复合材料学报 第26卷 第3期 6月 2009年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 26 No. 3 June 2009

文章编号：1000-3851(2009)03-0202-05

压电层合板的B样条小波有限元半解析法

刘艳红*，陈庆远，陈新锋，卿光辉
（中国民航大学 航空工程学院，天津 300300）

摘　要： 利用小波有限元法的优越性可方便地求解压电材料与复合材料混合层合板的某些静力学问题。根据层合结构的特点，将区间B样条尺度函数作为插值函数离散结构的平面域，应用压电材料修正后的H-R(Hellinger-Reissner)变分原理推导了压电材料的Hamilton正则方程的区间B样条小波(BSWI)元列式。该BSWI元的主要特点之一是厚度方向是解析解形式的。针对具体问题的求解，为了保证各层之间力学量和电学量的连续性，进一步应用了状态转移矩阵技术。数值算例表明所提出的区间B样条小波单元是成功的。采用推导压电材料BSWI元的方法可建立磁电弹性材料类似的BSWI元。

关键词： 压电材料；Hamilton正则方程；区间B样条小波；小波单元

中图分类号： TB330.1　　**文献标志码：** A

Semi-analytical solution of B-spline wavelet-based finite element for piezoelectric lamina

LIU Yanhong*，CHEN Qingyuan，CHEN Xinfeng，QING Guanghui
(College of Aviation Engineering，Civil Aviation University of China，Tianjin 300300，China)

Abstract: Some static problems of hybrid laminated plates with composite and piezoelectricity can be expediently solved by taking the advantage of wavelet finite element methods. Based on the features of laminated structures，the scale function of B-spline wavelet on the interval(BSWI) was employed to discretize the domain in-plane of structure，and the BSWI element formula of Hamilton canonical equation for piezoelectric materials was established by employing the modified mixed H-R(Hellinger-Reissner) variational principle for piezoelectric materials. One of the main characteristics of the BSWI element is the analytical form in the direction with respect to thickness. For the solution of the specific problem to ensure the interlaminar continuity of the electricity and mechanics variables，the transfer matrix technique was used. Numerical examples show that the BSWI element presented in the paper is successful. Employing the approach to deriving the BSWI element formula for piezoelectric materials can be extended to establish the analogous BSWI element formula for magnetoelectroelastic materials.

Keywords: piezoelectric materials；Hamilton canonical equation；B-spline wavelet on the interval；wavelet-based element

有关压电材料层合板力学问题已有很多研究报道[1-12]，根据研究方法的不同可以分为解析法和数值法两大类。目前国内外已经有很多文献[1-6]运用解析法对具有简单边界条件的压电材料进行了研究，但对于复杂的边界条件问题，用解析法求解是很困难的。因此，人们在分析这方面的问题时都倾向于采用数值方法[7-12]。例如Qing等人[5]采用广义Hamilton正则方程的半解析法研究了类似于加筋板的压电结构的固有频率问题。Allik与Hughes[8]使用四面体单元对压电结构进行了分析，Kim等人[9]提出分别使用6节点和12节点的过渡单元对三维实体板壳过渡连接的结构进行分析。Sze和Pan[10]则建立了数种用于压电材料分析的杂交元模型。国内也有很多文献[7,11-12]采用有限元方法对压电材料进行了研究。但是传统有限元方法在计算大梯度或奇异性等问题时，只能采用逐次加密网格或提高多项式阶次的方法来提高分析精度，网格加密所增加的单元需重新计算，数值计算量大。近几年发展起来的小波有限元方法以小波函数为基础，充分利用小波函数的多尺度和多分辨率等特

收稿日期： 2008-06-23；**收修改稿日期：** 2008-11-17
基金项目： 天津市自然科学基金(07JCYBJC02100)；中国民航大学校基金(05YK07M)
通讯作者： 刘艳红，副教授，主要研究方向为复合材料结构力学与结构修理　E-mail：lyhqzh@126.com

点，可根据需要任意改变分析尺度，具有自适应功能，算法稳定性好，运算速度快，计算结果精度高；在处理局部应力集中等奇异性问题方面具有诱人的优越性[13]。

样条函数在有限元数值分析中早已被广泛应用[14-15]。本文中将区间 B 样条小波(BSWI)[16-18]的尺度函数作为插值函数，然后根据压电材料修正后的 H-R 混合变分原理[4-5,19-22]推导出了压电材料 Hamilton 正则方程的区间 B 样条小波有限元列式。从而使 B 样条小波有限元在压电材料的 Hamilton 正则方程半解析法中得到应用。

