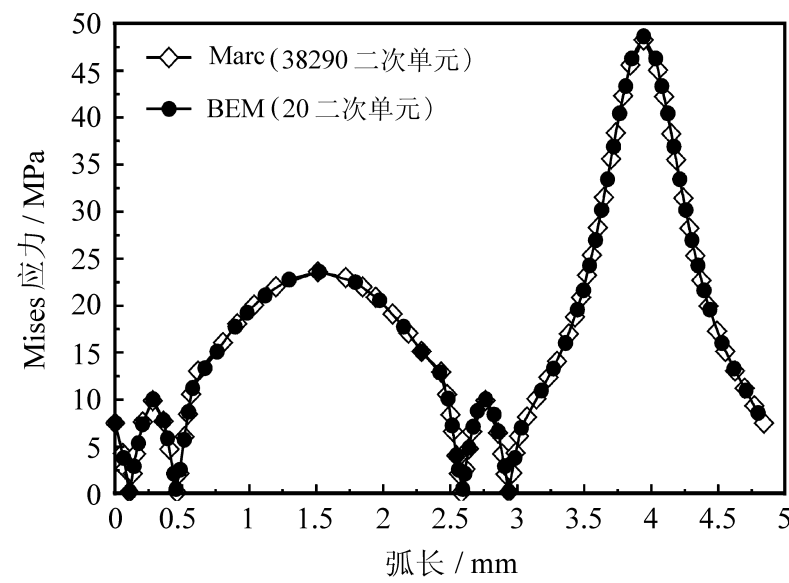


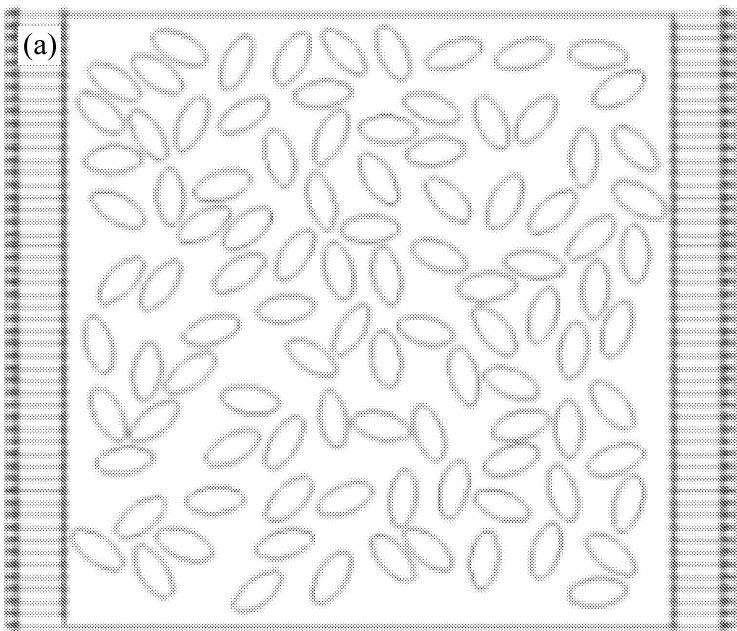
图 4-2 夹杂界面边界线 Von-Mises 应力比较

Fig 4-2 Co mparison of Von- Mises stress on the matrix-inclusion interface boundary

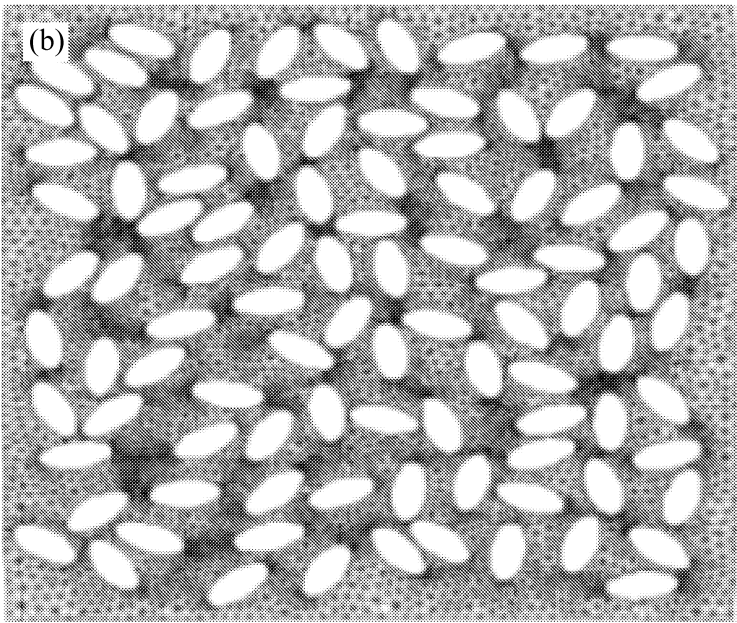
3 2 含随机分布椭圆形夹杂的柱形体

含100 个随机分布椭圆夹杂柱形体的截面为正方形（如图5(a)）。方板的边长为100 mm，两边的拉伸载荷为20 MPa，椭圆度为2 0，所有椭圆夹杂所占体积比为0. 4。于是，如果所有椭圆夹杂的大小相同，那么，根据100 个椭圆夹杂的体积比可以自动确定椭圆夹杂的长短半轴。此外，域内网格仅仅便于用来描述板材的变形和应力情况。

