

文章编号: 1000-3851(2009)03-0207-06

基于组合单元的层压复合材料三维应力分析

李亚智*, 郭晓波, 黄志远

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要: 为了分析层压复合材料层间特性, 推导了将刚性元-弹簧元相结合的离散型界面单元的刚度矩阵。建立了层压板的准三维模型, 即将 Mindlin 板单元应用于层压板的各子层, 层间作用则利用上述界面单元来模拟。通过弯曲板元计算子层面内应力, 通过界面单元的弹簧力确定层间应力。对受面内拉伸的多向层压板条进行了应力分析, 与使用商业软件三维实体模型计算得到的层间和面内应力对比, 结果表明准三维模型的计算结果合理。这种新型界面单元的优点是可用来表征层间损伤, 并且能通过对弹簧刚度的消减来模拟分层损伤的演变。

关键词: 复合材料层压板; 有限元; 准三维模型; 层间应力; 面内应力

中图分类号: TB33; O343.8 **文献标志码:** A

3D stress analysis of composite laminate based on a kind of interfacial element

LI Yazhi*, GUO Xiaobo, HUANG Zhiyuan

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: An interfacial element derived from the combination of two rigid elements and three spring elements was developed to analyze the interfacial properties of composite laminates. The 3D stress distribution of a laminate was determined by means of a quasi-3D finite element mesh, in which each layer of the laminate is modeled by Mindlin plate elements, and the cohesion among the neighborhood layers is simulated by the interfacial elements, for which none of the additional nodes and degrees of freedom are needed. The in-plane stress can be determined from the plate elements, and the interlaminar stress can be confirmed from the spring force in interfacial elements. As an example, a rectangular multidirectional laminate under tension was analyzed. The 3D stress determined correlates well with that of a 3D solid element model. With the recommended interfacial elements, the delamination damage and its evolution can be easily simulated by the degradation of the corresponding spring stiffness.

Keywords: composite laminate; finite element method; quasi-3D model; interlaminar stress; in-plane stress

层压复合材料在工程领域具有广泛用途, 层间界面强度是制约其性能的主要因素。层压板复合材料各子层弹性模量的不一致和胶连后的变形连续性导致层间产生应力。层间应力是导致材料分层失效的重要原因, 因此求解层间应力的大小和分布受到广泛关注和研究。

Kant 等^[1]总结了层压板层间应力的常用计算方法。Pipes 和 Pagno 在三维弹性力学理论的基础上使用有限差分法^[2]求解层间应力。拟三维有限元法^[3-5]采用二维高阶单元, 在单元特性中考虑铺层顺序和铺设角的作用, 可方便地得到层间应力结果。这类方法也被用于压电智能材料界面应力计

算^[6]以及热载下的层压板层间应力^[7]的计算等。利用三维实体单元的有限元建模方法既可以真实地模拟复合材料层合板的结构特性, 又可以直接使用商业软件进行计算, 因而得到广泛应用。

用有限差分法计算层间应力比较繁琐, 且无法适应复杂的边界条件。尽管拟三维和三维有限元法均可方便地计算层间应力, 但在复合材料的损伤表征、渐进强度计算和疲劳分析中存在一些问题, 即不方便模拟分层损伤状态和相应的刚度退化。虽然可利用商用软件在三维层间加入界面单元来模拟层间损伤^[8], 但计算规模较大。为此, 本文中尝试建立一种适合计算层压板层间应力和表达层间损伤的

收稿日期: 2008-06-02; 收修改稿日期: 2008-10-07

通讯作者: 李亚智, 教授, 研究方向为复合材料结构耐久性 E-mail: yazhi.li@nwpu.edu.cn

准三维有限元模型，该模型包含一种由刚性元和弹簧元组合而成的层间界面单元，并编制计算程序。

1 层压板准三维有限元模型

张培新等^[9]提出了一种层压板准三维有限元模型，如图 1(a)所示。在层压板的各子层中面利用等参 4 结点弯曲板元划分网格，将相邻子层的每一对板元结点作为主结点，并在主结点对之间增加一对重合的副结点。每对主、副结点之间通过刚性单元连接，长度为子层厚度的一半($h/2$)，重合的副结点之间则嵌入 3 个弹簧元。

