

文章编号: 1000-3851(2009)04-0197-06

基于有限元法的正交各向异性复合材料 结构材料参数识别

李双倍¹, 周小军², 黄立新^{*1}, 郭相武¹

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004; 2. 广州市城市规划勘测设计研究院, 广州 510060)

摘要: 以大型商用有限元软件 ABAQUS 为计算平台, 提出了正交各向异性复合材料结构材料参数的识别方法。将材料参数识别的问题转化为极小化目标函数的问题, 其中目标函数定义为测量位移与有限元计算的相应位移之差的平方和。采用 Levenberg-Marquardt 方法极小化目标函数, 其中灵敏度的计算基于复合材料的有限元离散结构的求解方程对识别的材料参数求导。数值算例表明本文中提出的方法是有效的。在识别参数过程中, 参数的初值以及搜索范围的确定对于识别结果有着重要影响。因此必须充分利用材料参数的先验信息。ABAQUS 是高效可靠的商用有限元软件, 提出的参数识别方法基于这类商用软件, 因而该方法有很强的实用性。

关键词: 正交各向异性复合材料; 有限元法; 参数识别; 灵敏度分析

中图分类号: TB330.1 文献标志码: A

Material parameter identification for orthotropic composite structure by the finite element method

LI Shuangbei¹, ZHOU Xiaojun², HUANG Lixin^{*1}, GUO Xiangwu¹

(1. School of Civil Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Guangzhou Urban Planning & Design Survey Research Institute, Guangzhou 510060, China)

Abstract: Based on the computing platform of the finite element method commercial software ABAQUS, a parameter identification method was developed for orthotropic composite structures. The material parameter identification problem was formulated as the problem of minimizing the objective function defined as a square sum of differences between the measured and calculated data on displacements. Levenberg-Marquardt method, in which the sensitivity analysis was based on the differentiation of the discretized algebraic finite element matrix equations with respect to material parameter, was used to solve the minimization problem. Numerical example shows that the proposed method for parameter identification is feasible and effective. The initial values and upper and lower bounds of parameters identified play an important role in the parameter identification process. Therefore, a priori information of parameters should be used as much as possible. ABAQUS is effective and reliable commercial software for the finite element method, and hence the proposed method based on such a kind of software has strong practicability.

Keywords: orthotropic composite; finite element method; parameter identification; sensitivity analysis

复合材料具有高比强、高比模、可设计性、各向异性和多功能性等一系列独特的优点, 充分利用复合材料的这些优点, 可以设计出满足不同使用要求的复合材料结构。在航空航天、土木工程、机械工程、汽车工程、能源工程和医学等众多领域中复合材料得到广泛应用。随着工程结构中复合材料越

来越多的应用, 也相应地增加了复合材料及其结构设计和评价的需求, 而准确的材料参数数据是这些需求的基础。然而, 与各向同性材料相比, 复合材料性能参数的离散度比较大, 在实验室用标准测试方法测定的复合材料性能参数很可能与工厂制造的以及工程中使用的实际构件的性能参数有较大的偏

差^[1-2]。在测试各向异性材料参数时还存在边界效应、试样尺寸效应及不易实现各向异性材料系统的均匀应力状态或均匀应变状态等问题^[3-7]。此外,对实际存在的复合材料结构,不可能从中切出一个试件,进行参数测定^[8]。随着计算机技术的飞速发展,采用数值-实验参数识别方法进行复合材料性能参数的识别已引起人们的广泛关注。这种方法选取易于测量的物理量作为测量量,如位移和应变等,然后采用优化方法不断调整参数值,最终使一定参数下测量的计算值与测量值之误差的模达到最小。