1　压电材料修正后的 H-R 变分原理

对于压电弹性材料，修正后的 H-R 变分原理或类 Hamilton 原理[4-5,19-22]可表示为

$$\delta\Pi = \delta\iiint_V L_{\mathrm{R}}\mathrm{d}V + \delta\oint_{S_{\mathrm{A}}}(\boldsymbol{\lambda}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{p\bar{q}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{\bar{p}q})\mathrm{d}S_{\mathrm{A}} \tag{1}$$

其中：L_{R} 是 Reissner's 函数；$S_{\mathrm{A}}=S_\sigma+S_{\mathrm{u}}+S_{\mathrm{m}}$ 为混合边界条件；$\boldsymbol{\lambda}_1=[\lambda_x-1\quad\lambda_y-1\quad\lambda_z-1\quad\lambda_{\mathrm{q}}-1]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_0=[\lambda_x\quad\lambda_y\quad\lambda_z\quad\lambda_{\mathrm{q}}]^{\mathrm{T}}$ 是特意引入的特征系数[22]，$\lambda_i(i=x,y,z,\mathrm{q})$ 的值为 1 和 0，以此来表示边界状态的特征。例如，在 x 方向为应力边界条件，则 $\lambda_x=1$，若是位移边界条件，则 $\lambda_x=0$，λ_y，λ_z 的取值以此类推。若边界上给定电位移，则 $\lambda_{\mathrm{q}}=1$，若边界上给定电势，则 $\lambda_{\mathrm{q}}=0$。引入特征系数后，上式既能处理单一边界条件问题，又能处理混合边界条件问题。$\boldsymbol{B}_{p\bar{q}}=[p_x(u-\bar{u})\quad p_y(v-\bar{v})\quad p_z(w-\bar{w})\quad p_{\mathrm{q}}(\varphi-\bar{\varphi})]^{\mathrm{T}}$，$p_i(i=x,y,z)$ 是边界表面 3 个坐标方向的应力，p_{q} 是边界表面上的电荷载荷，$\bar{u}$，$\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 是边界 3 个坐标方向的已知位移分量，$\bar{\varphi}$ 是边界上的已知电势；$\boldsymbol{B}_{\bar{p}q}=[\bar{p}_x u\quad\bar{p}_y v\quad\bar{p}_z w\quad\bar{p}_{\mathrm{q}}\varphi]^{\mathrm{T}}$，$\bar{p}_i(i=x,y,z)$ 是边界表面 3 个坐标方向的给定应力分量，$\bar{p}_{\mathrm{q}}$ 是边界表面给定的电荷载荷。这里考虑静力问题有

$$L_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{,z} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{21}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{22}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} \tag{2}$$

式中：

$\boldsymbol{P}=[\sigma_{xz}\quad\sigma_{yz}\quad\sigma_{zz}\quad D_{zz}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Q}=[u\quad v\quad w\quad\varphi]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}0&0&\alpha&0\\0&0&\beta&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\beta&0&0\\\beta&\alpha&0&0\\0&0&0&\alpha\\0&0&0&\beta\end{bmatrix},$$

$\alpha=\partial/\partial x$，$\beta=\partial/\partial y$；$\boldsymbol{F}=-[f_x\quad f_y\quad f_z\quad f_{\mathrm{q}}]^{\mathrm{T}}$，$f_x$、$f_y$、$f_z$ 代表 3 个坐标轴方向上的体积力，f_{q} 代表体电荷；对于各向正交各向异性压电材料有

$$\boldsymbol{\Phi}_{11}=\begin{bmatrix}k_1&0&0&0\\0&k_2&0&0\\0&0&k_3&k_4\\0&0&k_4&k_5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{12}=-\boldsymbol{\Phi}_{21}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&k_6&0\\0&0&0&0&k_7\\k_8&k_9&0&0&0\\k_{10}&k_{11}&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{22}=\begin{bmatrix}k_{12}&k_{13}&0&0&0\\k_{13}&k_{14}&0&0&0\\0&0&k_{15}&0&0\\0&0&0&k_{16}&0\\0&0&0&0&k_{17}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

