

文章编号: 1000-3851(2008)05-0157-06

纤维增强复合材料弹塑性性能的细观研究

张华山, 黄争鸣*

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 基于 Mori-Tanaka 方法和 Eshelby 等效夹杂理论, 建立弹性阶段基体和纤维平均应力之间的桥联矩阵, 导出了该矩阵各元素的显式。鉴于工程实际材料对柔度矩阵对称性的要求并考虑组分材料物理性能和细观几何特征等因素的影响, 对所导出的桥联矩阵进行合理简化。引入与基体等效塑性应变相关联的修正参数, 以此确定纤维和基体中应力分配。数值结果表明, 本文中建立的复合材料非线性理论模型与实验结果吻合较好。

关键词: 纤维增强复合材料; 弹塑性性能; 细观力学; 桥联矩阵

中图分类号: TB330.1 文献标志码: A

Micromechanical approach to the elastoplastic behavior of a fiber reinforced composite

ZHANG Huashan, HUANG Zhengming*

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on Mori-Tanaka method and the equivalent inclusion theory, the bridging matrix which is used to define the relationship between mean stress tensors in resin and fiber of fiber-reinforcement composites can be achieved in this paper, as well as the explicit formula of matrix components. Considering the influence of factors such as practical engineering, symmetry of compliance matrix, physical performance of resin and micro-geometrical characteristics, the expression of components is simplified reasonably. Corrected parameters, which are the functions of the equivalent plastic strain of the matrix, are introduced and the mean stress distributions of fibers and resin are determined accordingly. The numerical results indicate that the theoretical values of the method presented in this paper are well fit with experimental results.

Keywords: fiber-reinforcement composites; elastoplastic mechanical properties; micromechanics; bridging model

复合材料通常由弹性增强相和弹塑性的基体材料组成, 基体相弹塑性是复合材料非线性行为的起因, 基体塑性变形不断改变着基体与纤维协同工作机制^[1]。如何准确表征基体塑性变形对复合材料弹塑性性能的影响是细观力学研究的重要内容。

研究复合材料非线性性能的理论方法很多, 主要有自洽理论^[2-3]和基于 Eshelby 等效夹杂理论^[4]的诸多方法如割线模量法^[5-6]和切线模量法^[7]等, 有限元方法^[8-9], 变分法^[10-11], 桥联模型^[12], 子胞法^[13]等, 其中自洽理论和有限元法具有一定局限性^[5]。当基体进入弹塑性变形后, 基于线弹性本构理论的 Eshelby 等效夹杂方法不能简单地推广应用到非线性基体夹杂问题^[14]。另一方面, Eshelby 张量常常依据各向异性介质通过数值方法确定^[15]。

因此, 利用 Eshelby 等效夹杂方法建立细观力学理论, 求解复合材料弹塑性变形问题可归结为两条不同的途径: 一条途径是将基体材料视作弹性材料, 基体的塑性应变当作 Eshelby 本征应变, 运用弹性方法求解; 另一条途径是通过基体的割线模量以及其对 Eshelby 张量的修正, 以此反映基体对纤维约束力的弱化。无论哪种求解途径都较弹性求解复杂得多。

本文中利用 Mori-Tanaka 计算模型^[16], 获得基体与纤维平均应力之间桥联矩阵在弹性阶段的显式。根据工程实际材料对柔度矩阵对称性的要求, 考虑基体物理性能和细观几何特征等因素的影响, 对桥联矩阵表达式进行合理简化。基体进入塑性以后, 基体对纤维的约束能力弱化, 为反映该特征,

收稿日期: 2007-11-02; 收修改稿日期: 2008-03-10

基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项基金项目(20040247008)

通讯作者: 黄争鸣, 教授, 研究方向: 复合材料力学、计算结构力学和纳米纤维材料 E-mail: huangzm@mail.tongji.edu.cn

在桥联矩阵中引入与基体等效塑性应变相关联的修正参数, 基体模量取切线模量, 并由此塑性桥联矩阵确定纤维和基体中应力增量分配。最后, 依次求解纤维、基体和复合材料应力-应变增量及各状态变量。

1 几何模型

考虑一单向纤维增强复合材料, 纤维假定为圆柱体, 按图 1 所示建立坐标系, 纤维轴向为 x_1 轴, 纤维横截面位于 x_2 和 x_3 平面内。纤维和基体均假定为各向同性材料。