正交各向异性复合材料结构的材料参数识别属于反问题范畴,对应的正问题求解比较复杂,可以借助于诸如瑞利法^[9]、有限元法^[1-2,4,7]、边界元法^[10-11]和无网格法^[12]等数值方法加以解决。有限元法有建立于严格理论基础的可靠性,并且对复杂几何构形和各种物理问题具有很强的适应性^[13]。经过多年的研究开发,有限元法已经发展了成熟的计算技术和高效可靠的计算软件。自然地,在很多数值-实验参数识别方法中,有限元法被选作在一定参数下测量计算的方法。基于导数计算的优化方法是材料参数识别问题中比较常用的方法之一。这类方法在求解过程中,灵敏度用来确定材料参数的有效搜索方向和步长,使目标函数值下降。由于有限差分法计算格式简单,故此方法广泛应用于参数识别的灵敏度计算。但是在参数识别的每一次迭代计算灵敏度时,每一个识别参数的变化,都要采用有限元法求解正问题一次,因此基于有限差分法的灵敏度的计算工作量非常大^[14]。当正问题的计算规模比较大时,计算工作量大的问题就更加突出。

本文中以大型商用有限元软件 ABAQUS 为计算平台,识别正交各向异性复合材料结构的材料参数。选择结构的位移为目标变量,以测量位移与有限元计算的相应位移之差的平方和作为目标函数。采用 Levenberg-Marquardt 方法极小化目标函数,迭代计算得出材料参数。优化计算中,基于复合材料的有限元离散结构的求解方程对识别的材料参数求导,计算得出灵敏度。算例表明本文中提出的方法是有效的。

1 正交各向异性复合材料的有限元求解方程

在一定的载荷和边界条件下,基于最小位能原理可以导出复合材料的有限元离散结构的求解方程

$$[\mathbf{K}(\mathbf{p})]\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\} = \{\mathbf{R}\} \quad (1)$$

其中: $[\mathbf{K}(\mathbf{p})]$ 是刚度矩阵; $\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\}$ 为结点位移向量; $\{\mathbf{R}\}$ 为结点荷载向量; \mathbf{p} 为材料参数向量。

对于平面正交各向异性复合材料来说,平面应力状态材料主方向的应力-应变关系为^[15]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中 $[\mathbf{Q}]$ 矩阵各个元素为

$$Q_{11} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2} \quad (3)$$

$$Q_{12} = \frac{E_{11}E_{22}\nu_{12}}{E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2} \quad (4)$$

$$Q_{22} = \frac{E_{11}E_{22}}{E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2} \quad (5)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

结构的 $x-y$ 坐标轴与材料主方向不一致时,偏轴应力-应变关系为^[15]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{Q}] [(\mathbf{T})^{-1}]^T \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中 $[\mathbf{T}]$ 是坐标转换矩阵,即

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

本文中材料参数向量取为

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T = [E_{11} \ E_{22} \ \nu_{12} \ G_{12}]^T \quad (9)$$

正问题的求解采用大型商用有限元软件 ABAQUS 进行。

2 正交各向异性复合材料结构材料参数识别算法

2.1 目标函数

如果选择结构的位移为目标变量,则目标函数可以表示为

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^s f_i^2(\mathbf{p}) \quad (\mathbf{p} \in \mathbf{R}^t, s \geq t) \quad (10)$$

其中: 向量 $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T = [E_{11} \ E_{22} \ \nu_{12} \ G_{12}]^T$; s 是测量位移的数量; t 是识别材料参数的数量。

方程(10)中的函数 $f_i(\mathbf{p})$ 定义为

$$f_i(\mathbf{p}) = u_i(\mathbf{p}) - u_i^* \quad (11)$$

其中: $u_i(\mathbf{p})$ 是有限元计算的位移; u_i^* 是测量的位移。

定义向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = [f_1(\mathbf{p}) \ f_2(\mathbf{p}) \ \cdots \ f_s(\mathbf{p})]^T \quad (12)$$

2.2 敏感度分析

方程(11)中定义的测量的位移 u_i^* 与识别的材料参数无关, $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ 对材料参数的灵敏度, 即 $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ 的雅可比矩阵, 可表示为

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right]_{s \times m} \quad (i = 1, 2, \dots, s; m = 1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

其中 s 是测量位移的数量。

由于方程(1)的 $\{\mathbf{R}\}$ 与材料参数无关, 该方程两边对材料参数 p_m 求偏导数, 然后移项整理得

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] = -[\mathbf{K}(\mathbf{p})]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] \{\mathbf{u}(\mathbf{p})\} \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