式中，$k_i(i=1,2,\cdots,17)$ 是与材料参数相关的常量，其具体的推导及表达式见文献[4]。另外，除 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 外的应力和电位移分量可由下式表示：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{xy}\\D_{xx}\\D_{yy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{12}\alpha&k_{13}\beta&0&0&0&-k_8&-k_{10}\\k_{13}\alpha&k_{14}\beta&0&0&0&-k_9&-k_{11}\\k_{15}\beta&k_{15}\alpha&0&0&0&0&0\\0&0&k_{16}\alpha&-k_6&0&0&0\\0&0&k_{17}\beta&0&-k_7&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\v\\\varphi\\\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\\\sigma_{zz}\\D_{zz}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

同时，考虑到方向余弦 $n_z=0$，式(1)中的 $p_i(i=x,y,z,\mathrm{q})$ 可用板的侧面边界力和电位移表示：

$$\begin{Bmatrix}p_x\\p_y\\p_{\mathrm{q}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}n_x&0&n_y&0&0\\0&n_y&n_x&0&0\\0&0&0&n_{\mathrm{q}x}&n_{\mathrm{q}y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{xy}\\D_{xx}\\D_{yy}\end{Bmatrix}$$

$$p_z = n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} \tag{5}$$

以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 为相互独立的变量，对式(2)进行变分并分部积分可得压电材料的 Hamilton 正则方程(没考虑边界项)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{Q}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{21}&\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{22}\boldsymbol{G}_2\\\boldsymbol{\Phi}_{11}&-(\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{\Phi}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{Q}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}\\0\end{Bmatrix} \tag{6}$$

2　压电材料的区间 B 样条小波元

因为已有很多资料详细地介绍了 BSWI 函数的各种特性[13]，所以下面直接引用与本文中相关的内容。$[a,\ b]$区间上的函数 $f(x)$可以通过坐标变换$\xi=(x-a)/(b-a)$转变为$[0,\ 1]$区间上的函数，因此本文中只讨论了$[0,\ 1]$区间上的 B 样条小波。在小波有限元法中，一般采用尺度函数的张量积来表示二维未知函数 $f(x,y)$。

对于任意尺度的 m 阶区间 B 样条尺度函数 $\phi^j_{m,k}(\xi)$可用下面的公式给出[13]：

$$\phi^j_{m,k}(\xi)=\begin{cases}\phi^j_{m,k}(2^{j-l}\xi), \quad k=-m,\cdots,-1(0\text{ 边界})\\ \phi^l_{m,2^j-m-k}(1-2^{j-l}\xi),\\ \quad k=2^j-m+1,\cdots,2^j-1(1\text{ 边界})\\ \phi^j_{m,0}(2^{j-l}\xi-2^{-l}k),\\ \quad k=0,\cdots,2^j-m(\text{内边界})\end{cases} \tag{6}$$

二维未知场函数 $u(\xi,\eta)$用一维区间 B 样条尺度函数表示的张量积为

$$u(\xi,\eta)=\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}$ 表示单元上待求的小波插值系数列向量；$\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 是 m 阶 j 尺度下的一维区间 B 样条尺度函数。下面特意将 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 表示为行向量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_1&=[\phi^j_{m,-m+1}(\xi)\quad \phi^j_{m,-m+2}(\xi)\quad\cdots\quad \phi^j_{m,2^j-1}(\xi)]\\ \boldsymbol{\Phi}_2&=[\phi^j_{m,-m+1}(\eta)\quad \phi^j_{m,-m+2}(\eta)\quad\cdots\quad \phi^j_{m,2^j-1}(\eta)]\end{aligned} \tag{8}$$

用式(7)将$[\sigma_{xz}\quad \sigma_{yz}\quad \sigma_{zz}\quad D_{zz}]^{\mathrm{T}}$ 和$[u\quad v\quad w\quad \varphi]^{\mathrm{T}}$表示为级数形式：

$$\begin{aligned}(\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{zz},D_{zz})&=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{xz}(z),\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{yz}(z),\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{zz}(z),\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}_{zz}(z))\\ (u,v,w,\varphi)&=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}(z),\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}(z),\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}(z),\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{e}}(z))\end{aligned} \tag{9a}$$

或者

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{Q}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & 0\\ 0 & \boldsymbol{N}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}\\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}\end{Bmatrix} \tag{9b}$$

式中：

$\boldsymbol{N}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{\Phi}]_{4\times4}$；

$\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}=[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{xz}(z)\quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{yz}(z)\quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{zz}(z)\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}_{zz}(z)]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}=[\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}(z)\quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}(z)\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}(z)\quad \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{e}}(z)]^{\mathrm{T}}$.