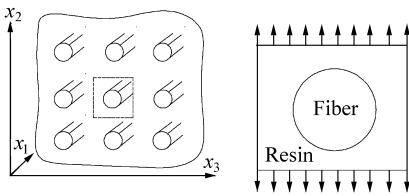


图 1 单向复合材料模型

Fig. 1 Schematic of a unidirectional composite

2 理论分析

2.1 基本公式

针对上述几何模型, 依据 Mori-Tanaka 平均应力的概念和 Benveniste^[17] 的分析, 容易得到基体和纤维平均应力之间的关系

$$\bar{\sigma}^m = A \bar{\sigma}^f \quad (1)$$

A 称为桥联矩阵^[12], 其表达式为

$$A = L_m [I + S L_m^{-1} (L_f - L_m)] M_f \quad (2)$$

式中: 上下标 f 和 m 分别表示纤维和基体; 黑体的大写字母表示四阶张量, M 和 L 代表弹性柔度和刚度张量, S 为 Eshelby 张量, I 为单位张量。

展开式(2), 便可以得到 A 的 6×6 矩阵中非零元素的表达式如下:

$$A_{11} = \frac{E_m}{E_f} \frac{1 - 2\nu_m - \nu_f \nu_m + 2\nu_f \nu_m^2}{(1 - 2\nu_m)(1 + \nu_m)(1 - \nu_m)} \\ = \frac{E_m}{E_f} \left[1 + \frac{\nu_m(\nu_m - \nu_f)}{(1 + \nu_m)(1 - \nu_m)} \right], \quad (3.1)$$

$$A_{12} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)} - \frac{\nu_f}{2(1 - \nu_m)} \right] \\ + \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)}, \quad (3.2)$$

$$A_{13} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)} - \frac{\nu_f}{2(1 - \nu_m)} \right]$$

$$+ \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)}, \quad (3.3)$$

$$A_{21} = \frac{E_m}{E_f} \frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)}, \quad (3.4)$$

$$A_{31} = A_{21}, \quad (3.5)$$

$$A_{22} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - 2\nu_m)(1 - \nu_m)} + \frac{1 + \nu_f}{1 + \nu_m} (1 - S_{2222}) \right] \\ + S_{2222}, \quad (3.6)$$

$$A_{33} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - 2\nu_m)(1 - \nu_m)} + \frac{1 + \nu_f}{1 + \nu_m} (1 - S_{3333}) \right] \\ + S_{3333}, \quad (3.7)$$

$$A_{23} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)} - \frac{1 + \nu_f}{1 + \nu_m} S_{2233} \right] + S_{2233}, \quad (3.8)$$

$$A_{32} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)} - \frac{1 + \nu_f}{1 + \nu_m} S_{3322} \right] \\ + S_{3322}, \quad (3.9)$$

$$A_{44} = \frac{G_m}{G_f} + 2S_{2323} \frac{G_f - G_m}{G_f}, \quad (3.10)$$

$$A_{55} = \frac{G_m}{G_f} + 2S_{1313} \frac{G_f - G_m}{G_f}, \quad (3.11)$$

$$A_{66} = \frac{G_m}{G_f} + 2S_{1212} \frac{G_f - G_m}{G_f}. \quad (3.12)$$

式中:

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left[\frac{3}{4} + \frac{(1 - 2\nu_m)}{2} \right],$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{4},$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left[\frac{1}{4} - \frac{1 - 2\nu_m}{2} \right],$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left[\frac{1}{4} - \frac{(1 - 2\nu_m)}{2} \right].$$

2.2 单向板柔度矩阵

根据桥联矩阵可以得到基体和纤维的应力分配方程以及单向复合材料的柔度矩阵^[12]为

$$\{\sigma_i^f\} = (V_f [I_{ij}] + V_m [A_{ij}])^{-1} \{\sigma_j\} \quad (4a)$$

$$\{\sigma_i^m\} = [A_{ij}] (V_f [I_{ij}] + V_m [A_{ij}])^{-1} \{\sigma_j\} \quad (4b)$$

$$\{\varepsilon_i\} = [M] \{\sigma_i\} = (V_f [M_{ij}^f] + V_m [M_{ij}^m] [A_{ij}]) \cdot \\ (V_f [I_{ij}] + V_m [A_{ij}])^{-1} \{\sigma_j\} \quad (5)$$