方程(14)中的 $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ 是结构各结点的位移向量, $[\mathbf{K}(\mathbf{p})]$ 是结构的总体刚度矩阵, 均可以在 ABAQUS 进行正问题分析时求得。

有限元单元刚度矩阵 $[\mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{p})]$ 可表示为^[13]

$$[\mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{p})] = \iint_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}(\mathbf{p})] [\mathbf{B}] t dxdy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}(\mathbf{p})] [\mathbf{B}] |\mathbf{J}| t d\xi d\eta \quad (15)$$

其中: $[\mathbf{B}]$ 是有限元等参单元的应变矩阵; $|\mathbf{J}|$ 是坐标变换的雅可比行列式; t 等参单元的厚度; $[\mathbf{D}(\mathbf{p})]$ 是弹性矩阵; $[\mathbf{B}]$ 、 $|\mathbf{J}|$ 和 t 均与材料参数无关, 只有 $[\mathbf{D}(\mathbf{p})]$ 与材料参数有关。

由方程(7)可知, 弹性矩阵表示为

$$[\mathbf{D}(\mathbf{p})] = [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{Q}(\mathbf{p})] ([\mathbf{T}]^{-1})^T \quad (16)$$

将方程(16)代入方程(15), 并对材料参数求偏导可得

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{T}]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] \times ([\mathbf{T}]^{-1})^T [\mathbf{B}] |\mathbf{J}| t d\xi d\eta \quad (17)$$

其中 $[\mathbf{Q}(\mathbf{p})]$ 对材料参数的偏导, 即 $[\partial \mathbf{Q}(\mathbf{p}) / \partial p_m]$, 各元素表达式求得如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{11}}{\partial E_{11}} &= \frac{E_{11}^2 - 2E_{11}E_{22}\nu_{12}^2}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \\ \frac{\partial Q_{12}}{\partial E_{11}} &= -\frac{E_{22}^2\nu_{12}^3}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \\ \frac{\partial Q_{22}}{\partial E_{11}} &= -\frac{E_{22}^2\nu_{12}^2}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \quad \frac{\partial Q_{66}}{\partial E_{11}} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial E_{22}} = \frac{E_{11}^2\nu_{12}^2}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \quad \frac{\partial Q_{12}}{\partial E_{22}} = \frac{E_{11}^2\nu_{12}}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial Q_{22}}{\partial E_{22}} = \frac{E_{11}^2}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \quad \frac{\partial Q_{66}}{\partial E_{22}} = 0. \quad (19)$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial \nu_{12}} = \frac{2E_{11}^2 E_{22}\nu_{12}}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial \nu_{12}} = \frac{E_{11}^2 E_{22} + E_{11} E_{22}^2 \nu_{12}^2}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q_{22}}{\partial \nu_{12}} = \frac{2E_{11} E_{22}^2 \nu_{12}}{(E_{11} - E_{22}\nu_{12}^2)^2}, \quad \frac{\partial Q_{66}}{\partial \nu_{12}} = 0. \quad (20)$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial G_{12}} = 0, \quad \frac{\partial Q_{12}}{\partial G_{12}} = 0, \quad \frac{\partial Q_{22}}{\partial G_{12}} = 0, \quad \frac{\partial Q_{66}}{\partial G_{12}} = 1. \quad (21)$$

结构总体刚度矩阵由各个单元刚度矩阵集成, 即^[13]

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{G}^T \mathbf{K}^e \mathbf{G} \quad (22)$$

其中 \mathbf{G} 矩阵是单元结点自由度和整体结构结点自由度转换矩阵, 与材料参数无关。方程(22)对材料参数求偏导数得

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] = \sum_e \mathbf{G}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right] \mathbf{G} \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

即把单元刚度矩阵对材料参数的偏导数矩阵“对号入座”地集成, 就能得到结构总体刚度矩阵对各个材料参数的偏导数矩阵。将方程(23)代入方程(14)就可求出位移对材料参数的偏导数, 即灵敏度。

