

文章编号: 1000-3851(2008)05-0098-06

## 单向短纤维增强泡沫塑料力学性能分析

邹波, 卢子兴\*

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 将 Mori-Tanaka 方法和修正剪滞模型相结合, 给出了单向短纤维增强高密度泡沫塑料的模量预测和应力计算公式, 并用建立的考虑不同情况的有限元模型分析了纤维和基体中的应力分布。研究表明: 理论预测与有限元分析结果符合得较好。采用修正的剪滞理论能够解释单向短纤维增强泡沫塑料的应力传递机制。当泡孔体积分数增加时, 纤维轴向应力和界面剪应力会增大, 更容易发生脱粘和拉断破坏。纤维端部脱粘或穿过泡孔虽然容易引起局部应力集中, 但对整体应力分布影响不大。

**关键词:** 纤维; 泡沫; Mori-Tanaka 方法; 剪滞模型; 有限元

**中图分类号:** TB330.1; TB332 **文献标志码:** A

## Analysis for mechanical properties of unidirectional short fiber reinforced foam plastics

ZOU Bo, LU Zixing\*

(School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Mori-Tanaka method and the modified shear-lag model were combined to develop formulae to predict the modulus and to give the stress field of unidirectional short fiber reinforced high density foam plastics. The finite element models accounting for different cases were also built to analyze the stress distribution of the fibers and matrix. The research results show that the theoretical prediction agrees well with the solution of the finite element analysis. The modified shear-lag model can be used to explain the stress transfer mechanism of the material. It is found that the axial stress of fibers and interfacial shear stress increase with increasing the volume fraction of void, which would make fibers easier to debond and break. The situations, fiber debonded at the end or penetrated void, lead to local stress concentration and have small influence on the whole stress distribution of the material.

**Keywords:** fiber; foams; Mori-Tanaka method; shear-lag model; finite element

纤维增强泡沫塑料是由纤维、泡孔和树脂基体构成的三相轻质复合材料, 纤维的加入一般能够有效提高泡沫塑料的力学性能。目前, 关于纤维增强泡沫塑料的研究较多集中于对微观结构和实验现象的描述方面, 而相关的力学理论分析工作较少。Rinde 最先利用混合律模型估计了纤维增强泡沫塑料的压缩模量和比例极限强度<sup>[1]</sup>。之后, Morimoto 等<sup>[2]</sup>通过在混合律模型中引入修正有效因子, 得到了拉伸模量、强度和界面剪切强度的估算公式。Cotgreave 和 Shortall<sup>[3]</sup>给出了简化情况下的纤维临界长度估计。此外, Zhang 等<sup>[4]</sup>将 Moore 经验公式、Berlin 方法和 Rosen 模型相结合计算了材料的

相对模量。Lin 等<sup>[5]</sup>运用修正混合律和 Halpin-Kerner 模型预测了短纤维增强橡胶泡沫的压缩模量。针对当前研究中缺少对纤维增强泡沫塑料各相组分应力场进行描述的情况, 本文作者基于“二次夹杂”原理, 将 Mori-Tanaka 方法与用于分析载荷传递机制的修正剪滞模型相结合, 给出了短纤维增强高密度泡沫塑料的模量及应力计算公式, 并从材料的微观结构出发建立了不同情况下的有限元模型, 探讨了纤维、基体及界面处的应力分布情况, 进一步分析了承载时纤维和泡沫基体间的应力传递机制。

收稿日期: 2007-11-20; 收修改稿日期: 2008-02-22

基金项目: 国家自然科学基金(10572013); 北京市教育委员会共建项目建设计划(XK100060522)资助

通讯作者: 卢子兴, 教授, 主要从事轻质复合材料与结构力学研究 E-mail: luzixing@263.net

## 1 单向短纤维增强泡沫塑料模型

对于短纤维增强高密度泡沫塑料而言, 泡孔基本为球形结构, 呈三维随机均匀分布。理论分析中假设短纤维在基体中单向排列, 不考虑少数纤维可能穿过泡孔的问题。纤维增强泡沫塑料可以看作由纤维增强相填充到由聚合物与泡孔构成的“等效基体”中的一种复合材料。为得到材料的有效弹性模量和其中的应力分布, 可分两步进行求解。首先, 将泡孔看作弹性模量为零的颗粒, 利用 Mori-Tanaka 方法<sup>[6]</sup>可获得“等效基体”的各弹性常数如下:

$$K_{em} = \frac{4(1-C_V)K_m G_m}{4G_m + 3C_V K_m} \quad (1)$$

$$G_{em} = \frac{(1-C_V)G_m(9K_m + 8G_m)}{K_m(9 + 6C_V) + G_m(8 + 12C_V)} \quad (2)$$

$$E_{em} = \frac{9K_{em} G_{em}}{3K_{em} + G_{em}} \quad (3)$$

$$\nu_{em} = \frac{3K_{em} - 2G_{em}}{2(3K_{em} + G_{em})} \quad (4)$$

其中:  $K$ 、 $G$ 、 $E$  和  $\nu$  分别代表体积模量、剪切模量、弹性模量和泊松比; 下标  $m$  和  $em$  分别表示树脂和“等效基体”;  $C_V$  表示“等效基体”的相对孔隙率, 其定义为  $C_V = V_V / (V_V + V_m)$ , 而  $V_V$  和  $V_m$  分别是“等效基体”中泡孔和树脂的体积分数。然后, 将纤维埋入“等效基体”中, 得到如图 1 所示的单向短纤维增强泡沫塑料修正剪滞模型。从图 1 中可见, 单根纤维被嵌入“等效基体”, 从而形成同轴圆柱体。因此, 单向短纤维增强泡沫塑料可以看作是由无数个这样的同轴圆柱单元组成。

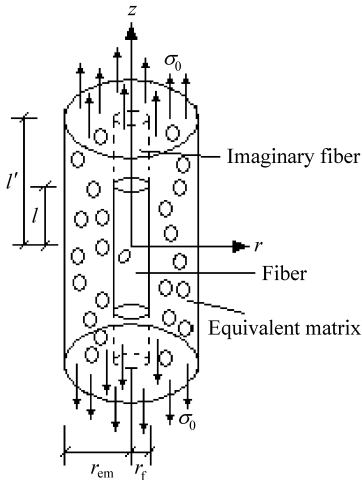


图 1 单向短纤维增强泡沫塑料修正剪滞模型

Fig. 1 Modified shear-lag model of unidirectional short fiber reinforced foam plastics

在单向短纤维增强泡沫塑料的修正剪滞模型中, 假设纤维仅承受轴向载荷, 而“等效基体”主要通过界面将剪切应力传递给纤维, 相对于最初提出的剪滞理论<sup>[7]</sup>, Hsueh 的修正模型<sup>[8]</sup>考虑了纤维端部与“等效基体”间的应力传递, 即假定纤维末端与“等效基体”之间是完好粘结的, 在  $0 \leq r \leq r_f$ ,  $l \leq z \leq l'$  和  $-l' \leq z \leq -l$  区域内存在假想纤维, 其弹性性能与“等效基体”相同。当模型受轴向应力  $\sigma_0$  作用时, 纤维的轴向应力  $\sigma_f$ 、假想纤维的轴向应力  $\sigma'_f$ 、界面剪应力  $\tau_i$  和  $\tau'_i$  以及复合材料杨氏模量的计算公式如下<sup>[8-9]</sup>:

$$\sigma_f = \frac{r_{em}^2 E_f \sigma_0}{r_f^2 E_f + (r_{em}^2 - r_f^2) E_{em}} + A[\exp(\alpha z) + \exp(-\alpha z)] \quad (0 \leq z \leq l) \quad (5)$$

$$\sigma'_f = \sigma_0 + A' \{ \exp(\alpha' z) - \exp[\alpha'(2l' - z)] \} \quad (l \leq z \leq l') \quad (6)$$

$$\tau_i = -\frac{r_f d\sigma_f}{2dz} = -\frac{r_f A \alpha [\exp(\alpha z) - \exp(-\alpha z)]}{2} \quad (0 \leq z \leq l) \quad (7)$$

$$\tau'_i = -\frac{r_f d\sigma'_f}{2dz} = -\frac{r_f A' \alpha' \{ \exp(\alpha' z) + \exp[\alpha'(2l' - z)] \}}{2} \quad (l \leq z \leq l') \quad (8)$$

$$E_c = \frac{l' \sigma_0}{w_0} \quad (9)$$

其中:

