

文章编号: 1000-3851(2009)02-0210-07

基于虚拟裂纹闭合技术的应变能释放率分析

鲁国富^{*}, 刘 勇, 张呈林

(南京航空航天大学 直升机旋翼动力学国家重点实验室, 南京 210016)

摘要: 基于虚拟裂纹闭合技术(VCCT), 建立了复合材料层合板层间裂纹尖端的应变能释放率(SERR)三维有限元计算模型。该模型考虑了裂纹尖端大转动和离散单元形状变化对应变能释放率计算的影响, 修正了裂纹尖端应变能释放率的计算方法。利用该模型计算了裂纹长度为 15 mm 和 35 mm 时纯 I 型和纯 II 型的应变能释放率, 纯 I 型应变能释放率分别为 207 J/m^2 和 253 J/m^2 ; 纯 II 型应变能释放率分别为 758 J/m^2 和 1040 J/m^2 ; 计算值与试验值吻合得很好。同时, 该模型计算了混合型不同比例值 $R = (G_{II}/G_I + G_{II})$ 的长裂纹层合板层间断裂过程的应变能释放率, 其中 I 型和 II 型应变能释放率计算值与试验平均值的最大误差为 11.4%, 最小误差为 0.4%。该模型能有效计算裂纹尖端的应变能释放率。

关键词: 虚拟裂纹闭合技术; 应变能释放率; 复合材料层合板; 有限元分析

中图分类号: TB 332; V 258+.3; TB 330.1 文献标志码: A

Analysis of strain energy release rate based on virtual crack closure technique

LU Guofu^{*}, LIU Yong, ZHANG Chenglin

(National Key Laboratory of Rotorcraft Aero mechanics,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A three-dimensional (3D) finite element (FE) model for calculating the strain energy release rate (SERR) at the crack tip of composite laminates was built up based on the virtual crack closure technique (VCCT). The model involved effects on SERR computation by large rotation of the crack tip and variety of discrete element shapes. The method of SERR calculation at the crack tip was modified. When crack lengths were 15 mm and 35 mm, the SERRs of pure mode I and mode II were computed with this model. The SERRs of pure mode I are 207 J/m^2 and 253 J/m^2 , and the SERRs of pure mode II are 758 J/m^2 and 1040 J/m^2 . The predicted values agree with experimental data. At the same time, the mixed-mode SERRs of varied ratios $R = (G_{II}/G_I + G_{II})$ with large cracks were also computed. The error range between predicted SERRs and experimental date is 0.4% to 11.4%. This model can exactly calculate SERRs at the crack tip.

Keywords: virtual crack closure technique; strain energy release rate; composite laminates; finite element analysis

复合材料由于其比强度和比刚度高、耐疲劳等特点, 在航空航天领域得到广泛应用。复合材料的失效是限制复合材料应用的首要问题。分层是复合材料结构的一个主要失效模式^[1]。发生分层的结构, 其刚度和强度大大降低。

应变能释放率又称应变能差率, 是分层扩展的动力, 其可用于复合材料层合板的分层起裂和扩展的研究, 同时也适合于计算线性/非线性、2D/3D 情况下的含缺陷构件应力强度因子。根据能量平衡

原理可得到应变能释放率 G :

$$G = \frac{d}{dA} (W - U) \quad (1)$$

式中: W 为外力做的功; U 为体内弹性能; A 为裂纹面积。

由于分层起裂和扩展的临界应变能释放率在试验中容易测得, 且对于研究复合材料分层应变能释放率比应力强度因子方便, 因此应变能释放率被广泛用于各种外载(如冲击载荷、疲劳载荷和静载荷

收稿日期: 2008-03-06; 收修改稿日期: 2008-06-02

基金项目: “十一五”民机专项科研项目

通讯作者: 鲁国富, 博士研究生, 研究方向: 直升机旋翼疲劳寿命研究 E-mail: luguo@ua.edu.cn

等)以及热应力对复合材料造成分层的研究^[2-3]。总应变能释放率 G_T 包括 I 型应变能释放率 G_I 、II 型应变能释放率 G_{II} 和 III 型应变能释放率 G_{III} , 3 种应变能释放率对应的复合材料分层形式如图 1。