将式(9b)代入式(2)中，有

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{R}}=&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e},z}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{21}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}\\ &+\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{G}_2N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{22}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}\\ &+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{10}$$

将 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}$ 视为独立变量，对式(10)(暂时不考虑边界项)进行变分并分部积分，经整理后可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e},z}=&[(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}+(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{21}\boldsymbol{N}]\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}+\\ &(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{22}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\end{aligned} \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e},z}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}-(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{21}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}} \tag{11b}$$

对式(11a)和(11b)两边进行积分，就得到了压电材料 Hamilton 正则方程 BSWI 元的列式，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}(z)\\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}(z)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}(z)\\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}(z)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Xi}\\ 0\end{Bmatrix} \tag{12}$$

其中：

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\int_0^1\int_0^1[(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}+(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{21}\boldsymbol{N}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

$\boldsymbol{B}=\int_0^1\int_0^1(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{22}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{N})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

$\boldsymbol{C}=\int_0^1\int_0^1\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；$D=\int_0^1\int_0^1\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

$\boldsymbol{\Xi}=\int_0^1\int_0^1\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

下面给出边界项的列式。将式(5)代入式(1)的边界项中可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}_1\boldsymbol{B}_{\mathrm{p\bar{q}}}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}_0\boldsymbol{B}_{\mathrm{\bar{p}q}}=\\ &\quad[(\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}](\boldsymbol{Q}-\overline{\boldsymbol{Q}})-(\boldsymbol{\lambda}_0\overline{\boldsymbol{P}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\end{aligned} \tag{13}$$

其中：

$$\boldsymbol{G}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & -n_xk_8(\lambda_x-1) & -n_xk_{10}(\lambda_x-1)\\ 0 & 0 & -n_yk_9(\lambda_y-1) & -n_yk_{11}(\lambda_y-1)\\ n_x(\lambda_z-1) & n_y(\lambda_z-1) & 0 & 0\\ -n_xk_6(\lambda_{\mathrm{q}}-1) & -n_yk_7(\lambda_{\mathrm{q}}-1) & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{G}_4=\begin{bmatrix}(n_xk_{12}\alpha+n_yk_{15}\beta)(\lambda_x-1) & (n_xk_{13}\beta+n_yk_{15}\alpha)(\lambda_x-1) & 0 & 0\\ (n_xk_{15}\beta+n_yk_{13}\alpha)(\lambda_y-1) & (n_xk_{15}\alpha+n_yk_{14}\beta)(\lambda_y-1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (n_xk_{16}\alpha+n_yk_{17}\beta)(-1+\lambda_{\mathrm{q}})\end{bmatrix};$$

$\overline{\boldsymbol{P}}=[\bar{\sigma}_{xz}\quad \bar{\sigma}_{yz}\quad \bar{\sigma}_{zz}\quad \overline{D}_{zz}]^{\mathrm{T}}$；$\overline{\boldsymbol{Q}}=[\bar{u}\quad \bar{v}\quad \bar{w}\quad \bar{\varphi}]^{\mathrm{T}}$.

将式(9b)代入式(13)，变分后的结果可写成矩阵形式：

$$\oint_{S_{\mathrm{A}}}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\\ 0 & -\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}}(z)\\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}(z)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_0 & -(\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\\ 0 & (\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{e}}\\ \overline{\boldsymbol{Q}}_{\mathrm{e}}\end{Bmatrix}\right\}\mathrm{d}S_{\mathrm{A}} \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$；$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{N})+(\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$。

把式(14)加到式(12)的右边，其结果就是可考虑混合边界条件的压电材料 Hamilton 正则方程 BSWI 元的列式。当然，上述列式是在 B 样条小波空间中推导出来的，为了处理边界条件的方便，还得将其变换到物理空间中。下面以位移 u 为例说明

变换方法。

定义物理自由度列向量

$$\boldsymbol{u}^e = [u_1^e \quad \cdots \quad u_i^e \quad \cdots \quad u_{n+1}^e] \tag{15}$$

式中，$u_i^e=[u(\xi_i,\eta_1) \quad u(\xi_i,\eta_2) \quad \cdots \quad u(\xi_i,\eta_{n+1})]$，$\xi_i=(i-1)/n$，$\eta_j=(j-1)/n$，$i,j=1,2,\cdots,n+1$ 为标准求解域中各节点的坐标值。将式(7)代入式(15)得