$$w_0 = \frac{l' \sigma_0}{E_{em}} + \frac{r_f^2}{r_{em}^2} \left( \frac{1}{E_f} - \frac{1}{E_{em}} \right) \times \left\{ \frac{l r_{em}^2 E_f \sigma_0}{r_f^2 E_f + (r_{em}^2 - r_f^2) E_{em}} + \frac{A}{\alpha} [\exp(\alpha l) - \exp(-\alpha l)] \right\};$$

$$A = \frac{(r_{em}^2 - r_f^2)(E_{em} - E_f) \sigma_0}{r_f^2 E_f + (r_{em}^2 - r_f^2) E_{em}} \left\{ \exp(\alpha l) + \exp(-\alpha l) - \frac{\alpha [\exp(\alpha l) - \exp(-\alpha l)] \{ \exp(\alpha' l) - \exp[\alpha'(2l' - l)] \}}{\alpha' \{ \exp(\alpha' l) + \exp[\alpha'(2l' - l)] \}} \right\}^{-1};$$

$$A' = \frac{\alpha [\exp(\alpha l) - \exp(-\alpha l)] A}{\alpha' \{ \exp(\alpha' l) + \exp[\alpha'(2l' - l)] \}};$$

$$\alpha = \frac{1}{r_f} \left\{ \frac{r_f^2 + (r_{em}^2 - r_f^2) \frac{E_{em}}{E_f}}{r_{em}^2 \left[ \frac{r_{em}^2}{r_{em}^2 - r_f^2} \ln \left( \frac{r_{em}}{r_f} \right) - \frac{3r_{em}^2 - r_f^2}{4r_{em}^2} \right] (1 + \nu_{em})} \right\}^{1/2};$$

$$\alpha' = \frac{1}{r_f} \left\{ \frac{1}{\left[ \frac{r_{em}^2}{r_{em}^2 - r_f^2} \ln \left( \frac{r_{em}}{r_f} \right) - \frac{3r_{em}^2 - r_f^2}{4r_{em}^2} \right] (1 + \nu_{em})} \right\}^{1/2}.$$

式中: 下标  $f$  代表纤维;  $r_f$  和  $r_{em}$  分别为纤维和理论模型的半径;  $2l$  和  $2l'$  分别为纤维和理论模型的长度, 则纤维体积分数为  $V_f = r_f^2 l / r_{em}^2 l'$ ;  $w_0$  为理论模型的平均轴向位移;  $E_c$  为单向短纤维增强泡沫塑料

轴向有效杨氏模量。

2 有限元模型

根据高密度短纤维增强泡沫塑料的微观结构特点，可以建立如图 2(a)所示呈周期分布的四棱柱模型。考虑到几何对称性，只需取模型的 1/8 部分进行计算。采用 ANSYS 有限元分析软件，共划分 101131 个单元，如图 2(b)所示。在对称面上施加对称边界约束条件，并保证模型同一侧面所有节点的法向位移相同。设纤维和模型长度分别为  $75\text{ }\mu\text{m}$  和  $90\text{ }\mu\text{m}$ ，正四边形棱柱横截面边长为  $10.233\text{ }\mu\text{m}$ ，而纤维和泡孔体积分数分别取为 2.5% 和 35%，直径为  $2\text{ }\mu\text{m}$  的短纤维位于模型中心，在横截平面上，4 个半径为  $3.078\text{ }\mu\text{m}$  的球形泡孔在正四边形顶点和边长中点处按照间隔  $h=5r_i$  交替排列。纤维弹性模量和泊松比分别取为 76 GPa 和 0.30，树脂弹性模量和泊松比分别取为 3.2 GPa 和 0.35。此外，基于等效的思想，如果将树脂和球形泡孔构成的“等效基体”看作是连续等效的实体，其弹性常数由式 (1)~式 (4) 计算，从而类似于短纤维增强复合材料，建立了四棱柱等效有限元模型，其中纤维仍位于单胞正中，由“等效基体”包围，共划分 19740 个单元。

在实际制备的材料中，纤维可能存在端部脱粘或穿过泡孔的情况。如果对脱粘两侧的纤维和基体分别划分网格，并且脱粘部位重合的节点互不耦合，不存在相互作用，则可以模拟脱粘情况，此时单元数不变。当纤维中部穿过泡孔时，如果将图 2(a)所示的原模型棱线正中间位置上的 4 个 1/4 泡孔平移到纤维轴线正中处形成一个完整泡孔，则可建立如图 2(c)所示的有限元模型，共划分 115632 个单元。同理，当纤维端部穿过泡孔时，如果将图 2(a)所示的原模型纤维端部周围的 4 个 1/4 泡孔平移到纤维轴线上形成一个完整泡孔，则可建立如图 2(d)所示的有限元模型，共划分 125339 个单元。