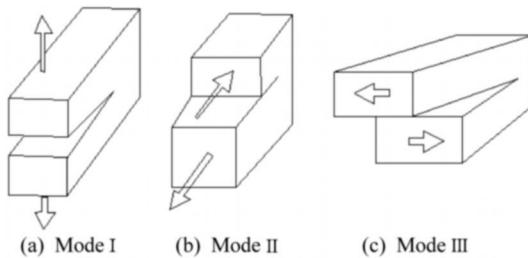


图 1 分层的 3 种形式

Fig. 1 Three modes of delamination

对于纯 I 型、II 型和 III 型裂纹分层与扩展, 可以通过计算层间裂纹的应变能释放率与层间断裂韧性值比较来判断; 对于混合型裂纹的起始与扩展, 需要建立相应的失效准则判断。因此, 裂纹尖端的应变能释放率的计算是首要问题。基于 2D 和 3D 有限元分析的虚拟裂纹闭合技术(VCCT)^[4-7] 可用来计算应变能释放率。虚拟裂纹闭合技术主要是将裂纹闭合积分拓展到有限元分析中。随后人们修正了这种方法, 采用一阶段裂纹闭合计算方法, 并逐渐从双材料平面单元裂纹模型扩展到壳单元模型和三维单元模型^[8-9]。

本文作者采用三维有限元模型, 避免了二维模型不能有效计算自由边界处应力, 无法准确计算自由边界处应变能释放率的缺陷; 同时建立了混合型层间断裂试验(MMB 试验)中的杠杆装置以及杠杆装置与试件的铰约束模型, 真实地模拟了试验过程, 消除了杠杆装置转动和其它附属装置(如位移计)的重力对应变能释放率计算引起的误差; 且充分考虑了裂纹尖端大转动和裂纹尖端畸变区离散单元形状的影响。采用该模型, 计算了裂纹尖端 I 型、II 型和 III 型应变能释放率及其分布, 并将不同裂纹长度的纯 I 型和纯 II 型应变能释放率与试验值比较, 以及将混合型中不同比值 R 的 I 型和 II 型应变能释放率与试验值进行了比较。

1 虚拟裂纹闭合技术

虚拟裂纹闭合技术和两阶段裂纹闭合技术是在裂纹闭合积分方法的基础上发展而来的, 裂纹扩展 Δa 释放的能量与闭合这段裂纹需要的能量相等的

假设是该技术的前提。两阶段裂纹闭合技术的 2 个状态如图 2 所示。

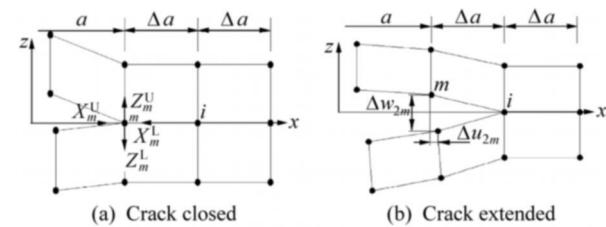


图 2 两阶段裂纹闭合技术

Fig. 2 Two-step crack closure technique

两阶段裂纹闭合技术需要完成 2 个状态的有限元计算, 在图 2(a) 中确定裂纹尖端节点的力, 在图 2(b) 中确定在该节点力作用下产生的位移差; 对于 2D 裂纹模型, 裂纹扩展 Δa 释放的能量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(X_{1m}\Delta u_{2m} + Z_{1m}\Delta w_{2m}) \quad (2)$$

式中: X_{1m} 、 Z_{1m} 分别为第 1 阶段裂纹尖端 x 向和 z 向裂纹上部节点力(X_{1m}^U 、 Z_{1m}^U) 或者下部节点力(X_{1m}^L 、 Z_{1m}^L), 如图 2(a) 所示; Δu_{2m} 、 Δw_{2m} 分别为第 2 阶段 x 向位移和 z 向位移差, 如图 2(b) 所示。

虚拟裂纹闭合技术在上述假设的基础上, 同时认为裂纹从 $a + \Delta a$ 扩展到 $a + 2\Delta a$ 并没有明显改变裂纹尖端的状态(图 3), 因此裂纹扩展到 k 时节点 i 上的位移和当裂纹尖端在 i 节点时 m 节点的位移是相等的, 这样虚拟裂纹闭合技术只需要一阶段有限元计算。对于 2D 模型, 该状态下释放的能量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(X_i\Delta u_m + Z_i\Delta w_m) \quad (3)$$

式中, X_i 、 Z_i 为裂纹尖端上部节点力(X_i^U 、 Z_i^U) 或者下部节点力(X_i^L 、 Z_i^L), 如图 3 所示。

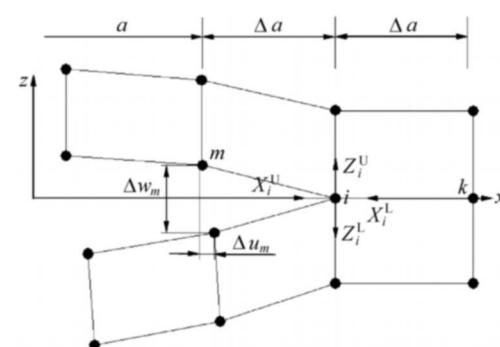


图 3 虚拟裂纹闭合模型

Fig. 3 Virtual crack closure model

确定能量 ΔE 后, 应变能释放率 $G = \Delta E / \Delta A$ 。

其中 ΔA 为裂纹面积。

通常复合材料结构分层是混合模式的, 因此需要计算相应 3 种分层模式的应变能释放率 G_I 、 G_{II} 和 G_{III} , 而这要求有限元计算模型必须是三维的。计算公式分别为