4 结点板元的刚度由子层或单向板的面内刚度性质所决定；刚性元确定主、副结点自由度之间的关联关系，并反映各层的厚度；3 个弹簧元的刚度常数近似地根据单向板厚度方向的刚度特性确定，它们分别是

$$k_x = \frac{G_{13}A}{h}; k_y = \frac{G_{23}A}{h}; k_z = \frac{E_{33}A}{h} \tag{1}$$

式中， A 为单元折算面积，等于刚性元-弹簧元处板元结点的相关单元面积总和的 $1/4$ 。计算中，3 个弹簧力分别用来计算 3 个层间应力分量 τ_{xz} 、 τ_{zy} 和 σ_z 。对于对称铺层的层压板，只需要对板厚度的一半进行建模，因此在厚度中面处还会出现图 1(b)所示的情况。

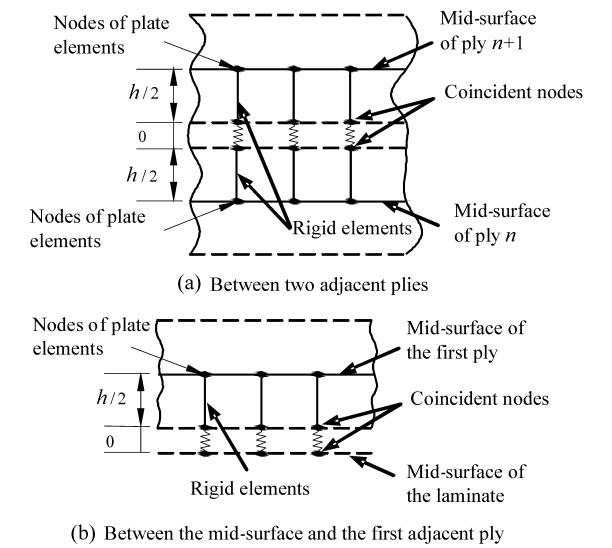


图 1 准三维模型示意图
Fig. 1 Schematic illustration of the quasi-3D model

这种准三维模型的优点是，可以通过弹簧刚度的适当退化来表征层压板层间损伤及其扩展。但是这种模型在对各子层划分网格的基础上，在各子层

之间增加了许多用来连接弹簧元的副结点，使计算规模大大增加。为此，本文中推导刚性元和弹簧元组合的层间界面单元，以消除副结点及其自由度，从而缩小计算规模。

2 层压板的界面单元

图 2 所示为 2 个刚性元和 1 组弹簧元的组合。结点 1、2 位于相邻子层的中面，是子层弯曲板元的结点，也是刚性元的主结点。1' 和 2' 分别为 2 个刚性元的副结点，位于相邻子层的层间界面上，位置坐标重合。设主、副结点各有 5 个自由度，所以在



图 2 刚性元-弹簧元组合界面单元
Fig. 2 The interfacial element combined with rigid and spring elements

2 个副结点之间嵌入 5 个弹簧单元。主、副结点的位移列阵分别为

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}; \delta' = \begin{bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：
 $\delta_i = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{ix} \ \theta_{iy}]^T$;
 $\delta'_i = [u'_i \ v'_i \ w'_i \ \theta'_{ix} \ \theta'_{iy}]^T \ (i = 1, 2)$ (3)
式中矩阵内 5 个元素分别为主、副结点按坐标正向的 3 个位移分量和 2 个转角分量。

相应的主、副结点的结点力列阵分别为

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}; F' = \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中：
 $F_i = [F_{ix} \ F_{iy} \ F_{iz} \ M_{ix} \ M_{iy}]^T$;
 $F'_i = [F'_{ix} \ F'_{iy} \ F'_{iz} \ M'_{ix} \ M'_{iy}]^T \ (i = 1, 2)$ (5)

式中矩阵内 5 个元素分别为主、副结点按坐标正向的 3 个结点力分量和 2 个结点力矩分量。主、副结点位移列阵和结点力列阵的转换关系分别为

$$\delta' = T_\delta \delta; F' = T_F F \tag{6}$$

其中：

$$T_\delta = \begin{bmatrix} t_{\delta 1} & 0 \\ 0 & t_{\delta 2} \end{bmatrix};$$

$$t_{\delta i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z'_i - z_i \\ 0 & 1 & 0 & -(z'_i - z_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y'_i - y_i & -(x'_i - x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