3 结果和讨论

在模型顶部施加沿轴向的拉伸载荷，根据图 2 所示的有限元模型和等效有限元模型可以分别求出材料的杨氏模量为 2.82 GPa 和 2.79 GPa，它们比式 (9) 计算的理论值 2.71 GPa 稍大一些 (误差分别为 4% 和 3%)。图 3(a) 和 3(b) 分别给出了纤维轴向应力和界面剪应力沿轴向的分布情况，可以看出，理论曲线与有限元计算结果符合得较好。从图 3 和基体轴向应力分布的有限元结果来看，纤维承受的轴向应力远比树脂基体大，是主要的承力者；

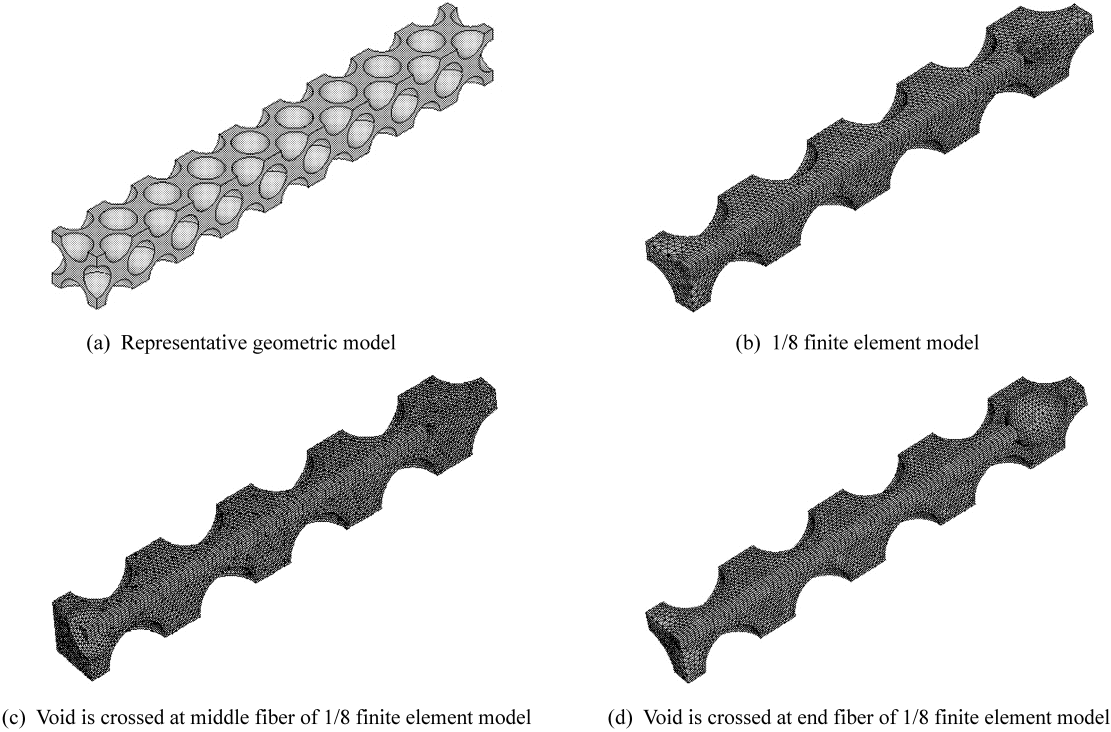


图 2 单向短纤维增强泡沫塑料有限元模型  
Fig. 2 Finite element model of unidirectional short fiber reinforced foam plastic