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} Z_M (w_{Mm} - w'_{Mm}) \quad (4)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} X_M (u_{Mm} - u'_{Mm}) \quad (5)$$

$$G_{III} = -\frac{1}{2\Delta A} Y_M (v_{Mm} - v'_{Mm}) \quad (6)$$

式中: 下标 M 为节点行的编码; 下标 i 、 m 、 n 分别为节点列的编码; X 、 Y 和 Z 为节点力; u 、 v 、 w 、 u' 、 v' 和 w' 为节点位移, 如图 4(a) 所示。 $\Delta A = \Delta a \times b$, 如图 4(b) 所示。

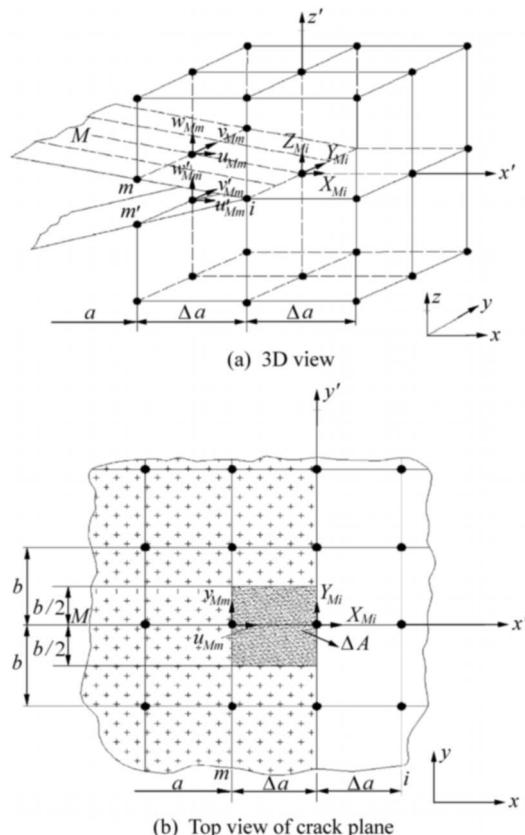


图 4 三维虚拟裂纹闭合技术示意图

Fig. 4 Sketch of 3D virtual crack closure technique

2 裂纹尖端的应力奇异性和平动分析

2.1 裂纹尖端的应力奇异性分析

裂纹尖端应力场的奇异性会导致应变能释放率计算的不收敛, 因此需要有效计算裂纹尖端的应力

场; 而裂纹尖端单元长度的选择对准确计算裂纹尖端应力起到至关重要的作用。若裂纹尖端单元长度 Δa 太大, 求解的节点应力精度过低, 应变能释放率的计算不准确; 若 Δa 太小, 会导致节点应力求解发生振荡, 同时 Δa 小于单层板厚度时, 则有限元模型不能真实计算各向异性复合材料层合板的应力场。根据计算收敛性验证, 以及经验³ 取 $\Delta a = 0.01a$, 或者是纤维直径的几倍。

2.2 裂纹尖端大转动分析

对于结构发生大位移产生裂纹尖端转动或出现了刚性转动, 计算裂纹尖端应变能释放率需要将节点力和节点位移转换到裂纹尖端的局部坐标系下, 局部坐标系的切向(x' 或者 II 型模式) 和法向(z' 或者 I 型模式) 如图 5 所示。在局部坐标系下的应变能释放率分别为

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} Z'_i (w'_m - w'_{m'}) \quad (7)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} X'_i (u'_m - u'_{m'}) \quad (8)$$

式中: Z'_i 、 X'_i 为在局部坐标系 $x' z'$ 下 i 节点上的节点力, 即 $\begin{bmatrix} Z'_i \\ X'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ X_i \end{bmatrix}$; Z_i 、 X_i 为总体坐标系 xz 下 i 节点上的节点力; β 为裂纹尖端转动角; u'_m 、 w'_m 为 m 节点在局部坐标系 $x' z'$ 下的 x' 向位移和 z' 向位移; $u'_{m'}$ 、 $w'_{m'}$ 为 m' 节点在局部坐标系 $x' z'$ 下的 x' 向位移和 z' 向位移, 且 $\begin{bmatrix} w'_m - w'_{m'} \\ u'_m - u'_{m'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m - w_{m'} \\ u_m - u_{m'} \end{bmatrix}$; u_m 、 w_m 为 m 节点在总体坐标系 xz 下的 x 向位移和 z 向位移; $u_{m'}$ 、 $w_{m'}$ 为 m' 节点在总体坐标系 xz 下的 x 向位移和 z 向位移。