且利用虚功原理可以证明:

$$\mathbf{T}_\delta^T = -\mathbf{T}_F^{-1} \tag{8}$$

5 个弹簧元的组合刚度方程为

$$\mathbf{K}^S \boldsymbol{\delta}' = -\mathbf{F}' \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{K}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^S & -\mathbf{k}^S \\ -\mathbf{k}^S & \mathbf{k}^S \end{bmatrix}, \mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta y} \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中: k_x 、 k_y 和 k_z 按式(1)确定, 分别对应层间应力分量 τ_{zx} 、 τ_{zy} 和 σ_z ; 转动刚度 $k_{\theta x}$ 和 $k_{\theta y}$ 在层间应力分析中不必要, 可以赋零值。

刚性元和弹簧元组合成一种层压板的界面单元。将式(6)和式(8)代入式(9)可知界面元的刚度方程为

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F} \tag{10}$$

其中刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_\delta^T \mathbf{K}^S \mathbf{T}_\delta \tag{11}$$

图 1(b)中的界面单元是上述界面单元的特例, 相关的公式不再赘述, 但需要增加一层中面结点。

3 多向层压板的三维应力分析

3.1 有限元模型

编制层压板准三维模型有限元程序, 进行多向层压板条受面内拉伸时的层间应力分析。算例铺层为 $[-45/0/45/90/-45/0/45/0]_s$, 材料为 T300/QY8911 碳纤维增强双马树脂, 纤维体积含量为 60%~65%, 尺寸为 100 mm(长)×25 mm(宽), 单层名义厚度 0.125 mm。铺层具有对称性, 仅取厚度中面以下 8 层进行有限元建模。各子层采用基于 Mindlin 薄板弯曲理论的 4 结点等参单元^[10]划分网格, 单元属性如表 1 所示, 相邻子层之间则采用了本文中导出的界面单元。

表 1 T300/QY8911 材料弹性常数

Table 1 Material constants of T300/QY8911 composite

$E_{11}/$ GPa	$E_{22}/$ GPa	$E_{33}/$ GPa	$G_{12}/$ GPa	$G_{23}/$ GPa	$G_{13}/$ GPa	ν_{12}	ν_{23}	ν_{13}
135.0	8.8	8.8	4.47	3.2	4.47	0.33	0.48	0.15

模型坐标原点建立在板的形心, x 轴沿长度方

向, y 轴沿宽度方向。为了考察界面单元和准三维模型的计算结果, 同时采用商用有限元软件的 20 结点三维实体单元划分网格, 沿厚度方向每个子层 1 个单元。图 3 给出 2 种有限元模型的网格图。2 种模型均在典型截面 $x=0$ 、靠近两侧边 $y=\pm 12.5$ 附近适当加密网格。边界条件和加载方式为: 层压板中面与相邻层之间处采用图 1(b)的界面元, 中面上各结点 z 向位移 $w=0$; 板的一端所有板元结点固支, 在另一端的各板元结点施加 x 方向的位移控制载荷。这种约束和加载方式可以近似模拟试验件在试验机上牢固夹持及拉伸的情形, 同时各子层受载大小可根据刚度自动分配。

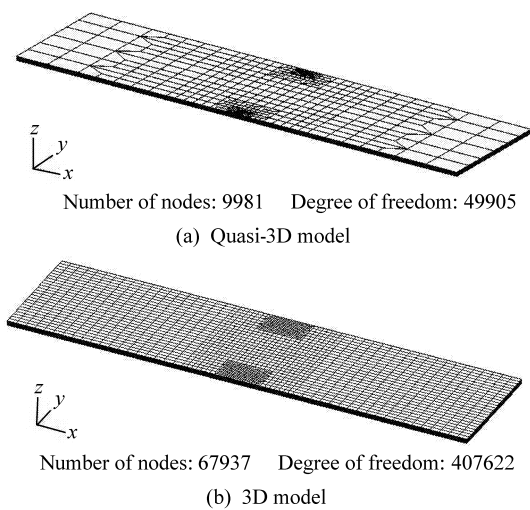


图 3 准三维和三维有限元分析网格
Fig. 3 Finite element meshes of the quasi-3D model and the 3D model