并且,纤维中部轴向应力最大,离端部越近,纤维承受的轴向应力越小;纤维中部较长一段的轴向应力大约为外加应力的 20 倍,靠近纤维端部的轴向应力急剧减小为外加应力的 4.5 倍左右。因此,与短纤维增强复合材料类似<sup>[10]</sup>,发生在纤维端部的正应力传递对纤维端部附近的应力分布影响较大,而可忽略对纤维中部应力分布的影响。从基体轴向应力分布的有限元结果还可发现,纤维端部周围的基体轴向应力明显比其它区域的要大;在径向方向上,离纤维越远处,基体所受拉伸应力越小,在泡孔中部(赤道)附近的拉伸应力较大,而在泡孔上下两端(极区)附近的拉伸应力较小。此外,理论计算的轴向应力略小于有限元计算值。导致这一结果的原因是:(1)这与修正剪滞模型计算的是纤维横截面平均应力,而有限元模型计算的是纤维轴线中心处的轴向应力有关,但对于小直径纤维两者差别很小<sup>[8]</sup>;(2)从基体剪应力分布的有限元结果可以看出,靠近纤维端部的数个泡孔之间的基体所受剪应力相对较大,由于纤维端部及其周围泡孔引起的应力集中影响,纤维端部的实际界面剪应力值要高于二次夹杂方法估算的理论值,因此传递到纤维的轴向正应力也比理论值要大一些。从图 3(b)给出的纤维和基体界面剪应力分布曲线可见,界面剪应力变化趋势与纤维轴向应力的变化情况相反,界面剪应力在纤维端部达到最大值,越往中部界面剪应力值越小,直至衰减为零。特别与普通短纤维增强复合材料不同的是,由于基体中泡孔的影响,在纤维中部的界面剪应力不是始终为零值,而是在零值附近波动,但幅值很小。这样,由于应力传递的关系,纤维中间部分的轴向应力也将产生幅值很小的波动,如图 3(a)所示。

通过对纤维和树脂应力分布的上述分析,可以发现,虽然“等效基体”不能反映应力的不均匀性,但是从等效模型和有限元结果来看,不均匀性对应力分布的影响不大,大部分位置的波动幅值很小,仍然可以给出整体应力的变化趋势。“二次夹杂”原理能在体积平均意义上反映应力集中的影响和体现“泡沫基体材料”的特点。当单向短纤维增强泡沫塑料在轴向受载时,在纤维端部附近由于纤维和含泡孔的“等效基体”弹性性能不同导致的应变差异在平行于纤维轴向形成了界面剪应力,该剪应力将载荷从含泡孔的“等效基体”传递给纤维,使纤维受拉或受压,这与短纤维增强复合材料的传递机制一

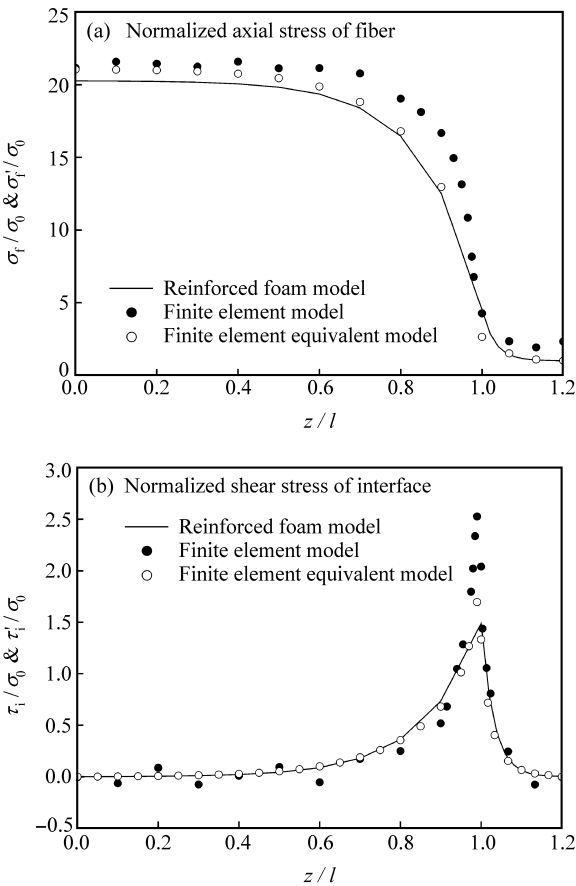


图 3 增强泡沫塑料的应力分布  
Fig. 3 Stress distribution of reinforced foam plastics

致<sup>[10-11]</sup>。但这里由于基体含有大量泡孔,从而更加大了纤维和基体之间的弹性不匹配。这种不匹配导致的影响可以从图 4 中看出,即随着泡孔体积分数的增加,纤维和“等效基体”间的模量差异就越大,从而纤维所受轴向应力和界面剪应力也就越大。