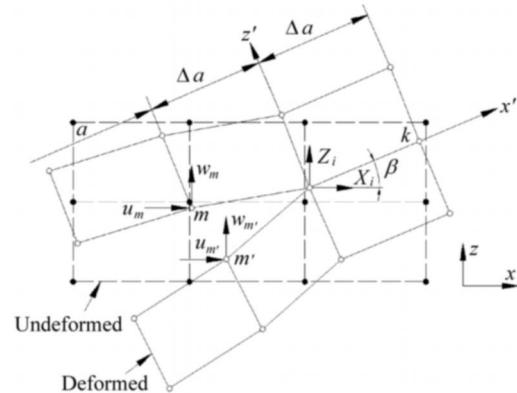


图 5 裂纹尖端大转动示意图

Fig. 5 Sketch of large rotation of crack tip

3 裂纹尖端单元长度和宽度分析

3.1 裂纹尖端单元长度分析

在裂纹尖端处存在应力集中, 有限元网格需要局部细化处理或使用自适应剖分方案, 裂纹尖端的单元尺寸是变化的, 如图 6 所示。

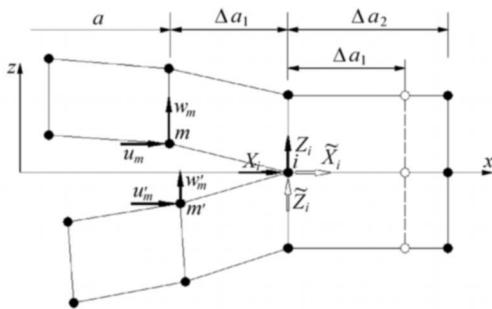


图 6 裂纹尖端不同长度单元示意图

Fig. 6 Sketch of crack tip with different length elements

对应变能释放率的计算修正可以通过裂纹尖端的应力场分布来完成。沿裂纹扩展方向应力分布通常可表示为¹⁹

$$\sigma(r) = b \sigma_\infty \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{dX}{dA} = \frac{dX}{bdr} \quad (9)$$

式中: b 为单元宽度; σ_∞ 为未受应力集中影响的远场应力; X 为距离裂纹 r 处的力。

由式(9)沿一个单元长度积分可得裂纹尖端上的节点力, 当单元长度为 Δa_1 时, 可得

$$\tilde{X}_i = \int_0^{\Delta a_1} b \sigma_\infty \frac{dr}{\sqrt{r}} = 2b \sigma_\infty \sqrt{\Delta a_1} \quad (10)$$

当单元长度为 Δa_2 时, 同理可得

$$X_i = 2b \sigma_\infty \sqrt{\Delta a_2} \quad (11)$$

由式(10)和式(11)可知, 裂纹尖端的节点力只与单元长度有关, 因此可得

$$\tilde{X}_i = \left(\frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right)^{1/2} X_i \quad (12)$$

将式(12)带入裂纹前后单元长度相等的应变能释放率计算式(5)中, 可得

$$G_{\text{II}} = -\frac{1}{2b \Delta a_1} X_i (u_m - u'_m) \left(\frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right)^{1/2} \quad (13)$$

同理

$$G_{\text{I}} = -\frac{1}{2b \Delta a_1} Z_i (w_m - w'_m) \left(\frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right)^{1/2} \quad (14)$$

3.2 裂纹尖端单元宽度分析

上述应变能释放率的计算都是基于单元宽度是常值来考虑的, 而实际结构中, 对三维分层缺陷的处理, 会产生变宽度的有限单元, 如图 7 所示。

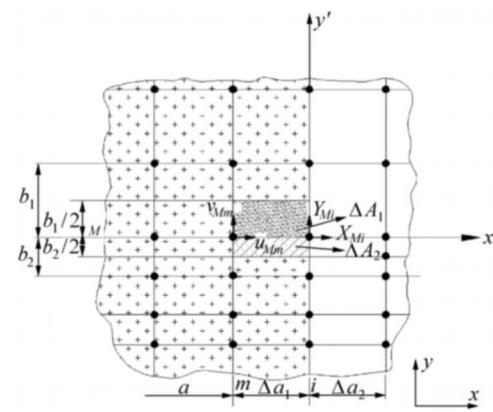


图 7 裂纹尖端不同宽度单元示意图

Fig. 7 Sketch of crack tip with different width elements

图 7 中标出了节点 i 上节点力作用的裂纹扩展面积($\Delta a_1 + \Delta a_2$), 同时考虑裂纹尖端单元长度不等, 应变能释放率计算等式修正为

$$G_{\text{I}} = -\frac{1}{2(\Delta a_1 + \Delta a_2)} Z_i (w_m - w'_m) \left\{ \frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

$$G_{\text{II}} = -\frac{1}{2(\Delta a_1 + \Delta a_2)} X_i (u_m - u'_m) \left\{ \frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

$$G_{\text{III}} = -\frac{1}{2(\Delta a_1 + \Delta a_2)} Y_i (v_m - v'_m) \left\{ \frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \right\}^{1/2} \quad (17)$$