2.3 Levenberg-Marquardt 优化方法

本文中采用 Levenberg-Marquardt 优化方法不断调整参数值, 最终使目标函数达到最小, 即用 Levenberg-Marquardt 方法可以得到一系列的迭代步。当给定的某种收敛准则满足时, 目标函数达到最小, 迭代即终止。第 k 次迭代的材料参数值可以由下列方程计算^[16]:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{J}(\mathbf{p}^{(k)}) + \mu^{(k)} \mathbf{I}] \boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k)}) \quad (24)$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)} \quad (25)$$

其中: \mathbf{I} 是单位矩阵; $\mu^{(k)}$ 是迭代过程中非负的 Levenberg-Marquardt 调整参数。收敛准则定义为

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k)})\| < \varepsilon_1 \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i^{(k+1)} - p_i^{(k)}}{p_i^{(k)}} \right| < \varepsilon_2 \quad (27)$$

其中 ε_1 和 ε_2 是给定的精度要求。

3 算例分析

如图 1 所示, 均布压力作用下的正交各向异性复合材料简支梁, 长 200 mm, 高 50 mm, 单位厚度, 均布压力 $P=20 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ 。材料弹性主方向 1 与 x 轴的夹角 $\theta = 0^\circ$ 。硼/环氧正交各向异性 $[0/\pm 45/0/\overline{90}]_s$ 层合板, 其材料参数为^[17-18] $E_{11}=113000 \text{ MPa}$, $E_{22}=52700 \text{ MPa}$, $\nu_{12}=0.45$, $G_{12}=28500 \text{ MPa}$ 。

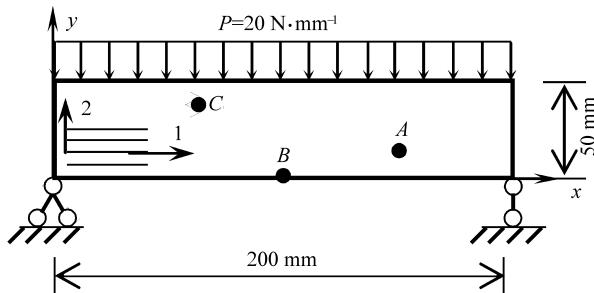


图 1 均布压力作用下硼/环氧正交各向异性 $[0/\pm 45/0/\overline{90}]_s$ 层合板简支梁

Fig. 1 Boron/epoxy orthotropic $[0/\pm 45/0/\overline{90}]_s$ laminates simply-supported beam under uniform load

本文中材料参数的识别采用以下数据和条件。Levenberg-Marquardt 调整参数初值 $\mu^{(0)}=10^{-14}$; 收敛准则精度要求 $\epsilon_1=10^{-6}$ 和 $\epsilon_2=10^{-3}$; 材料参数识别搜索范围:

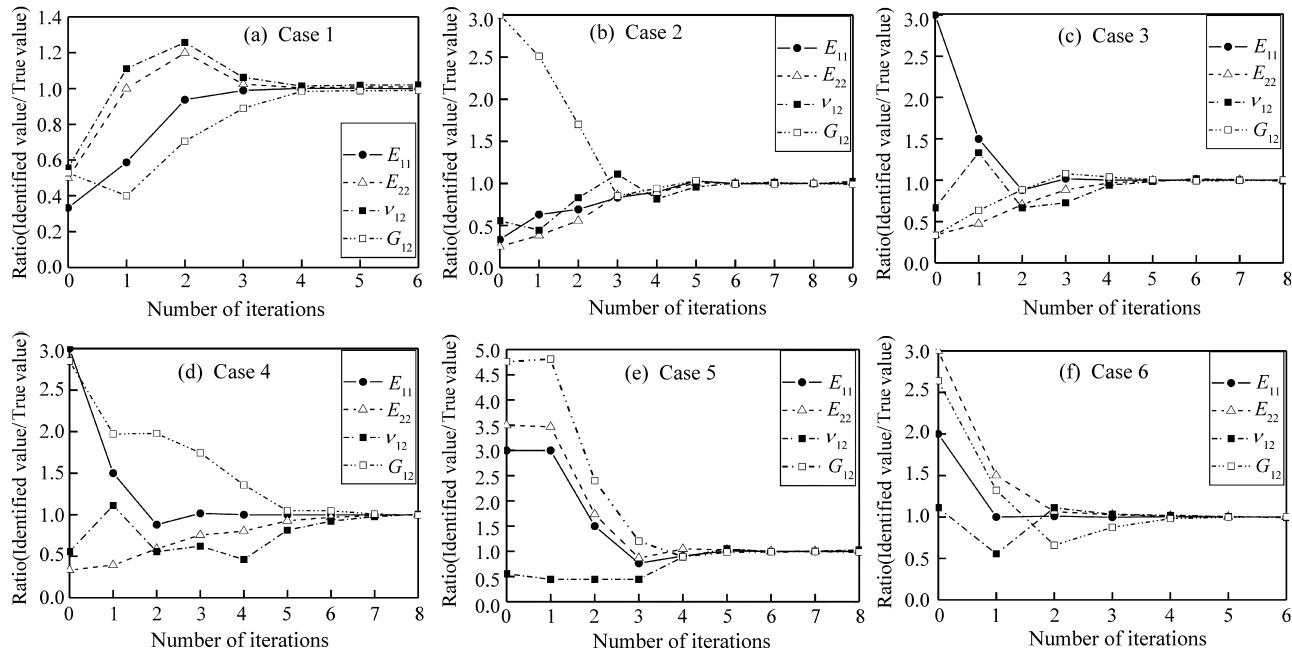


图 2 硼/环氧正交各向异 $[0/\pm 45/0/\overline{90}]_s$ 层合板材料参数的识别过程

Fig. 2 The parameter identification process of boron/epoxy orthotropic $[0/\pm 45/0/\overline{90}]_s$ laminates

$$\begin{aligned} 22600 \text{ MPa} &\leq E_{11} \leq 56500 \text{ MPa} \\ 10540 \text{ MPa} &\leq E_{22} \leq 263500 \text{ MPa} \\ 0.2 &\leq \nu_{12} \leq 0.7 \\ 5700 \text{ MPa} &\leq G_{12} \leq 142500 \text{ MPa} \end{aligned}$$

测量位移点及其坐标: 点 A(150, 10)、点 B(100, 0) 及点 C(60, 40) 的水平方向及垂直方向的位移。在极小化过程中, 材料参数取真值, 采用大型商用有限元软件 ABAQUS 进行正问题的有限元计算, 得到测量点的位移计算值模拟相应的测量位移值。材料参数识别的过程及结果见图 2 和表 1。在材料参数识别过程中, 选择 6 组离真值较远的材料参数初值, 经过若干步迭代之后, 材料参数就可以识别出来。基于大型商用有限元软件 ABAQUS 的计算平台, 本文中提出的材料参数识别方法有很强的实用性, 并且从识别的结果来看, 该方法具有较高的精度和较好的稳定性。

4 结 论

(1) 基于有限元分析, 本文作者提出正交各向异性复合材料结构材料参数的识别方法, 从识别的结果来看, 该方法具有较高的精度和较好的稳定性。

(2) 在材料参数识别过程中, 正问题的求解计算以大型商用有限元软件 ABAQUS 为计算平台, 从而增强了材料参数识别方法的实用性。

表 1 硼/环氧正交各向异性[0/±45/0/90]_s 层合板材料参数识别结果Table 1 Identified parameters of boron/epoxy orthotropic [0/±45/0/90]_s laminates