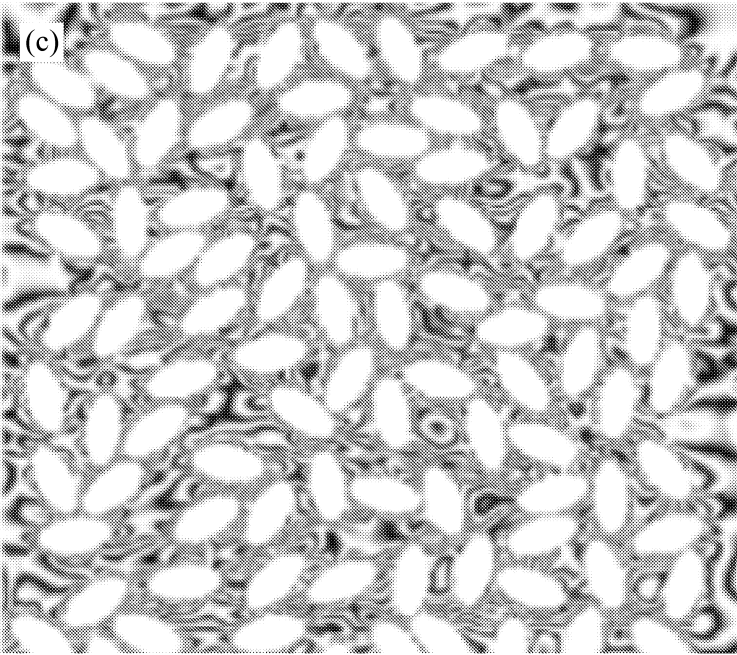
当椭圆夹杂与基体材料的模量比为0. 5 时，计算得到变形和应力等差线图如图5(b) 和图5(c) 所示。从图中可以看出：随着椭圆夹杂之间距离减小，



(a) A square sheet



(b) Deformation pattern of a square sheet



(c) Stress isodiff plot of a square sheet

图 5 含100 个随机分布椭圆夹杂的方板、变形图和应力等差线图

Fig 5 Deformation pattern , stress isodiff plot of a square sheet with 100 randomly distributed elliptic i nclusions