对于自由边界上的应变能释放率计算, 由于只存在 Δa_1 的裂纹断裂面, 则应用上述公式时应令 Δa_2 为 0; 对于不是直线分布的裂纹尖端分层, 上述公式也是适用的。

4 有限元分析

4.1 有限元模型的建立

本文中应用八节点三维实体单元建立层合板的 VCCT 有限元模型, 计算了复合材料层合板的 I 型(DCB)、II 型(ENF) 和混合型(MMB) 层间断裂的应变能释放率, 并与韧性试验结果^[11]进行了对比。图 8 是 3 种试验示意图。

DCB 试验和 ENF 试验广泛用于测量纯 I 型和纯 II 型层间断裂韧性值, 而 Euler-Bernoulli 梁理论或带剪切效应的 Timoshenko 梁理论是计算断裂韧性值的理论基础。MMB 试验则将 DCB 试验和 ENF 试验有效地结合, 能同时测量 I 型和 II 型应变能释放率以及靠简单移动外载荷作用点便能获得大范围的应变能释放率比值 R , 因此其应用越来越广泛。

本文中采用的材料是 HTA/6376C 碳纤维/环氧树脂基复合材料层合板, 其材料性能参数为 E_1

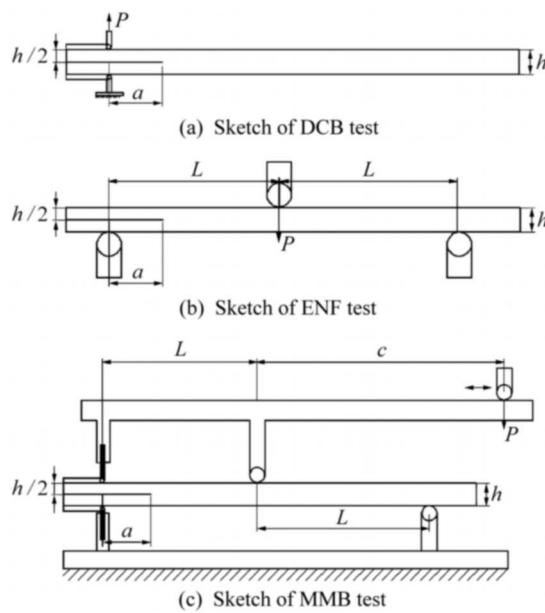


图 8 试件几何参数和载荷状态

Fig. 8 Geometry parameters of specimen and load states

$E_2 = E_3 = 10.5 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.30$, $\nu_{23} = 0.51$, $G_{12} = G_{13} = 5.25 \text{ GPa}$, $G_{23} = 3.48 \text{ GPa}$ 。试件单铺层厚度为 0.13 mm , 宽度 $b = 20 \text{ mm}$, 长度 $l = 150 \text{ mm}$, 名义厚度 $2h = 3.12 \text{ mm}$, 试件铺层为 $0_{12}/(\pm 5/0_4) \text{ s}$, 其中“//”是预制分层面。

本文中建立的 VCCT 三维有限元模型(图 9)包括试件模型、杠杆装置模型以及二者之间的运动约束(图 9 中 R), 真实模拟了试验过程; 避免了由于简化杠杆装置使用线性分析方法确定试件上承受的外载而引入误差的缺陷; 当移去杠杆装置模型, 此模型可计算纯 I 型和纯 II 型应变能释放率。由于杠杆刚度远大于试件刚度, 杠杆用刚性梁单元模拟; 杠杆与试件的连接使用刚性杆单元模拟; 试件使用八节点三维实体各向异性单元模拟; 且在实体单元与杆单元之间建立铰接单元, 并对与作用杆接触的试件上纵排节点自由度耦合, 模拟试件在接触的横截面上的位移关系。本文中建立的模型的求解集运动与弹性变形于一体, 能真实模拟试件的受载过程, 提高了试件内部应力与位移的计算精度。

4.2 计算结果分析

由于复合材料试验数据存在很大分散性, 需要对同一试件做多次测量, Juntti M、Asp L E 和 Olsson R^[12]对每种情况分别测试 5 次, 给出测量结果的平均值和标准差, 其试验结果和本文中的预测值分别列在表 1 中。