式中: V_f 为纤维体积含量; $V_m = 1 - V_f$ 。

2.3 桥联矩阵的修正

式(2)中, M_f 、 L_f 和 L_m 为斜对角对称张量, S 为斜对角非对称张量, 因而桥联矩阵 A 在一般情况下将不可能对称, 代入式(5)后将导致单向复合材料的柔度矩阵不对称^[18]。因此, 必须对桥联矩阵进行修正。鉴于单层板或层合板一般都按平面问题

处理, 下面的讨论仅限于平面桥联矩阵。

根据文献[12], 平面桥联矩阵的一般形式为

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中只有 4 个元素是独立的。对一般纤维增强复合材料而言, 泊松比 ν_m 约为 0.35, ν_f 约为 0.2, $E_m = (1/30 \sim 1/20)E_f$, 可将式(3.1)、(3.2)、(3.6)和(3.12)简化为

$$A_{11} = \frac{E_m}{E_f} \left[1 + \frac{\nu_m(\nu_m - \nu_f)}{(1 + \nu_m)(1 - \nu_m)} \right] \approx \frac{E_m}{E_f},$$

$$A_{12} = \frac{E_m}{E_f} \left[\frac{\nu_m - \nu_f}{2(1 - \nu_m)(1 + \nu_m)} - \frac{\nu_f}{2(1 - \nu_m)} \right] + \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} \approx \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)},$$

$$A_{22} \approx S_{2222} = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left[\frac{3}{4} + \frac{(1 - 2\nu_m)}{2} \right],$$

$$A_{66} = \frac{G_m}{G_f} + 2S_{1212} \frac{G_f - G_m}{G_f}.$$

另一方面, Eshelby 张量显然随着纤维截面形状、基体(或组分)材料性能的变化而改变。基于这些考虑, 本文中选取的桥联矩阵的自变量为

$$a_{11} = A_{11} \approx \frac{E_m}{E_f}, \quad a_{12} = A_{12} \approx \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)},$$

$$a_{22} = A_{22} \approx S_{2222} = \beta,$$

$$a_{33} = A_{66} = \frac{G_m}{G_f} + \alpha \frac{G_f - G_m}{G_f}.$$

再根据式(5)的对称性得到因变量表达式为

$$a_{21} = \frac{(M_{12}^m - M_{12}^f)(a_{22} - a_{11})}{M_{11}^m - M_{11}^f} + a_{12}$$

这里引入 α 和 β 是为了更好地反映组分材料的几何参数与性能参数变化对复合材料弹-塑性性能的影响, 可以通过复合材料的等效弹性常数来调节, 即将式(6)代入式(5)得到单向复合材料的横向模量与剪切模量, 与实验值对比后确定 α 和 β 。但是, 当缺少实验数据时, α 和 β 可以分别取为 0.5 和 S_{2222} 。

3 塑性分析

当基体进入塑性后, 单向复合材料随之进入塑性。此时, 纤维和基体的应力分配仍然按照式(4a)和式(4b)计算。不过此时的桥联矩阵 $[A]$ 需要考虑基体塑性变形的影响。

各向同性等向强化基体的塑性求解采用传统塑

性理论。即使单向板承受比例加载, 由于应力分配矩阵式(4a)和式(4b)的作用, 纤维和基体的应力增量一般不是比例荷载, 基体状态变量的求解需要采用增量型 J_2 流动理论, 因此数值迭代过程必不可少。增量荷载作用下, 基体的应变增量采用改进的 Newton-Raphson 法求解。每个迭代子步的刚度矩阵取基体弹性刚度矩阵, 荷载增量步内每个子步得到基体应变增量作为基体弹性预测应变, 采用向后欧拉法进行本构积分, 依次求解基体的等效塑性应变增量和屈服应力、流动方向, 更新塑性应变、弹性应变以及等效屈服应力。因为单向复合材料板通常按平面问题求解, 这需要对弹性预测应变施加平面应力约束条件。

