

环面上非测地线缠绕方程

李 先 立

(武汉工业大学机械系)

摘 要

本文分析了非测地线稳定缠绕的条件，用微分几何中法曲率和短程曲率概念给出了环面上非测地线缠绕方程，为缠绕弧形管提供了依据。

一、引 言

纤维缠绕成型法自四十年代发展至今已成功地应用于许多领域。纤维缠绕技术的发展使人们能缠绕十分复杂的制品。通常，纤维应是制品表面的测地线才不会滑线，然而，由于产品的形状和设计等许多因素要求，不满足测地线缠绕条件的情况很多，文^[1] [2]对一般回转表面作过讨论，本文则用微分几何中法曲率、短程曲率概念讨论了非测地线稳定缠绕条件，给出了环面上非测地线缠绕方程。

二、非测地线稳定缠绕条件

非测地线稳定缠绕是利用浸胶纤维与芯模表面的摩擦以及纤维层之间的摩擦来阻挡纤维测向滑移使纤维在偏离测地线一定范围内实现稳定缠绕。

如图1所示，在曲面 Σ 上任取点 P 和过 P 点的一条有向曲线 Γ ，由静力关系：

$$F_s = F_N \operatorname{tg} \beta \quad (1)$$

$$F_R = \mu F_N \quad (2)$$

式中 F_s 为静摩擦力， F_N 为法向力，

F_R 为临界摩擦力， μ 为静摩擦系数。

若要纤维在制品表面稳定，不出现侧向滑移，需满足条件：

$$F_s \leq F_R \quad (3)$$

或 $\operatorname{tg} \beta \leq \mu$

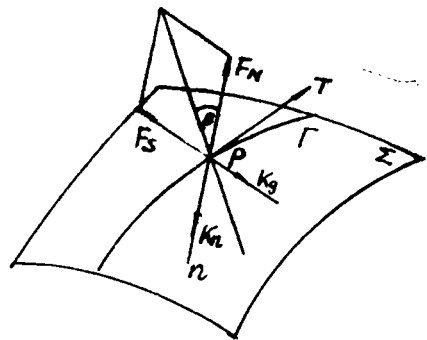


图 1

本文1986年3月3日收到

由微分几何^[3]知:

$$tg\beta = K_g / K_n \quad (4)$$

式中 K_g 为有向曲线 Γ 在 P 点的短程曲率

K_n 为曲面 Σ 在 P 点沿 Γ 方向的法曲率

因此
$$K_g / K_n \leq \mu \quad (5)$$

是实现非测地线稳定缠绕的平衡条件。

三、曲面上曲线的 K_n 、 K_g 计算

设在表示曲面 Σ :

$$r = r(u, v) \quad (6)$$

的方程里, 矢函数 $\vec{r}(u, v)$ 有连续的一阶、二阶偏导数 $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$, 且 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, 则曲面的法矢 \vec{n} 为:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad (7)$$

设 Γ :
$$u = u(s), v = v(s) \quad (8)$$

为 Σ 上一条曲线。则曲面在 P 点沿 Γ 方向的法曲率 K_n 为:

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad (9)$$

式中
$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2, & F &= \vec{r}_u \vec{r}_v, & G &= \vec{r}_v^2 \\ L &= \vec{n} \vec{r}_{uu}, & M &= \vec{n} \vec{r}_{uv}, & N &= \vec{n} \vec{r}_{vv} \end{aligned}$$

引入记号 $\vec{e}_1 = \vec{r}_u / \sqrt{E}$, $\vec{e}_2 = \vec{r}_v / \sqrt{G}$ 。令 \vec{T} 为曲线 Γ 在 P 点的切线矢

$$\vec{T} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \quad (10)$$

由 Liouville 公式:

$$K_g = \frac{d\tau}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\tau + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\tau \quad (11)$$

式中 τ 为从 \vec{e}_1 到 \vec{T} 的有向角。

四、环面上非测地线稳定缠绕方程

1. 环面参数方程:

如图 2 所示, 环面 $\vec{r} = \vec{r}(\theta, \beta)$ 参数方程为:

$$\vec{r} = \{ (r_0 + R_0 \sin\theta) \sin\beta, (r_0 + R_0 \sin\theta) \cos\beta, R_0 \cos\theta \} \quad (12)$$

式中 R_0 为环面截面半径

r_0 为环面半径

为方便计, 令 $n = r_0 / R_0$, 并取 R_0 为单位值, 这样处理后 (12) 式变为:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{ (n + \sin\theta) \sin\beta, (n + \sin\theta) \cos\beta, \cos\theta \} \\ \vec{r}_\beta &= \{ n + \sin\theta, \cos\beta, 0 \} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\theta &= \{ \cos\theta \sin\beta, \cos\theta \cos\beta, -\sin\theta \} \\ \vec{r}_{\beta\beta} &= \{ -(n+\sin\theta)\sin\beta, -(n+\sin\theta)\cos\beta, 0 \} \\ \vec{r}_{\beta\theta} &= \{ \cos\theta \cos\beta, -\cos\theta \sin\beta, 0 \} \\ \vec{r}_{\theta\theta} &= \{ -\sin\theta \sin\beta, -\sin\theta \cos\beta, -\cos\theta \} \\ \vec{n} &= (\vec{r}_\beta \times \vec{r}_\theta) / |\vec{r}_\beta \times \vec{r}_\theta| = \{ \sin\theta \sin\beta, \sin\theta \cos\beta, \cos\theta \} \end{aligned}$$

$$E = \vec{r}_\beta^2 = (n + \sin\theta)^2$$

$$F = \vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\theta = 0$$

$$G = \vec{r}_\theta^2 = 1$$

$$L = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\beta\beta}$$

$$= -\sin\theta(n + \sin\theta)$$

$$M = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\beta\theta} = 0$$

$$N = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\theta\theta} = -1$$

2. 环面上非测地线缠绕方程

今在环面上有一条通过点 P 的缠

绕曲线

$\Gamma: \beta = \beta(s), \theta = \theta(s)$ 。 \vec{T} 为过 P

点与 Γ 相切的切线， $\vec{T} = \vec{r}_\beta \frac{d\beta}{ds} + \vec{r}_\theta \frac{d\theta}{ds}$ ， \vec{r}_β 到 \vec{T} 的有向角为 τ 。我们定义由 \vec{r}_θ 到 \vec{T} 的有向角 α 为缠绕角，则 $\alpha + \tau = \pi/2$ 。

在 P 点邻域用二纬圆和二径向圆截取微元如图 3 所示，则有：

$$\sin\alpha = (n + \sin\theta) \frac{d\beta}{ds}$$

$$\cos\alpha = \frac{d\theta}{ds} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = (n + \sin\theta) \frac{d\beta}{d\theta}$$

将 (13)、(14) 代入 (9)、(11) 式得：

$$K_n = -\frac{\sin\theta + n\cos^2\alpha}{n + \sin\theta}$$

$$K_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos\theta}{n + \sin\theta} \sin\alpha \quad (15)$$

将 (15) 代入 (5) 式得环面非测地线稳定缠绕关系式：

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{-\mu(\sin\theta + n\cos^2\alpha) - \cos\theta \sin\alpha}{n + \sin\theta} \quad (16)$$

联立 (14)、(16) 得：

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{-\mu(\sin\theta + n\cos^2\alpha) - \cos\theta \sin\alpha}{(n + \sin\theta)\cos\alpha}$$