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{R}^e\boldsymbol{C}^e = [\boldsymbol{\Phi}_1^T(\xi_1) \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T(\xi_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T(\xi_{n+1})]^T \otimes [\boldsymbol{\Phi}_1^T(\eta_1) \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T(\eta_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T(\eta_{n+1})]^T\boldsymbol{C}^e \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 为系数矩阵。联立式(16)和式(7)，有

$$u(\xi,\eta) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R}^e)^{-1}\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{\Phi T u}^e \tag{17}$$

实际上，在式(9b)中已令 $\boldsymbol{N}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{\Phi}]_{4\times4}$，若在式(9b)中直接令 $\boldsymbol{N}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{\Phi T}]_4$，则上述 BSWI 元列式属于物理空间。

3 数值验证

考虑由 2 种不同压电材料组成共 3 层的层合板，板的总厚度为 $H=0.1$ m，$h_1=h_3=(1/5)H$，$h_2=(3/5)H$；板的上表面受均布 1 Pa 的压应力作用，上下表面的电势为 0。第 1、3 层是 PZT－4(锆钛酸铅)材料；第 2 层是 PVDF(聚偏二氟乙烯)材料。2 种压电材料的参数列于表 1 中。

数值结果见表 2 和表 3，对于任意边界条件，边界上的电势都为 0。通过计算发现采用 1 个 BSWI4 元计算的结果的精度高于采用 1 个 BSWI2 元计算的结果。主要原因是 BSWI4 类似于三次多项式，而 BSWI2 元是线性的。表中只给出了采用 1 个 BSWI4 元计算所得到的结果。

在表 2 和表 3 中，四边简支压电层合板解析解的双级数取项为 $m=n=1,3,\cdots,29$。对边固支对边简支压电层合板解析解是通过将固支边变为简支边，并加上原固支边的反力[23]计算得到的，其双级数取项为 $m=1$，3，…，199，$n=1$，3，…，99。通过对比可发现当尺度 j 取 4 时，本文中的解和解析解的误差极小。

4 结 论

(1) 基于压电材料修正后的 H－R 变分原理，

表 1 PZT－4 及 PVDF 参数

Table 1 Parameters of PZT－4 and PVDF

	Stiffness constant/GPa									Piezoelectric parameter/($\mathrm{C\cdot m^{-2}}$)					Relative permittivity		
	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{24}	e_{15}	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}
PZT－4	132.0	71.0	73.0	132.0	73.0	115.0	26.0	26.0	30.0	－4.10	－4.10	14.10	10.50	10.50	804.6	804.6	659.7
PVDF	139.0	77.8	74.3	139.0	74.3	115.0	25.6	25.6	30.6	－5.20	－5.20	15.08	12.72	12.72	1475.0	1475.0	1300.0

表 2 三层板的上下表面中点位移 w

Table 2 Center displacements w of the top and bottom of three-layered plate

		Present/$\times10^{-10}$ m		Analytical[4,23]/$\times10^{-10}$ m	Error of $j=4$/%
		$j=3$	$j=4$		
Four sides clamped	Top	－4.7117	－4.7137	－4.7155	0.038
	Bottom	－4.7051	－4.7070	－4.7087	0.036
Opposite sides clamped and simply supported	Top	－2.5412	－2.5649	－2.5632	0.066
	Bottom	－2.5353	－2.5589	－2.5571	0.070

表 3 中间层上下表面中点电势 φ

Table 3 Center potentials φ of top and bottom of interlayer

		Present/V		Analytical[4,23]/V	Error of $j=4$/%
		$j=3$	$j=4$		
Four sides clamped	Top	－0.01161	－0.01136	－0.01136	0.00
	Bottom	－0.01158	－0.01134	－0.01133	0.088
Opposite sides clamped and simply supported	Top	－0.007463	－0.007264	0.007250	0.19
	Bottom	－0.007437	－0.007241	0.007227	0.19

将区间B样条小波中的尺度函数作为基函数，建立了压电材料 Hamilton 正则方程的 BSWI 元。具体地给出了推导 BSWI 列式的详细步骤。

(2) 在实例分析中，将本文中的解与解析法的结果进行了比较，最大误差 0.19%出现在中间层上下表面中点的电势变量上(对边固支对边简支问题)。算例表明本文中提出的 BSWI 元是可靠的。

(3) 本文中推导 BSWI 元的方法和步骤具有通用性，根据磁电材料修正后的 H-R 变分原理[24]，该方法可以进一步扩展到磁电弹性材料中去。

参考文献：

[1] Lee J S, Jiang L Z. Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminate via state space approach [J]. International Journal Solids and Structures, 1996, 33(7): 977-990.