求得基体的等效应变后, 便知基体对应的硬化模量 E_p^t , 再由下列公式计算基体的切线模量 E_m^t 、泊松比 ν_m^t 和剪切模量 G_m^t ^[7]。

$$E_m^t = \frac{E_m^p E_m}{E_m^p + E_m}, \quad \nu_m^t = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu_m \right) \frac{E_m^t}{E_m},$$

$$G_m^t = \frac{E_m^t}{2(1 + \nu_m^t)}. \quad (7)$$

因纤维假定直到破坏均为弹性, 其应变增量计算式保持不变。单层板的应变, 直接根据均值化公式求得。基体应力达到屈服应力后, 桥联矩阵中基体的切线模量、泊松比和剪切模量取 E_m^t 、 ν_m^t 和 G_m^t , 按式(7)计算。

α 、 β 在弹性阶段经过实验修正后, 取值记为 α_0 、 β_0 。从桥联矩阵元素表达式可知, α 对应 $2S_{1212}$, β 的主要部分对应于 S_{2222} 。因塑性阶段 S_{1212} 、 S_{2222} 随基体塑性发展不断变化, α 、 β 也不断变化, 记为 α_x 、 β_x 。另外, 根据 Hill^[19] 对 Voigt 和 Reuss 近似方法^[20] 的证明, 无论夹杂的几何形状如何, Reuss 近似方法给出的单向板模量是其等效有效模量的下界。随着基体塑性发展, 导致有效模量越来越接近于下界, 而应力比值越来越接近 Reuss 平均应力假定。由 Reuss 近似方法的假定可知 $\bar{\sigma}^m = \bar{\sigma}^f$, 也就是说, 在简单荷载(横向荷载或剪切荷载)下, 随着塑性的发展纤维和基体的横向应力和剪切应力比值分别趋近于 1, 记为 α_x 、 $\beta_x \rightarrow 1$ 。所有这些变化的根本原因是基体发生了塑性变形, 于是, α_x 、 β_x 将是塑性应变的函数。由塑性理论可知, 等效塑性应变是一个方便而有效的塑性参数, 选其作为自变量, α_x 、 β_x 的函数形式为

$$\alpha_x = f(\bar{\epsilon}^{pl}), \quad \beta_x = \varphi(\bar{\epsilon}^{pl}),$$

$$d\bar{\varepsilon}^{\text{eq}} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}.$$

本文中选取两种函数形式：线性插值函数和非线性函数。

(1) 线性插值函数：

$$\alpha_x = \alpha_0 + \frac{\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{eq}}}{\varepsilon_{\max}^{\text{eq}}} (1 - \alpha_0), \quad \beta_x = \beta_0 + \frac{\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{eq}}}{\varepsilon_{\max}^{\text{eq}}} (1 - \beta_0). \quad (8)$$

式中， $\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{eq}}$ 为基体极限强度对应的等效塑性应变。

(2) 非线性函数中， α_x 、 β_x 不仅与等效塑性应变相关，还与基体的硬化模量相关。取 α_x 、 β_x 的变化趋势与基体应力-应变曲线相似。函数进一步表示为

$$\alpha_x = f(\bar{\varepsilon}^{\text{pl}}, E_p), \quad \beta_x = \varphi(\bar{\varepsilon}^{\text{pl}}, E_p). \quad (9)$$

其显式为

$$\frac{\Delta\alpha_x}{1 - \alpha_0} = \frac{E_p(\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{eq}}) \Delta\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{eq}}}{\sigma_{\max} - \sigma_0} = \frac{\Delta\beta_x}{1 - \beta_0} \quad (10)$$

塑性计算步骤如下：(1) 对单向复合材料施加荷载增量；(2) 计算桥联矩阵、纤维和基体的应力分配矩阵；(3) 计算纤维的应力、应变增量，更新纤维应力、应变；(4) 计算基体的各状态变量；(5) 计算单向复合材料的应变；(6) 根据基体等效塑性应变更新参数 α_x 、 β_x 后返回到第 1 步循环计算。

4 算例分析

依据上述细观力学弹塑性计算模型，对单向复合材料的剪切性能进行计算。算例取之于文献 [21]，单向板纤维体积含量为 0.60，纤维直到破坏保持线弹性材料， $E^f=74$ GPa， $\mu^f=0.2$ 。文献中给出了基体的初始弹性模量、极限拉伸强度以及极限拉伸应变。基体拉伸应力-应变曲线如图 2。为方便计算，用 8 个折线近似该曲线，折线段端点应力、应变、等效塑性应变和硬化模量取值，见表 1，中间点的相应物理参数由端点值线性插值得到，每段