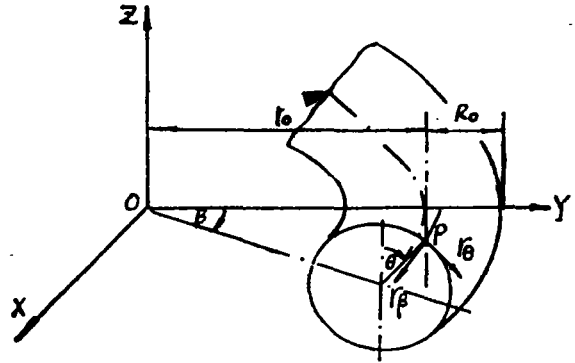


图 2

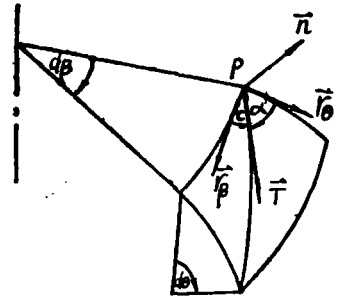


图 3

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{tga}{n + \sin\theta}$$

(17) 式即为环面上非测地线稳定缠绕方程，可用Runge-Kutta法进行数值解。

图4给出了 $R_0=100$, $n=3.67$, $\beta_0=45^\circ$, $\alpha_0=36^\circ$, μ 分别为0和0.1时 β , α 随 θ 变化的曲线图。

由图可看出，当 $\mu=0$ ，即测地线缠绕时缠绕角 α 随 θ 周期性变化，它与Clairant条件

$$r \sin\alpha = \text{const} \quad (18)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin\alpha_0}{n + \sin\theta} \right)$$

式中 α_0 为 $r=r_0$ 时缠绕角有相同的结果。

实际上，由(15)式 $K_g=0$ 和(14)式亦可得(18)式，今推导如下：

$$\frac{d\alpha}{ds} = - \frac{\cos\theta}{n + \sin\theta} \sin\alpha$$

$$d\alpha = - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{\cos\theta}{(n + \sin\theta)} d\theta$$

$$d \ln \sin\alpha + d \ln(n + \sin\theta) = 0$$

$$(n + \sin\theta) \sin\alpha = \text{const} \quad (19)$$

因此，(17)式也可用于环面上测地线缠绕。

又由图可看出，当 $\mu = -0.1$ 时，缠绕角 α 随 θ 增大而减小，这个性质适于纤维在端部回程缠绕。表1给出了， $\alpha_0 = 12^\circ$ 时， α 随 θ 变化的情况，从表列数据可看出在纤维回程缠绕时采用非测地线缠绕十分方便。

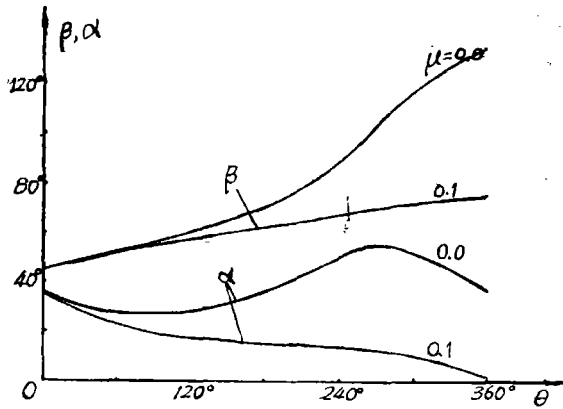


图 4

表1 $\alpha \sim \theta$ 变化表 ($\alpha_0 = 12^\circ$)

θ	0°	20°	40°	60°	80°	100°
α	12°	9.08°	6.52°	4.25°	2.169°	0.165°
θ	120°	140°	160°	180°	200°	
α	-1.86°	-4.01°	-6.38°	-9.05°	-12.05°	

五、結 語

1. 由(5)、(9)、(11)联立可求得在一般曲面上实现非测地线稳定缠绕方程。
2. (17)式给出了环面上非测地线稳定缠绕方程，它也可用于测地线缠绕。

参 考 文 献

- [1] G.MENGES, R.WODICKA and H.L.BARKING, NON-GEODESIC WINDING ON A SURFACE OF REVOLUTION, 33rd Annual Technical Conference SPI 1978.
- [2] 黄毓圣、谢军龙, “迴轉表面上的非測地綫纏繞計算”, 《宇航学报》, 1985, No 3, P.63—69.
- [3] 吳大任, 微分几何讲义, 人民教育出版社 1982. P.153-227.
- [4] 邹蒙, 黄毓圣, “一般迴轉表面非測地綫纏繞方程”, 第六届玻璃鋼/复合材料学术年会论文集, 成都, 1985年10月。