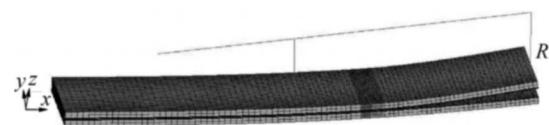


图 9 复合材料层合板三维有限元模型

Fig. 9 3D finite element model of composite laminates

在三维有限元模型的基础上, 本文中应用了 VCCT 技术。考虑到裂纹尖端离散单元尺寸的变化, 采用公式(15)、(16)和(17)来修正应变能释放率; 由于试件在加载过程中发生大位移, 裂纹尖端发生大转动, 因此将裂纹尖端的节点力和节点位移转换到裂纹尖端坐标系中, 即采用公式(7)、(8)中的节点力和节点位移替代公式(15)、(16)中的节点力和节点位移。

DCB 试验中试件裂纹尖端各型应变能释放率(SERR)分布如图 10。

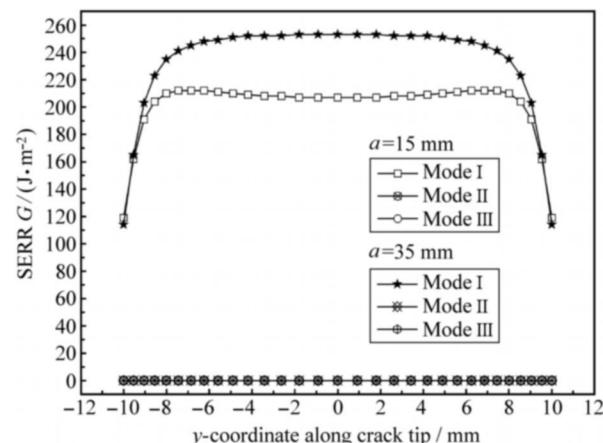


图 10 DCB 试验中试件各型应变能释放率分布

Fig. 10 Distribution of SERR of specimen in the DCB test

由图 10 中看出, 无论裂纹长度是 15 mm 还是 35 mm , II型和III型应变能释放率都是 0, 这与 DCB 试验只产生 I型应变能释放率的理念和理论分析是一致的。其次 2 条 G_I 分布曲线规律是一致的, 在自由边界处 G_I 值下降很多, 而且在最靠近自由边界处这 2 种情况的 G_I 值基本相等。主要是因为在自由边界处, 节点承受周围约束不强, 产生同样张开位移, 所需外力较小, 故产生较小的应变能释放率。由于结构对称, 应变能释放率也成对称分布; 同时对称点处应变能释放率不受自由边界影响, 可作为该结构的应变能释放率与试验值比较。 $a = 15 \text{ mm}$ 时, $G_I = 207 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值 258 J/m^2 相比误差为 -19.8% , 这主要由复合材料试验结果

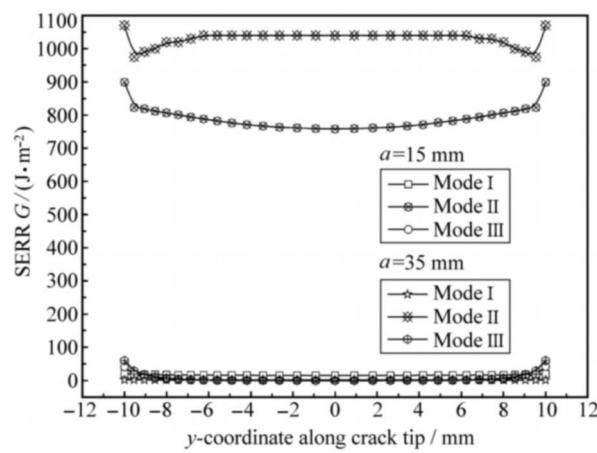


图 11 ENF 试验中各型应变能释放率分布

Fig. 11 Distribution of SERR of specimen in the ENF test

分散性、结构的非线性以及裂纹尖端应力的奇异性带来较大的误差。 $a = 35 \text{ mm}$ 时, $G_I = 253 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值 260 J/m^2 吻合得很好。