三维模型沿厚度方向每个子层有 1 层实体元, 高度等于子层厚度。为避免单元性态变差, 单元的面内尺寸相对于厚度方向的尺寸不能过大, 如图 3(b), 从而导致网格密度较大。而准三维模型对每个子层采用弯曲板元划分, 在远离高应力梯度的区域单元尺度可以较大, 从而减小计算规模。这里三维实体模型总自由度约为准三维模型的 8 倍。

3.2 层间应力分布

将光滑板条中面及其以下的各个层间按 0~7 进行编号。为了显示本文中界面元准三维模型的合理性, 并列给出准三维模型和三维实体模型计算的层间应力分布。同时还给出了有假设分层损伤的算例, 其损伤区域如图 4 所示, 层间 1、3 在以 (0, 12.5) 和 (0, -12.5) 为圆心、半径为 1 mm 的半圆形区域内发生脱层(相应的弹簧刚度置零)。为节省篇

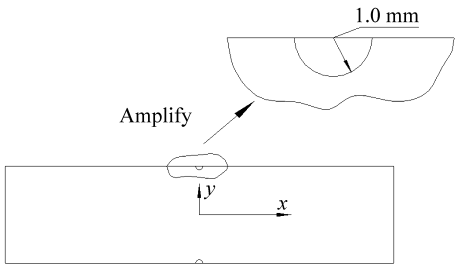


图 4 分层损伤区域
Fig. 4 The area of delamination damage

幅，图 5 仅给出截面层间 0~3 的应力分布。图中横坐标为 y 坐标的无量纲值 $2y/W$ ， W 为板宽，纵

坐标为远端平均拉伸应力正则化后的应力水平，即单位拉伸应力下的应力水平。

由图 5 可以得出：(1)受面内拉伸板条的自由边附近有明显的层间应力集中，最大层间应力的大小接近拉伸应力的 10%。层间剪应力关于模型 x 轴呈反对称分布；层间正应力分布关于模型 x 轴对称。(2)准三维模型能够反映出自由边附近应力梯度的细节变化。准三维模型根据弹簧变形直接得出结点处的层间应力；三维模型的层间应力则是由单元积分点上的应力外推到层间结点并绕结点平均而得出的近似值。(3)三维模型和准三维模型得到了