[2] Heyliger P R, Brooks P R. Exact solutions for simply supported laminated piezoelectric plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1997, 64(2): 299-306.

[3] Ding H J, Chen W Q, Xu R Q. New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application [J]. Mechanics Research Communications, 2000, 27(3): 319-326.

[4] 卿光辉，邱家俊，刘艳红. 压电材料修正后的 H-R 混合变分原理及其层合板的精确法[J]. 工程力学，2005，22(5)：43-47.
Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Liu Yanhong. Modified H-R mixed variational principle for piezoelectric material and exact solution of piezoelectric laminates [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 43-47.

[5] Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Liu Yanhong. A semi-analytical solution for dynamic analysis of plate with piezoelectric patches [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(6): 1388-1403.

[6] 代海涛，程　伟. 压电复合材料层合结构中的 SH 波[J]. 复合材料学报，2007，24(1)：179-184.
Dai Haitao, Cheng Wei. SH wave in piezoelectric composite layered structure [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2007, 24(1): 179-184.

[7] 韩　旭，龚　双. 机电耦合载荷下的压电层合板瞬态响应分析[J]. 复合材料学报，2007，24(6)：160-165.
Han Xu, Gong Shuang. Analysis of transient responses in piezoelectric laminates excited by coupled electro-mechanical loads [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2007, 24(6): 160-165.

[8] Allik H, Hughes T J R. Finite element method for piezoelectric vibration [J]. Int J Numerical Method in Engineering, 1970, 2(2): 151-157.

[9] Kim J S, Varadan V V, Varadan V K. Finite element modeling of structures including piezoelectric active devices [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(5): 817-832.

[10] Sze K Y, Pan Y S. Hybrid finite element models for piezoelectric materials [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 226(3): 519-547.

[11] 林西强，任钧国. 含压电片层合壳的有限元分析与控制仿真[J]. 计算力学学报，1998，15(3)：329-337.
Lin Xiqiang, Ren Junguo. Finite element analysis and control simulation of laminate shell containing piezoelectric patches [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1998, 15(3): 329-337.

[12] 丁皓江，池毓蔚，国凤林. 压电材料轴对称有限元分析 [J]. 计算力学学报，2000，17(1)：1-7.
Ding Haojiang, Chi Yuwei, Guo Fenglin. Axisymmetric finite element analysis of piezoelectric media [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2000, 17(1): 1-7.

[13] 何正嘉，陈雪峰，李　兵，等. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京：科学出版社，2006：1-227.

[14] Shen Pengcheng, Wang Jianguo. Vibration analysis of cylinder shells by using B-spline functions [J]. Computers & Structures, 1987, 25(1): 1-10.

[15] 龙驭球. 新型有限元[M]. 北京：科学出版社，2004：482-497.

[16] 徐长发，冯　勇. B小波有限元方法数值稳定性分析[J]. 华中理工大学学报，1996，24(6)：109-112.
Xu Changfa, Feng Yong. The numerical stability of the B-wavelet FE method in solving partial differential equations[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 1996, 24(6): 109-112.

[17] Xiang Jiawei, Chen Xuefeng, He Yumin, He Zhengjia. The construction of plane elastomechanics and Mindlin plate elements of B-spline wavelet on the interval [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42(14/15): 1269-1280.

[18] Xiang Jiawei, Chen Xuefeng, He Yumin, He Zhengjia. A new wavelet-based thin plate element using B-spline wavelet on the interval [J]. Computational Mechanics, 2008, 41(2): 243-255.

[19] 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程[J]. 计算结构力学及其应用，1991，8(4)：343-349.
Tang Limin. Mixed formulation and Hamilton canonical equations of theory of elasticity [J]. Computational Structural Mechanics and Application, 1991, 8(4): 343-349.

[20] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连：大连理工大学出版社，1995：38-41.

[21] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京：科学出版社，2003：472-484.

[22] 陈浩然，杨正林，唐立民. 复合材料层合板固化过程的数值模拟[J]. 应用力学学报，1998，15(3)：30-36.
Chen Haoran, Yang Zhenglin, Tang Limin. Solidification numerical simulation of composite laminate [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1998, 15(3): 30-36.

[23] 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论[M]. 北京：科学出版社，1996：131-191.

[24] Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Liu Yanhong. Modified H-R variational principle for magnetoelectroelastic bodies and state-vector equation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(6): 722-728.