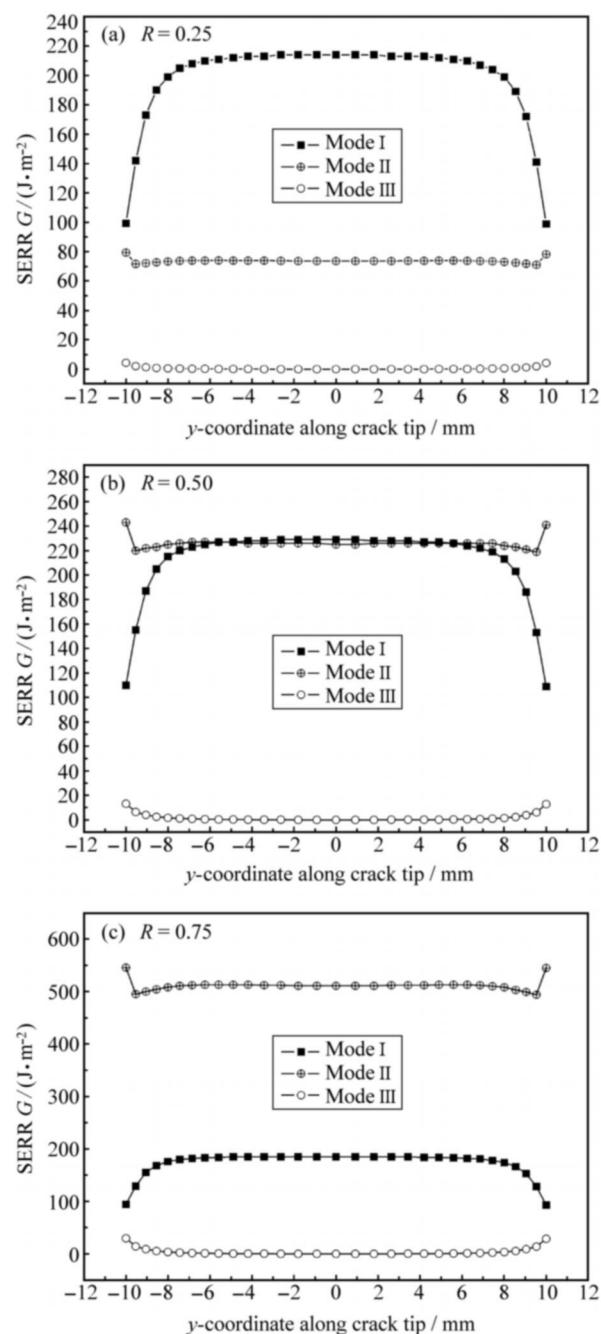
同时借助三维有限元模型模拟了 ENF 试验, 计算出 II 型应变能释放率, 沿 y 向分布如图 11 所示。

由图 11 可知, ENF 试验中主要产生的是 II 型应变能释放率, I 型和 III 型基本上为 0, 这与理论是一致的。同时 G_{II} 在自由边界处产生了跳跃, 主要是此点承受周围约束不强, 产生较大的节点力。当 $a = 15 \text{ mm}$ 时, 对称节点处的 $G_{II} = 758 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值误差为 2.2%; 当 $a = 35 \text{ mm}$ 时, 对称节点处的 $G_{II} = 1040 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值误差为 3.8%。因此应用基于三维有限元的 VCCT 技术能有效地计算复合材料层合板的层间应变能释放率。

对不同比值 R 的长裂纹($a = 35 \text{ mm}$) MMB 试验, 应用 VCCT 技术计算各型应变能释放率, 其分布如图 12 所示。

图 12 中, 不同 R 值下对应的各型应变能释放率的分布规律是一致的。在自由边界处 G_I 有大幅下降, 降幅超过 50%; 而 G_{II} 则在最端部有小幅跳跃, 跳跃幅度 10% 左右; 而 G_{III} 也有小幅上升, 主要是在自由边界周围产生少量的 y 向应力, 与理论假设 0 值有差别, 但更符合实际情况。

当 $R = 0.25$ 时, 计算值分别为 $G_I = 214 \text{ J/m}^2$ 、 $G_{II} = 73.6 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值误差分别为 -6.1% 和 -4.4%, 吻合得很好; 当 $R = 0.50$ 时, 应用 VCCT 计算的应变能释放率分别为 $G_I = 229 \text{ J/m}^2$ 、 $G_{II} = 226 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值误差分别

图 12 不同 R 值时各型应变能释放率分布Fig. 12 Distribution of SERR with respect to R

为 3.2% 和 0.4%; 当 $R = 0.75$ 时, 计算出的应变能释放率分别为 $G_I = 185 \text{ J/m}^2$ 、 $G_{II} = 511 \text{ J/m}^2$, 与试验平均值误差分别为 11.4% 和 1.0%, 虽然 I 型误差相对较大, 但仍在试验可信度范围($< 166 + 3 \times 8 = 190 \text{ J/m}^2$)之内, 因此应用 VCCT 技术计算应变能释放率可收到很好的效果。

由表 1 可知, 计算值与试验值基本吻合, 仅当 $a = 15 \text{ mm}$ 时, 计算值与 DCB 试验值误差较大, 但

表 1 应变能释放率的试验值和计算值
Table 1 Experimental values and calculated values of SERR

Test type	DCB		ENF		MMB ($a=35$ mm)		
	$a=15$ mm	$a=35$ mm	$a=15$ mm	$a=35$ mm	$R=0.25$	$R=0.50$	$R=0.75$
Experimental values ($J \cdot m^{-2}$)	G_I	258±12	260±10	—	—	228±21	222±12
	G_{II}	—	—	742±53	1002±63	77±7	225±11
	G_{III}	—	—	—	—	—	—
Calculated values ($J \cdot m^{-2}$)	G_I	207	253	15.3	1.7	214	229
	G_{II}	0	0	758	1040	73.6	226
	G_{III}	0	0	0	0	0	0

Note: The ratio R was decided by c (see Fig. 8(c)) in the analysis based on beam theory.