硬化模量 h 取常数。算例中桥联参数初值为 $\alpha_0=0.35$ 、 $\beta_0=0.45$ 。基体的极限等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_{\max}^{\text{m, eq}}=\varepsilon-\frac{\sigma_{\max}}{E^{\text{m}}}=0.02612$ 。

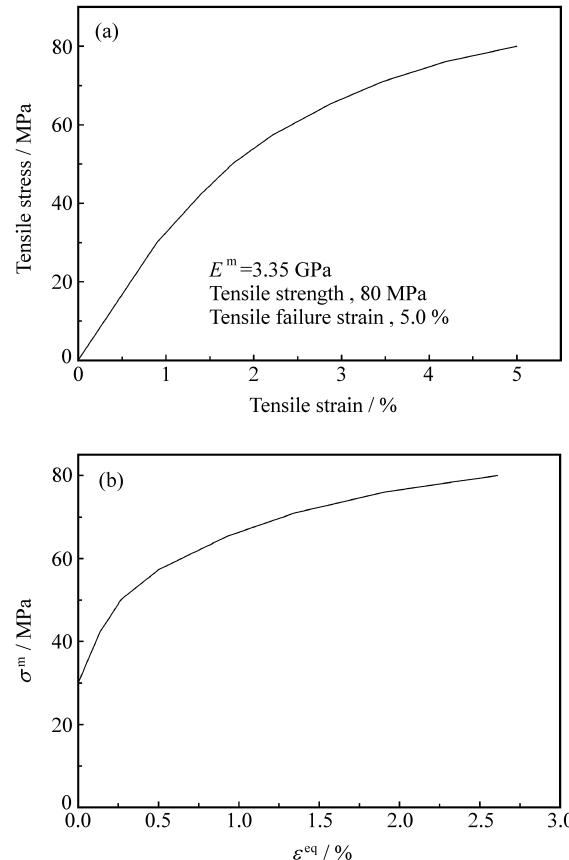


图 2 基体拉伸应力-应变曲线和拉伸应力-等效塑性应变曲线

Fig. 2 Tensile stress-strain curve and tensile stress-equivalent plastic strain curve for matrix material

α_x 、 β_x 的非线性函数采用式(10)，等式中的分母已无量刚化。根据基体 8 个折线 9 个端点，依次算出相应的 α_x 、 β_x 值，列于表 1 中。折线中间点的 α_x 、 β_x 按两端线性插值计算，变化过程示意见示意图 3。

表 1 基体弹塑性参数

Table 1 Elastic-plastic parameters of matrix material

Break point number	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stress/MPa	0.0	30.0	42.2	50.2	57.35	65.37	71.0	76.06	80.0
Strain/%	0.0	0.898	1.394	1.768	2.214	2.879	3.471	4.184	5.0
Equivalent strain/%	0.0	0.0	0.134	0.269	0.502	0.928	1.351	1.914	2.612
Hardening modulus/MPa	0.0	9.104	5.926	3.069	1.883	1.331	0.899	0.564	—
α_x	0.35	0.35	0.533	0.64	0.76	0.844	0.915	0.96	0.96
β_x	0.45	0.45	0.609	0.716	0.820	0.893	0.958	1.0	1.0