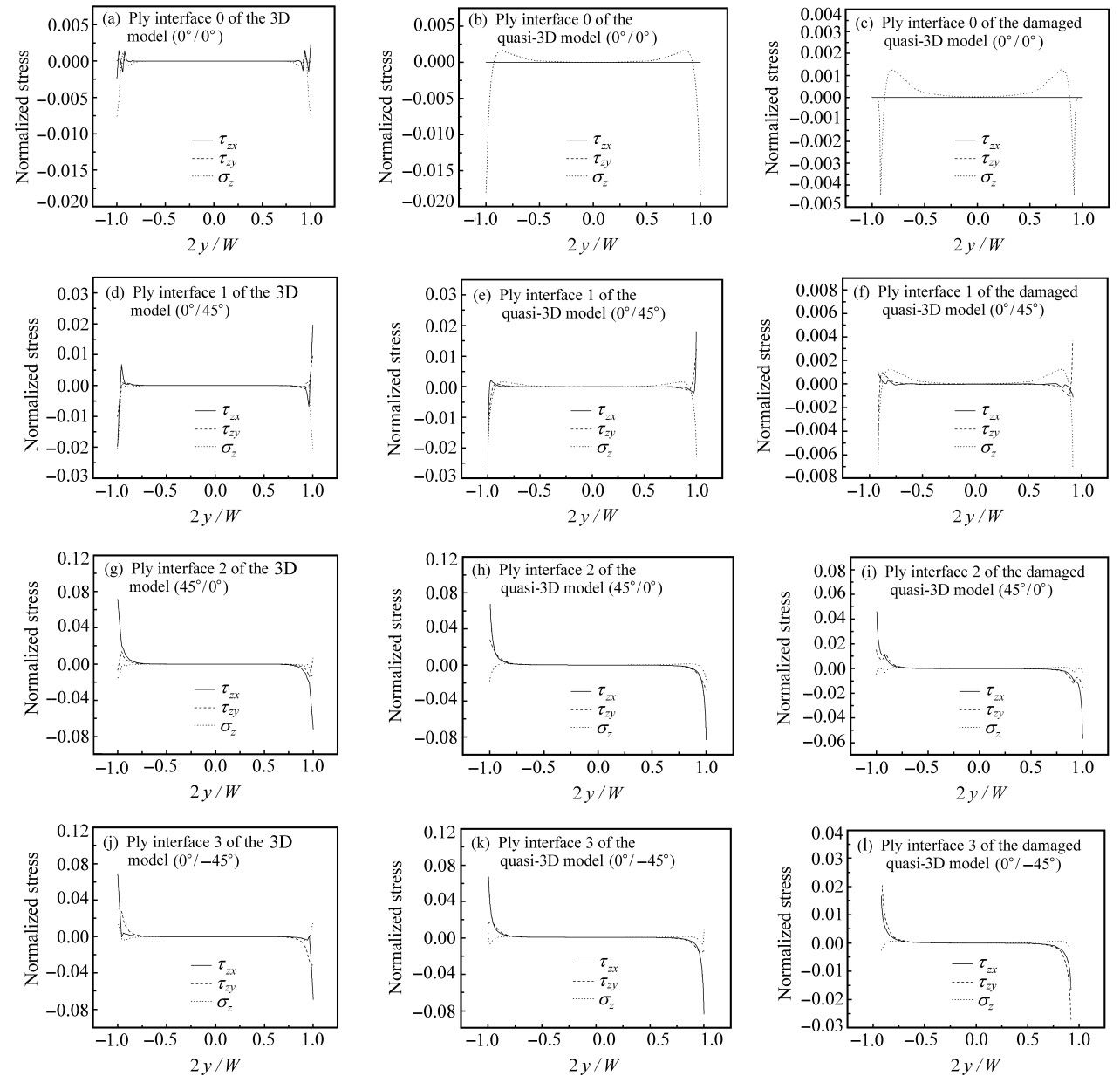


图 5 层间应力分析结果
Fig. 5 The distribution of the interlaminar stresses

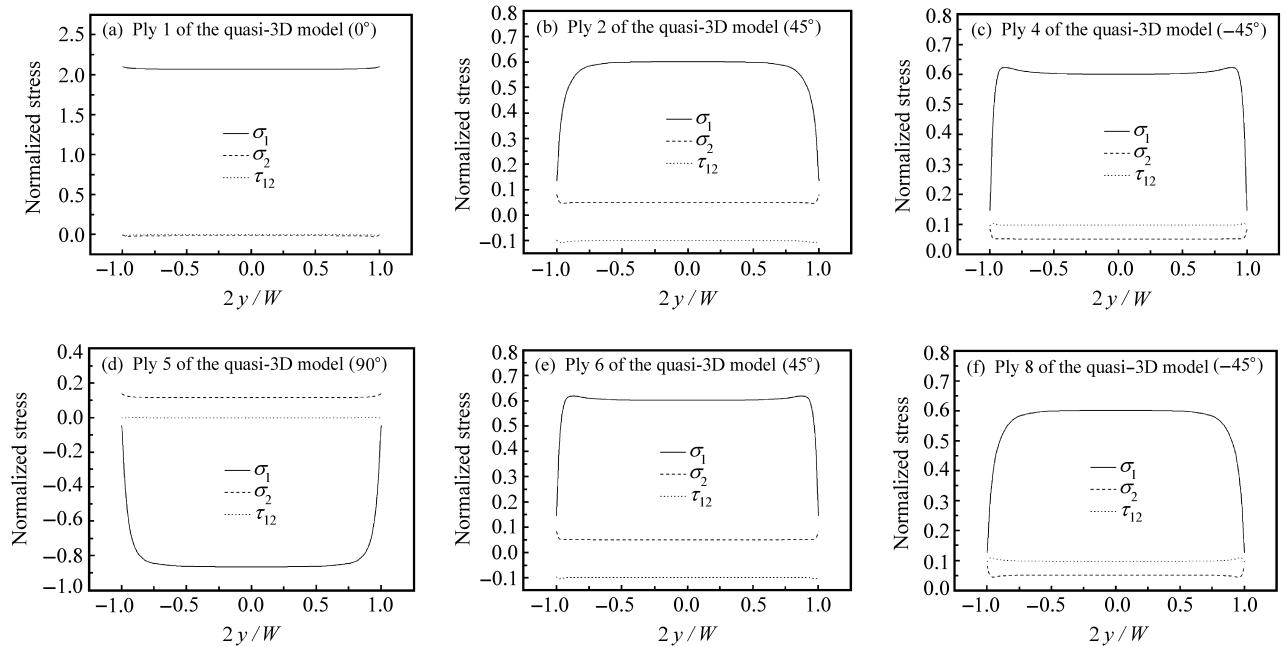


图 6 面内应力分布

Fig. 6 In-plane stress distributions

非常相似的层间应力分布,使得 2 种模型的合理性得到了相互印证。(4)分层损伤使其所在层间(图 5(f)、5(l))及与之相邻无分层的层间(图 5(c)、5(i))的应力分布发生变化。