对于纤维端部发生脱粘的情况,分析表明,脱粘使得端部处的纤维所受轴向应力减小,但脱粘引起的应力集中将使端部界面剪应力增大,树脂基体更容易屈服。在远离端部的位置,基体和纤维中的应力几乎与完好粘结时相同,这进一步说明纤维中部应力分布受端部影响较小。

当纤维中部穿过泡孔时,由于空心泡孔内的纤维必须独自承受载荷,并且靠近穿孔处的基体所传递的剪应力较大,约为  $\sigma_0$ ,因此穿过泡孔部分的纤维所受轴向应力比原先要高  $2\sigma_0$ ,如图 5(a)和 5(b)所示,纤维更容易发生断裂。随着  $z/l$  的增大,纤维穿过泡孔的影响逐渐减小;当  $z/l \geq 0.5$  时,纤维所受轴向应力和界面剪应力与纤维不穿过泡孔时完全相同。与此情况相反,当纤维端部穿过泡孔时,

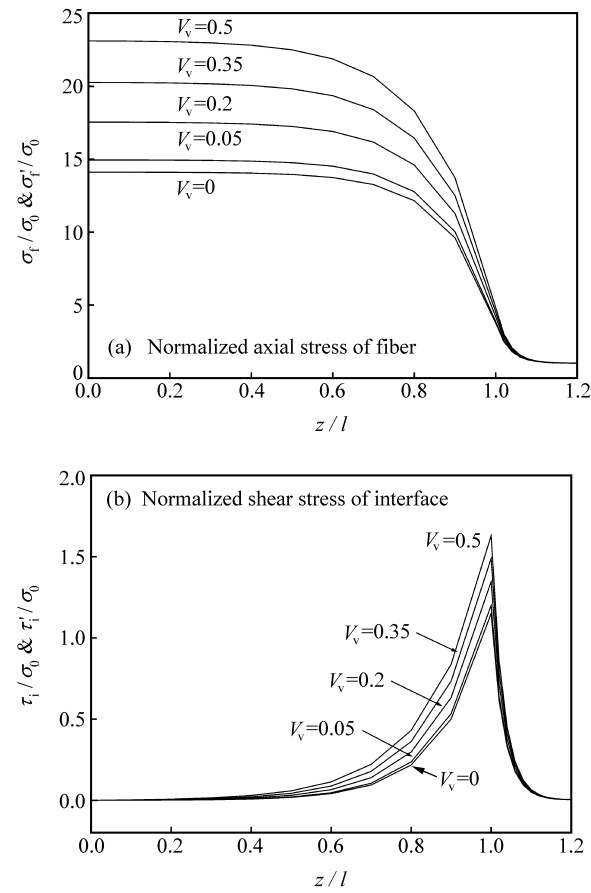


图4 不同孔隙分数下的增强泡沫塑料应力分布  
Fig. 4 Stress distribution of reinforced foam plastics under different porosities

在端部传递的界面剪应力减小  $0.5\sigma_0$ ，纤维末端不再承受轴向应力，靠近端部附近的纤维所受轴向应力也明显减小；当  $z/l \leq 0.5$  时，纤维所受轴向应力和界面剪应力与纤维不穿过泡孔时完全相同。此外，从上述两种情况下的基体应力分布有限元结果来看，穿孔附近的基体区域应力集中明显高于其它区域，而离穿孔处较远的基体区域应力几乎保持不变。

4 结 论

- (1) 基于“二次夹杂”原理得到的高密度单向短纤维增强泡沫塑料模量及应力分布理论预测值与有限元数值模拟结果符合得较好。采用修正的剪滞理论能够解释单向短纤维增强泡沫塑料的应力传递机制。
- (2) 当泡孔体积分数增加时，纤维轴向应力和界面剪应力会增大，更容易发生脱粘和拉断破坏。