Case	Parameter	Initial value	True value	Initial value/True value	Identified result	Iteration number
1	E_{11} /MPa	37667	113000	0.33334	112993	6
	E_{22} /MPa	26350	52700	0.50000	53119	
	ν_{12}	0.25	0.45	0.55556	0.4591	
	G_{12} /MPa	15066	28500	0.52863	28184	
2	E_{11} /MPa	37667	113000	0.33334	112974	9
	E_{22} /MPa	13175	52700	0.25000	53082	
	ν_{12}	0.25	0.45	0.55556	0.4600	
	G_{12} /MPa	85500	28500	3.00000	28185	
3	E_{11} /MPa	339000	113000	3.00000	113015	8
	E_{22} /MPa	17567	52700	0.33334	52645	
	ν_{12}	0.30	0.45	0.66667	0.4460	
	G_{12} /MPa	9500	28500	0.33333	28569	
4	E_{11} /MPa	339000	113000	3.00000	113006	8
	E_{22} /MPa	17567	52700	0.33334	52856	
	ν_{12}	0.25	0.45	0.55556	0.4527	
	G_{12} /MPa	81225	28500	2.85000	28379	
5	E_{11} /MPa	339000	113000	3.00000	112993	8
	E_{22} /MPa	184450	52700	3.50000	53156	
	ν_{12}	0.25	0.45	0.55556	0.4635	
	G_{12} /MPa	135600	28500	4.75789	28099	
6	E_{11} /MPa	226000	113000	2.00000	113003	6
	E_{22} /MPa	158100	52700	3.00000	52681	
	ν_{12}	0.50	0.45	1.11111	0.4466	
	G_{12} /MPa	75300	28500	2.64211	28554	

(3) 在极小化目标函数时, 灵敏度计算基于复合材料的有限元离散结构的求解方程对材料参数求导, 计算工作量比较小。

(4) 材料参数识别是否成功与材料参数初值的选择有关, 材料参数初值离真值太远, 会增加识别的难度甚至会导致识别失败; 另一方面, 限定材料参数的搜索范围有利于材料参数识别, 可以根据材料参数的先验信息确定搜索范围。因此材料参数的先验信息对材料参数的识别非常重要。

参考文献:

[1] Wang W T, Kam T Y. Material characterization of laminated composite plates via static testing [J]. Composite Structures,

2000, 50(4): 347–352.

- [2] Lecompte D, Smits A, Sol H, Vantomme J, Hemelrijck D V. Mixed numerical – experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(5): 1643–1656.
- [3] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1991.
- [4] Rikards R, Chate A. Identification of elastic properties of composites by method of planning of experiments [J]. Composite Structures, 1998, 42(3): 257–263.
- [5] Pedersen P, Frederiksen P S. Identification of orthotropic material moduli by a combined experimental – numerical method [J]. Measurement, 1992, 10(3): 113–118.
- [6] Frederiksen P S. Experimental procedure and results for the

- identification of elastic constants of thick orthotropic plates [J]. Journal of Composite Materials, 1997, 31(4): 360–382.
- [7] Rikards R, Chate A, Gailis G. Identification of elastic properties of laminates based on experimental design [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(30/31): 5097–5115.
- [8] Meuwissen M H H, Oomens C W J, Baaijens F P T, et al. Determination of the elasto – plastic properties of aluminium using a mixed numerical – experimental method [J]. Journal of Materials Processing Technology, 1998, 75(1/3): 204–211.
- [9] Ayorinde E O. Elastic constants of thick orthotropic composite plates [J]. Journal of Composite Materials, 1995, 29(8): 1025–1039.
- [10] Huang L X, Sun X S, Liu Y H, Cen Z Z. Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(2): 109–121.
- [11] 孙秀山, 黄立新, 刘应华, 岑章志, 方东平. 二维正交各向异性结构弹塑性问题的边界元分析 [J]. 复合材料学报, 2005, 22(3): 156–161.
Sun Xiushan, Huang Lixin, Liu Yinghua, Cen Zhangzhi, Fang Dongping. Boundary element analysis for elasto – plastic problem of 2 - D orthotropic structure [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2005, 22(3): 156–161.
- [12] 熊渊博, 龙述尧, 李光耀. 层合板分析的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法 [J]. 复合材料学报, 2005, 22(6): 165–171.
Xiong Yuanbo, Long Shuyao, Li Guangyao. A meshless local Petrov-Galerkin method for the laminated plates [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2005, 22(6): 165–171.
- [13] 王勣成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [14] Rus G, Gallego R. Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, 26(4): 315–327.
- [15] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [16] 席少霖, 赵凤治. 最优化计算方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.
- [17] Chern S M, Tuttle M E. On displacement fields in orthotropic laminates containing an elliptical hole [J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(3): 527–539.
- [18] Daniel I M, Rowlands R E, Whiteside J B. Deformation and failure of boron – epoxy plate with circular hole [C]// Whitney J M. Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1973: 143–164.