3.3 面内应力分布

将无损伤拉伸板条中面以下各子层按 1~8 进行编号。截面 $x=0$ 上各子层层内正轴应力 σ_1 、 σ_2 和 τ_{12} 的分布由图 6 给出。子层 1、3、7 均为 0° 铺层,它们的面内应力分布基本相同,图中仅以子层 1 的结果作为代表。准三维模型和三维模型的面内应力结果相当一致,图 6 仅列举前者的结果。此外,还使用二维经典层压板理论计算面内应力。计算结果说明:(1)当光滑板条受面内均匀拉伸时,用经典层压板理论得到的应力分布均匀。然而,实际面内应力在自由边附近也有较大的变化梯度。图 6 各曲线平直段的结果与经典层压板理论的结果基本相同。(2)在经典层压板理论中,对称铺层受面内载荷时,具有相同铺设角度的各子层面内应力分布相同。然而在准三维模型的计算结果中,铺层顺序对具有相同铺设角各子层的面内应力分布有影响。

4 结 论

(1) 利用刚性元和弹簧元构造了一种复合材料层合板层间界面单元,并利用其和弯曲板元建立分

析复合材料层压板三维应力的准三维有限元模型。通过和三维实体有限元及经典层压板理论分析结果对比,表明新界面单元和准三维模型的合理性。

(2) 对本文中的多向铺层板算例,自由边层间应力的最大值接近拉伸应力的 10%。同时,与经典层压板理论结果不同,在自由边附近面内应力也存在较大的变化梯度。

(3) 准三维模型将层间应力和面内应力分离开来,可通过修改板元及弹簧元刚度来方便模拟层压板的面内和层间损伤,因此特别适用于进行层压板渐进损伤疲劳和剩余强度分析。

参考文献:

- [1] Kant T, Swaminathan K. Estimation of transverse/interlaminar stress in laminated composites: A selective review and survey of current developments [J]. Composite Structure, 2000, 49: 65-75.
- [2] Pipes R B, Pagno N J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension [J]. Journal of Composite Materials, 1970, 4: 538-548.
- [3] Caron J F, Ehlrlacher A. Modeling the kinetics of transverse cracking in composite laminates [J]. Composites Science and Technology, 1997, 57: 1261-1270.
- [4] Nguyen V T, Caron J F. A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites [J]. Computers and Structures, 2006, 84: 1538-1546.

- [5] 程乐锦, 薛明德, 胡 宁. 基于三维有限元法的层合圆柱壳应力分析[J]. 复合材料学报, 2003, 20(2): 88-93.
Cheng Lejin, Xue Mingde, Hu Ning. Stress analysis of the laminated cylindrical shells based on the 3D FEM [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2003, 20(2): 88-93.
- [6] Ghoshal A, Kim H S, Chattopadhyay A, William H P. Effect of delamination on transient history of smart composite plates [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2005, 41: 850-874.
- [7] Shiah Y C, Chen Y H, Kuo W S. Analysis for the interlaminar stresses of thin layered composites subjected to thermal loads [J]. Composites Science and Technology, 2007, 67: 2485-2492.
- [8] 张 彦, 来新民, 朱 平, 梁新华. 复合材料铺层板低速冲击作用下损伤的有限元分析[J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(8): 1348-1353.
Zhang Yan, Lai Xinmin, Zhu Ping, Liang Xinhua. The finite element analysis of low velocity impact damage in composite laminated plates [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2006, 40(8): 1348-1553.
- [9] 张培新, 李亚智. 受面内载荷的层压复合材料的层间应力分析[J]. 机械强度, 2006, 28(2): 224-228.
Zhang Peixin, Li Yazhi. Interlaminar stress analysis of composite laminates subjected to in-plane loading [J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(2): 224-228.
- [10] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1993: 190-222.