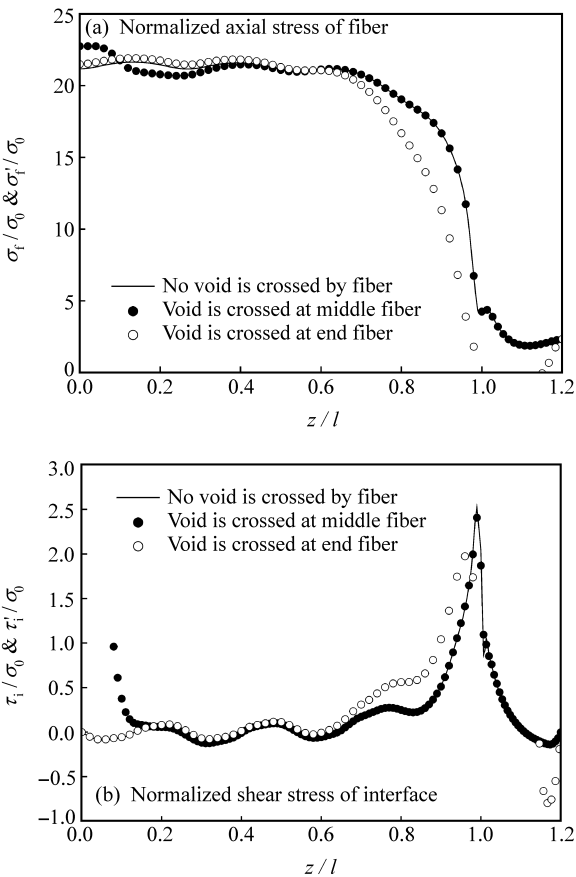


图5 穿孔时增强泡沫塑料的应力分布  
Fig. 5 Stress distribution of reinforced foam plastics as void is crossed by fiber

- (3) 纤维端部脱粘使得端部处的纤维所受轴向应力减小，端部界面剪应力增大，纤维中部应力分布受端部影响较小。
- (4) 当纤维中部穿过泡孔时，穿过泡孔部分的纤维所受轴向应力比原先要高，纤维更容易发生断裂。当纤维端部穿过泡孔时，在端部传递的界面剪应力减小，靠近端部附近的纤维所受轴向应力也明显减小，不利于纤维的增强作用。

参考文献：

[1] 卢子兴, 王 仁, 黄筑平, 等. 泡沫塑料力学性能研究综述 [J]. 力学进展, 1996, 26(3): 306-323.  
Lu Zixing, Wang Ren, Huang Zhuping, et al. A review of studies on the mechanical properties of foam plastics [J]. Advances in Mechanics, 1996, 26(3): 306-323.

[2] Morimoto K, Suzuki T, Yosomiya R. Adhesion between glass-fiber and matrix of glass-fiber reinforced rigid polyurethane foam under tension [J]. Polymer-Plastics Technology and Engineering, 1984, 22(1): 55-76.

[3] Cotgreave T C, Shortall J B. The mechanism of reinforcement of polyurethane foam by high - modulus chopped fibers [J]. Journal of Materials Science, 1977, 12(4): 708-717.

[4] Zhang Y L, Rodrigue D, Ait - Kadi A. Polyethylene - kevlar composite foams II: Mechanical properties [J]. Cellular Polymers, 2004, 23(2): 61-76.

[5] Lin G, Zhang X J, Liu L, et al. Study on microstructure and mechanical properties relationship of short fibers/rubber foam composites [J]. European Polymer Journal, 2004, 40(8): 1733-1742.

[6] 杜善义, 王 彪. 复合材料细观力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 30, 143.

Du Shanyi, Wang Biao. Micromechanics of composites [M]. Beijing: Science Press, 1997: 30, 143.

[7] Cox H L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials [J]. British Journal of Applied Physics, 1952, 3(1): 72-79.

[8] Hsueh C H. Young's modulus of unidirectional discontinuous-fibre composites [J]. Composites Science and Technology, 2000, 60(14): 2671-2680.

[9] Hsueh C H, Young R J, Yang X, et al. Stress transfer in a model composite containing a single embedded fiber [J]. Acta Materialia, 1997, 45(4): 1469-1476.

[10] 高 庆, 康国政. 短纤维复合材料应力传递的修正剪滞理论 [J]. 固体力学学报, 2000, 21(3): 198-204.

Gao Qing, Kang Guozheng. The revised shear-lag theory for stress transfer in short fiber composites [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 21(3): 198-204.

[11] 曾庆敦. 复合材料的细观破坏机制与强度 [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 157-159.

Zeng Qingdun. Microscopic damaged mechanism and strength of composites [M]. Beijing: Science Press, 2002: 157-159.