仍可以接受；其他情况的计算值全部处于试验值的可信度范围之内，与试验平均值相比误差较小，说明采用本文中建立的三维 VCCT 有限元模型能有效计算复合材料裂纹尖端应变能释放率。

5 结 论

(1) 针对复合材料层合板的分层失效模式，建立了计算其对应的应变能释放率三维有限元模型。

(2) 引入 VCCT 同时，考虑了裂纹尖端大转动和局部细化产生不同单元长度的影响，对各型应变能释放率的计算进行了修正；将杠杆装置和运动约束建立到有限元模型中，消除了杠杆转动和附属装置重力引入的非线性误差。

(3) 通过计算与试验对比表明：短裂纹试件的应变能释放率计算值与 DCB 试验值误差较大，但长裂纹试件的应变能释放率计算精度较高；不同裂纹长度试件的应变能释放率计算值与 ENF 试验值吻合得很好，误差小于 5%；不同比值 R 的长裂纹试件各型应变能释放率计算值与 MMB 试验值基本吻合；仅当 $R=0.75$ 时 G_I 误差达到 11.4%，但仍处于材料性能分散性范围之内；其他的计算误差都小于 10%。基于 VCCT 技术计算复合材料层合板层间裂纹处的应变能释放率达到了很好的效果。

(4) 由于自由边界的影响，端部的应变能释放率有较大变化， G_I 和 G_{III} 变化比较平缓， G_I 变化幅值比较大， G_{III} 变化幅值较小； G_{II} 变化幅值比较小，但在最外端发生跳跃； G_{III} 基本上维持在 0 值，这与理论完全吻合。

参考文献：

[1] Tay T E. Characterization and analysis of delamination

fracture in composite: An overview of developments from 1990 to 2001 [J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(1): 1-32.

- [2] Pradhan B, Babu P R. Influence of ply sequence and the modastic stress field on asymmetric delamination growth behavior emanating from elliptical holes in laminated FRP composites [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2008, 130(1): 1006-1015.
- [3] 贺鹏飞, 李京剑, Yuan C, Stern R, Clegg W J. 从微孔洞起始的热冲击裂纹的数值研究——Ⅱ: 能量释放率分析 [J]. 复合材料学报, 2002, 19(5): 79-83.
- [4] He Pengfei, Li Jingjian, Yuan C, Stern R, Clegg W J. Initiation of crack from the pores in porous ceramics under thermal shock Ⅱ: Energy release rate [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2002, 19(5): 79-83.
- [5] 朱华东, 矫桂琼, 杨宝宁. 缝合复合材料Ⅱ型层间断裂特性研究 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(2): 85-89.
- [6] Zhu Huadong, Jiao Guiqiong, Yang Baoning. Investigation into the effect of stitching in CFRP on mode Ⅱ delamination toughness [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2001, 18(2): 85-89.
- [7] 阎俊霞, 王立君, 徐凯龄, 贾燕. 纯弯曲 Sandwich 梁试样界面裂纹扩展的应变能释放率 [J]. 复合材料学报, 1999, 16(1): 72-76.
- [8] Yan Junxia, Wang Lijun, Xu Kailing, Jia Yan. Strain energy release rate of crack propagation along the pure bend sandwich beam specimen [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 1999, 16(1): 72-76.
- [9] Raju I S. Calculation of strain energy release rates with higher order and singular finite elements [J]. Engineering Fracture and Mechanics, 1987, 28(3): 251-274.
- [10] Miravete A, Jimenez M A. Application of the finite element method to prediction onset of delamination growth [J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(2): 89-105.
- [11] Krueger R, Minguez P J. Skin-stiffener debond prediction based on computational fracture analysis, NASA/CR-2005-213915[R]. Virginia: NASA, 2005: 5-7.
- [12] Krueger R, Goetze D. Influence of finite element software on energy release rates computed using the virtual crack closure technique, NASA/CR-2006-214523[R]. Virginia: NASA, 2006: 7-14.
- [13] Quian W, Sun C T. Calculation of stress intensity factors for interlaminar cracks in composite laminates [J]. Composite Science and Technology, 1997, 57(6): 287-290.
- [14] Juntti M, Asp L E, Olsson R. Assessment of evaluation methods for the mix-mode bending test [J]. Journal of Composite and Technology Reviews, 1999, 21(1): 37-48.