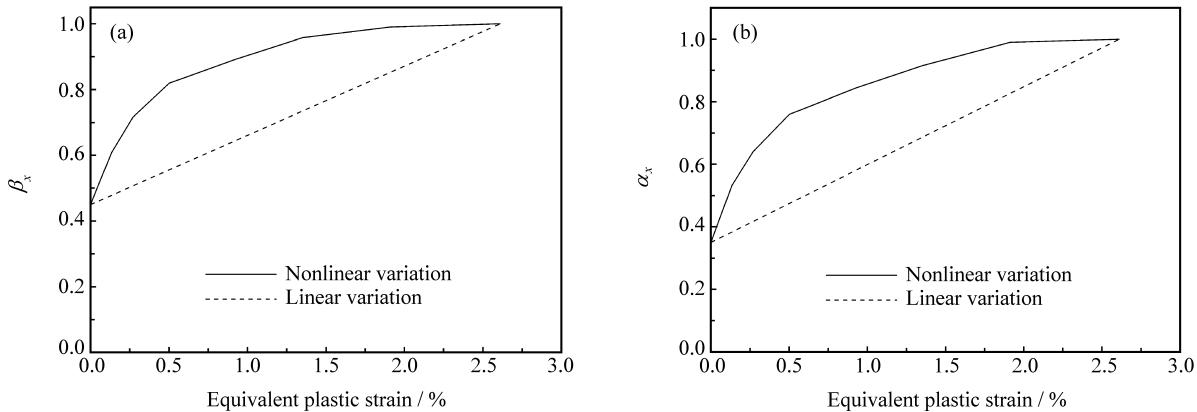
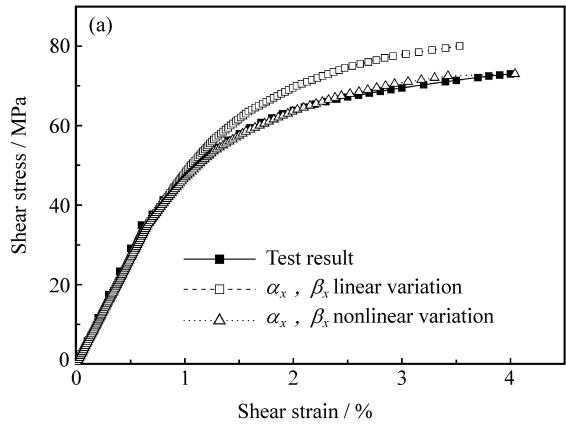
图 3 α_x 和 β_x 取值示意Fig. 3 Schematic for assigning α_x and β_x 

图 4 单向复合材料应力-应变曲线

Fig. 4 Stress-strain curve of a UD lamina under (a) shear and (b) transverse compression loads

计算的单向复合材料剪切应力-应变曲线见图 4(a)。从图 4(a)中可以看到, 计算曲线与实验曲线大致相同。 $\epsilon = 1.325\%$ 之前, 3条曲线几乎重合; 当单向复合材料剪切变形为 4% 时, α_x 、 β_x 按线性变化的预测剪切应力为 78.2 MPa, 比实验值 73 MPa 高出 7%, 而 α_x 、 β_x 按非线性变化的预测曲线和实验曲线几乎重合。计算的横向压缩应力-应变曲线见图 4(b)。从图 4(b)中可以看到, 横向应力-应变曲线与实验曲线吻合较好, 并且横向压缩的轴向应变大部分呈弹性, 接近破坏前呈现较大塑性。对比结果表明, 本文中论述的计算方法是可行的。

5 结 论

(1) 基于 Mori-Tanaka 方法计算模型, 得到了基体和纤维平均应力在弹性阶段的桥联矩阵, 结果表明, 单向复合材料的横向模量和剪切模量主要受 Eshelby 张量的影响。

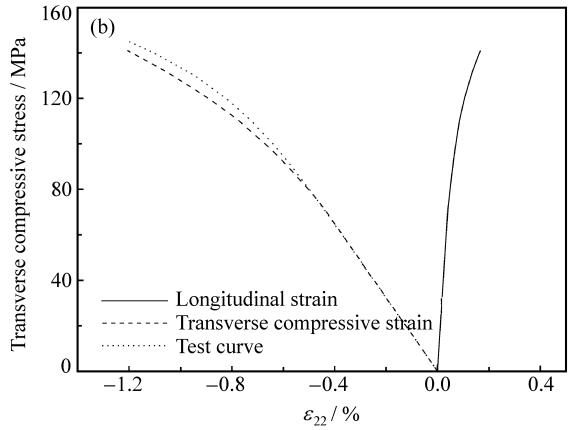


图 4 单向复合材料应力-应变曲线

Fig. 4 Stress-strain curve of a UD lamina under (a) shear and (b) transverse compression loads

(2) 通过在基体和纤维应力之间的桥联矩阵中引入修正参数, 建立修正参数与基体等效塑性应变的函数关系式, 并对单向板平面剪切的应力-应变曲线进行了预报。预报值与实验值吻合较好, 表明本文方法可行。

参 考 文 献:

- [1] 范赋群, 王震鸣, 稷 醒, 黄小清. 关于复合材料力学几个基本问题的研究 [J]. 力学与实践, 1995, 17(1): 4-7.
Fan Fuqun, Wang Zhenming, Ji Xing, Huang Xiaoqing. Study of several basic problems on mechanics of composites [J]. Mechanics and Practice, 1995, 17(1): 4-7.
- [2] Hill R. Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals [J]. J Mech Phys Solids, 1965, 13(2): 89-101.
- [3] Dvorak G J, Bahei-El-Din Y A. Elastic-plastic behavior of fibrous composites [J]. J Mech Phys Solids, 1979, 27(1): 51-72.
- [4] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proceedings of

- the Royal Society, 1957, series A241(1226): 376-396.
- [5] 梁军, 杜善义. 弹塑性复合材料力学性能的细观研究 [J]. 固体力学学报, 2000, 21(4): 361-365.
Liang Jun, Du Shanyi. Study of the mechanical behavior of the elastoplastic matrix composites by micromechanics [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 21(4): 361-365.
- [6] Tandon G P, Weng G J. A theory of particle reinforced plasticity [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1988, 55(3): 126-135.
- [7] 田峰, 胡更开, 杨改英. 塑性细观力学模型的比较分析 [J]. 北京理工大学学报, 1996, 16(5): 477-482.
Tian feng, Hu Gengkai. A comparative study of micromechanical models for inelastic composite materials [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1996, 16(5): 477-482.
- [8] Sun C T, Chen J L. A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites [J]. Comp Sci Tech, 1991, 40(2): 115-129.
- [9] Tvergaard V. Analysis of tensile properties for a whisker reinforced metal matrix composite [J]. Acta Metal Mater, 1990, 38(2): 185-194.
- [10] Briottet L, Gilormini P, Montheillet F. Approximate analytical equations for the deformation of an inclusion in a viscoplastic matrix [J]. Acta Mechanica, 1999, 134(3/4): 217-234.
- [11] Van Houtte P. Heterogeneity of plastic strain around an ellipsoidal inclusion in an ideal plastic matrix [J]. Acta Metall Mater, 1995, 43(7): 2859-2879.
- [12] 黄争鸣, 张若京. 复合材料结构受横向荷载作用的强度问题 [J]. 复合材料学报, 2005, 22(2): 148-159.
Huang Zhengming, Zhang Ruojing. On the ultimate strength of a fiber reinforced composite laminate subjected to lateral loads [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2005, 22(2): 148-159.
- [13] 宋迎东, 孙志刚, 雷友锋, 高德平. 细观几何结构对复合材料初始屈服面的影响 [J]. 航空动力学报, 2004, 19(6): 749-754.
Song Yingdong, Sun Zhigang, Lei Youfeng, Gao Deping. Influence of micro-structural geometry on composite initial yielding surfaces [J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(6): 749-754.
- [14] 刘熠, 黄筑平, 王仁. 关于非线性基体中 Eshelby 等效夹杂方法适用性的讨论 [J]. 力学学报, 1997, 29(4): 506-511.
Liu Yi, Huang Zhuping, Wang Ren. On the applicability of Eshelby's equivalent inclusion method in nonlinear continuum mechanics [J]. Acta Mechanica Sinica, 1997, 29(4): 506-511.
- [15] Mura T. Micromechanics of defect in solids [M]. 2nd ed. New York: Martin Nijhoff, 1987: 74-89.
- [16] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions [J]. Acta Metall, 1973, 21(5): 571-574.
- [17] Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka theory in composite materials [J]. Mech Mater, 1987, 6(2): 147-157.
- [18] Benveniste Y, Dvorak G J, Chen T. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media [J]. J Mech Phys Solids, 1991, 39(7): 927-946.
- [19] Hill R. The elastic behaviour of a crystalline aggregate [J]. Proc Phys Soc, 1952, A65(5): 349-354.
- [20] Reuss A. Berechnung der fliessgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle [J]. Z angew Math Mech, 1929, 9(1): 49-58.
- [21] Soden P D, Hinton M J, Kaddour A S. Lamina properties and lay-up configurations and loading conditions of range fibre-reinforced composite laminates [J]. Compos Sci Technol, 1998, 58(7): 1011-1022.