等差线变密，表明夹杂之间的应力梯度增大。对于同一个椭圆夹杂而言，曲率较大的地方等差线更加密集，表明随着夹杂界面边界线曲率的增大，应力梯度迅速增大。

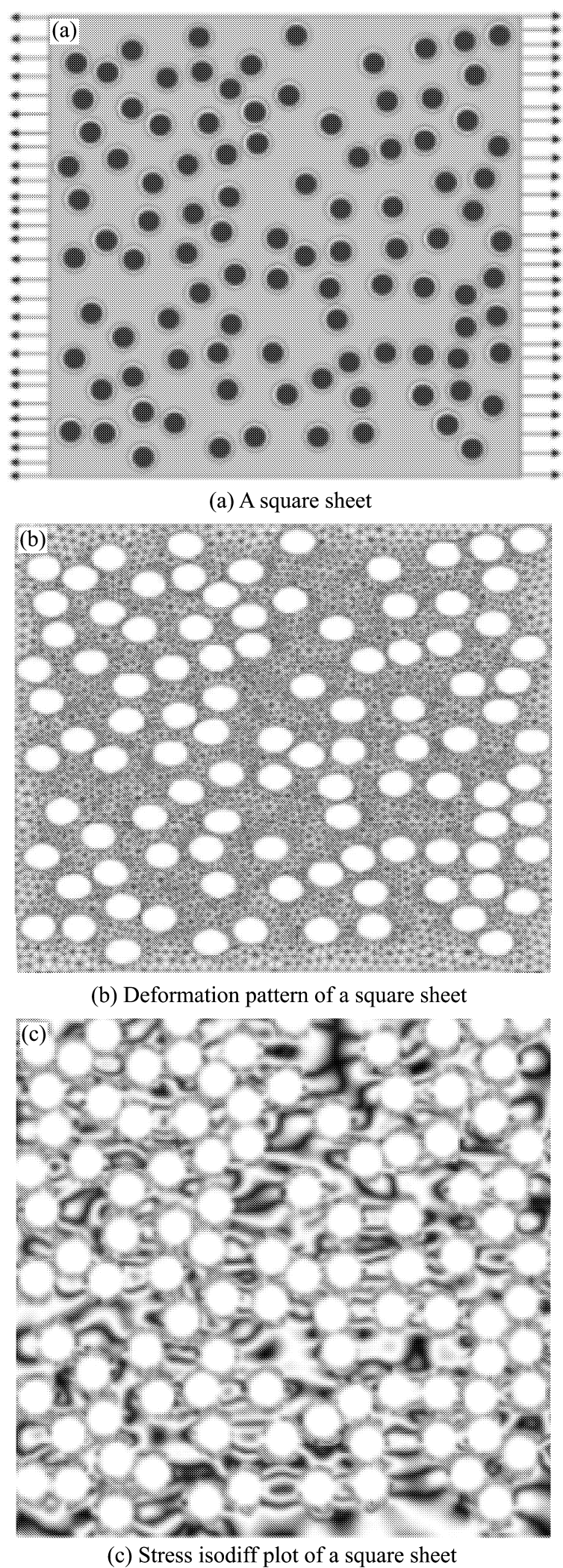


图6 含100个随机分布带界面层圆形夹杂的方板、变形图和应力等差线图

Fig 6 Deformation pattern, stress isodiff plot of a square sheet with 100 randomly distributed circular inclusions with interphases

3.3 基体与夹杂相之间带有界面层的算例

计算模型如图6(a)。正方形薄板边长为100 mm，两边的拉伸载荷为10 MPa，板厚1 mm，含

100个相同的带界面层的圆形夹杂相，夹杂半径为3 mm，界面层厚度为0.3 mm，夹杂与基体、界面层与基体的模量比分别为 $E_2/E = 0.5$ ， $E/E_1 = 0.2$ ，这是一个广义平面应力问题。

应用相似子域边界元法求解方案，计算得到变形和应力等差线如图6(b)和图6(c)所示。从图中可以看出：随着圆形夹杂之间距离减小，等差线变密，表明夹杂之间的应力梯度增大。

4 总结与讨论

(1) 根据夹杂相积分区域的相似性，提出了相似子域边界元法求解方案，把含随机分布夹杂相的固体归结为对一个含有内边界条件复连通域问题的求解。大量数值算例表明：与传统的有限元和边界元分域解法相比，该方案在保持边界元高精度的同时，能够显著提高计算效率。

(2) 应用相似子域边界元法，对含有随机分布圆形和椭圆形夹杂相的固体材料进行了大量数值计算，并把夹杂相与基体材料之间从理想粘结扩展到带有界面层的情况，这些计算为相应纤维增强复合材料宏观等效力学特性研究提供了有效的数值模拟方法。

(3) 如果把多极快速边界元法和相似子域边界元法相结合，将使计算规模得以显著扩大。把对纤维增强复合材料的数值模拟一方面从二维问题扩展到三维问题，另一方面从宏观等效力学特性研究发展到此类复合材料脆性破坏过程的模拟。

参考文献：

[1] Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous material [J]. J Appl Mech, 1962, 29(1): 143 - 150.

[2] Huang Y, Hu K X, Wei X, et al. A generalized self-consistent mechanics method for composite material with multi phase inclusions [J]. J Mech Phys Solids, 1994, 42(8): 491 - 504.

[3] Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka theory in composite materials [J]. Mech Mater, 1987, 6(2): 147 - 157.

[4] Zheng Q S, Du D X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multi phase composites which accounts for inclusion distribution [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, 49(11): 2765 - 2788.

[5] Huang Y, Huang K C, Hu K X, et al. A unified energy approach to a class of micro mechanics models for composite ma-

terials [J] . Acta Mechanica Sinica , 1995 , 11(1) : 59 - 75 .

[6] Isida M , Igawa H . Analysis of zig-zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension [J] . Int J Solids Struc , 1991 , 27(7) : 849 - 864 .

[7] Day A R , Snyder K A , Garboczi E J , et al . The elastic moduli of a sheet containing circular holes [J] . J Mech Phys Solids , 1992 , 40(5) : 1031 - 1051 .

[8] Moulinec H , Suquet P . A fast numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure [J] . Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 1998 , 157(1 - 2) : 69 - 94 .

[9] Michel J C , Moulinec H , Suquet P . A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast [J] . Int J Numer Meth Engng , 2001 , 52(1 - 2) : 139 - 160 .

[10] Hu N , Wang B , Tan G W , et al . Effective elastic properties of 2-D solids with circular holes : numerical simulations [J] . Composites Science and Technology , 2000 , 60 (9) : 1811 - 1823 .

[11] Kong Fanzhong , Yao Zhenhan , Zheng Xiaoping . BEM for simulation of a 2D elastic body with randomly distributed circular inclusions [J] . Acta Mechanica Solida Sinica , 2002 , 15(1) : 81 - 88 .

[12] Luo J F , Liu Y J , Berger E J . Analysis of two-dimensional thin structures (from micro to nano-scales) using the boundary element method [J] . Computational Mech , 1998 , 22 : 404 - 412 .