(接98頁)

鉅/环氧树脂复合材料常溫下的拉伸和蠕变	三戶·町田 (7-3-107)
用螺旋形纖維增强的复合材料的压延加工性	香川 丰等 (7-4-140)
对单向玻纤增强塑料的加楔光弹试验中的残留应力影响	井上·井戶 (7-4-147)
多层纏卷复合材料的低温冲击特性	中田·香川 (7-3-119)
FRP力学性能试验方法中的问题及设计标准(I-IV)	植村益次 (7-1-32) (7-2-74) (7-4-154) (8-1-22)
瑞典复合材料研究管见	島村昭治 (7-4-162)
英美的复合材料和高速变形力学研究近况	河田幸三 (7-4-166)
单向凝固涡轮叶片的开发	中川幸也 (8-1-2)
F RTP的近期进步及展望	秋山胜雄 (8-2-39)
PAN型碳纤维的开发动向	进藤昭男 (8-3-79)
粒子分散型复合材料的应力分析——Eshelby理论的应用	高桥清久 (8-2-46)
沥青型碳纤维的近况	大谷杉郎 (8-3-86)
合成有机纤维在混凝土增强材料方面的应用	小林一辅 (8-4-121)
PRP飞轮转子的现状	浜本 章 (8-4-128)
具有厚蒙皮的夹层梁	后藤一雄 (8-2-52)
纤维增强高分子复合体中的力学分散	儿玉·古桥 (8-1-9)
单向玻纤增强塑料加楔等色线形状与玻纤破损的关系	井上·井戶 (8-1-15)
钛酸钾纤维对金属基复合材料的适用性研究——纤维与金属基体的反应	福永秀春等 (8-2-66)
BMC注射成型制品的纤维取向, 熔接强度, 熔接成型机理	长谷川嘉雄等 (8-3-93) (8-4-136, -143)
有腹板和软质夹心的夹层梁的弯曲特性	剑持 洁等 (8-3-100)
夹层结构的性能、设计和评价(I)(II)(III) 金原 勋等	(8-4-150) (9-1-29) (10-1-36)
下一代产业基础技术研究开发制度中的复合材料研究开发问题	宮入裕夫 (8-1-30)
	(轉61頁)

NON-GEODESIC WINDING EQUATION ON A TORUS

Li Xianli

Department of Mechanical Engineering
Wuhan University of Technology, Wuhan, China

(Received March 1986)

ABSTRACT

The non-geodesic filament winding process is reproducible when the friction between the resin impregnated filament and bases (the core or other filament layer) is utilized in order to prevent any slippage of the reinforcing material. Based on normal and geodesic curvatures in Differential Geometry, this paper analyzed conditions of equilibrium of a non-geodesic winding:

$$K_g/K_n \leq \mu$$

where K_n is the normal curvature of the point on the curve, K_g the geodesic curvature of the point on the curve, and μ the coefficient of friction between the resin impregnated filament and the bases. The calculation formulas of a non-geodesic winding on a torus are presented in this paper, which can be solved with the aid of a method of numerical mathematics (Runge-Kutta method) and can also be utilized for a geodesic winding on a torus. A non-geodesic turn-around of the winding on a torus free of slippage is easily realized and this can be a evidence for winding curved tube.

RESTRICTIONS ON ELASTIC CONSTANTS OF ORTHOTROPIC MATERIALS

Xia Yuanming

Department of Modern Mechanics
University of Science and Technology of China, Hefei, China

(Received Jan. 1986)

ABSTRACT

Three groups of the equations of restrictions on elastic constants of orthotropic materials are derived by positive definition of complementary elastic energy density and compliance matrix. Some relative conclusions are derived, too.