第 12 卷　第 1 期　复 合 材 料 学 报　Vol. 12　No. 1
1995 年　2 月　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　Feb.　1995

复合材料任意壳稳定性研究(Ⅰ)

——几何方程的新研究

麦汉超
(北京航空航天大学，北京　100083)

摘　要　从三维非线性理论导出，任意曲线坐标系中任意壳体的几何非线性微分方程，并修正 K. Washizu 的公式，以期得到更加准确的稳定方程。

关键词　张量分析，几何方程，稳定方程

1　引　　言

张量分析最重要的领域之一就是壳体理论。而壳体稳定理论又是研究的重点。因而在近代力学中，一直未停止对壳体的分析，尤其是在非线性方面。目前，在复合材料壳体的研究中，大多数学者只限于研究扁层壳，其成果不能完全适用于任意形状壳，而且在经典的方程推导中，亦有失误之处。本文从张量理论出发，推导壳体的几何方程，使之适用于任意形状壳，球壳、扁壳的公式是其特例。

2　壳体的曲面几何

组成壳体的空间即壳空间(shell space)。由壳的中面计算坐标 $x^3=z$，而中面上任意点的位置向量为 $\boldsymbol{s}(x^1,x^2)$。典型点的位置向量为 $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+z\boldsymbol{a}_3$$

现将适用于中面的符号以及其对应的一般曲面的符号示于表 1。

表 1　壳体的符号

		中　　面　($z=0$)	一般曲面　($z\neq0$)
几何量	位置向量	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{r}$
	线　　元	$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
	基矢量	$\boldsymbol{a}^\alpha$，$\boldsymbol{a}_\alpha$，$\boldsymbol{a}^3=\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{g}^\alpha$，$\boldsymbol{g}_\alpha$，$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}^3$
	度量张量	$a_{\alpha\beta}$，$a^{\alpha\beta}$	$g_{\alpha\beta}$，$g^{\alpha\beta}$
	克里斯托弗符号	$\Gamma^r_{\alpha\beta}$	$\overline{\Gamma}^r_{\alpha\beta}$
	置换张量	$\in_{\alpha\beta}$，$\in^{\alpha\beta}$	$\overline{\in}^{\alpha\beta}$，$\overline{\in}^{\alpha\beta}$
	曲率张量	$b_{\alpha\beta}=\Gamma^3_{\alpha\beta}$	$\mu^\delta_\alpha b_{\delta\beta}=\overline{\Gamma}^3_{\alpha\beta}$
变形	位　　移	$\boldsymbol{u}=u_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha+u_3\boldsymbol{a}^3$	$\boldsymbol{v}=v_\alpha\boldsymbol{g}^\alpha+v_3\boldsymbol{g}^3$

本文于 1994 年 9 月 15 日收到修改稿，1994 年 6 月 21 日收到初稿

3 壳体的几何方程

Lagrange/Green 应变张量分量以 $f_{\alpha\beta}$表示,物理分量以 $\eta_{\alpha\beta}$表示,壳体中面有限应变张量分量以 $e_{\alpha\beta}$表示,小应变张量分量用 $\varepsilon_{\alpha\beta}$表示。壳体的几何方程推导如下:

$$
\begin{aligned}
2f_{\alpha\beta} &= v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha + v^k|_\alpha v_k|_\beta \\
&= \mu_\alpha^\delta[u_\delta|_\beta - z(u_3|_\delta)\|_\beta] + \mu_\beta^\alpha[u_\delta|_\alpha - z(u_3|_\delta)\|_\alpha] + \\
&\quad [u^\delta|_\alpha - z(u_3|^\delta)\|_\alpha][u_\delta|_\beta - z(u_3|_\delta)\|_\beta] + \mu_\alpha^\delta\mu_\beta^\rho u^3|_\delta u_3|_\rho \\
&= (\delta_\alpha^\delta - zb_\alpha^\delta)[u_\delta|_\beta - z(u_3|_{\delta\beta} - u_\gamma|_\delta b_\beta^\gamma)] + (\delta_\beta^\delta - zb_\beta^\delta)[u_\delta|_\alpha - z(u_3|_{\delta\alpha} - u_\gamma|_\delta b_\alpha^\gamma)] + \\
&\quad [u^\delta|_\alpha - z(u_3|_\alpha^\delta - u_\gamma|^\delta b_\alpha^\gamma)][u_\delta|_\beta - z(u_3|_{\delta\beta} - u_\gamma|_\delta b_\beta^\gamma)] + \\
&\quad (\delta_\alpha^\delta - zb_\alpha^\delta)(\delta_\beta^\rho - zb_\beta^\rho)u^3|_\delta u_3|_\rho \\
&= u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha + u^k|_\alpha u_k|_\beta - z(2u_3|_{\alpha\beta} + u_3|_{\alpha\delta}u^\delta|_\beta + u_3|_{\beta\delta}u^\delta|_\alpha - b_\alpha^\gamma u_\gamma|^\delta u_\delta|_\beta - \\
&\quad b_\beta^\gamma u_\gamma|^\delta u_\delta|_\alpha + b_\alpha^\delta u^3|_\delta u_3|_\beta + b_\beta^\delta u^3|_\delta u_3|_\alpha) + z^2(u_3|_{\alpha\delta}b_\beta^\delta + \\
&\quad u_3|_{\beta\delta}b_\alpha^\delta - b_\alpha^\delta b_\beta^\gamma u_\delta|_\gamma - b_\alpha^\delta b_\beta^\gamma u_\gamma|_\delta + u^3|_{\alpha\delta}u_3|_\beta^\delta - b_\alpha^\gamma u_\gamma|^\delta u_3|_{\delta\beta} - \\
&\quad b_\beta^\gamma u_\gamma|^\delta u_3|_{\delta\alpha} + b_\alpha^\gamma b_\beta^\zeta u_\gamma|^\delta u_\zeta|_\delta + b_\alpha^\delta b_\beta^\rho u^3|_\delta u_3|_\rho) \\
&\cong u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha + u^k|_\alpha u_k|_\beta - 2zu_3|_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

由上述推导可得近似表达式

$$2f_{\alpha\beta} \cong u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha + u^k|_\alpha u_k|_\beta - 2zu_3|_{\alpha\beta}$$

而度量张量　$g_{\alpha\beta}=\mu_\alpha^\gamma\mu_\beta^\delta a_{\gamma\delta}$,

壳张量　$\mu_\alpha^\gamma := \delta_\alpha^\gamma - zb_\alpha^\gamma$

在正交曲线坐标系中,则有　$g_{11}=\mu_1^1\mu_1^1 a_{11}$

$$\sqrt{g_{11}} = \mu_1^1\sqrt{a_{11}} = (1 - zb_1^1)A_1$$

$$\sqrt{g_{22}} = (1 - zb_2^2)A_2$$

故而　$2f_{12} \cong u_1|_2 + u_2|_1 + u^k|_1 u_k|_2 - 2zu_3|_{12}$

由此可以得到物理分量

$$
\begin{aligned}
2\eta_{12} &= \frac{2f_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \\
&= \frac{1}{A_1A_2}(u_1|_2 + u_2|_1 + u^k|_1 u_k|_2 - 2zu_3|_{12})[1 + z(b_1^1 + b_2^2)] \\
&= 2(e_{(12)} - z_{(3}|_{12)})[1 + z(b_1^1 + b_2^2)] \\
&= 2\{e_{(12)} - z[u_{(3}|_{12)} - (b_1^1 + b_2^2)e_{(12)}]\}
\end{aligned}
$$

再近似,则有

$$2\eta_{12} \cong 2\{e_{(12)} - z[u_{(3}|_{12)} - (b_1^1 + b_2^2)\varepsilon_{(12)}]\}$$

同理,可得

$$2\eta_{11} \cong 2\{e_{(11)} - z[u_{(3}|_{11)} - 2b_1^1\varepsilon_{(11)}]\}$$

$$2\eta_{22} \cong 2\{e_{(22)} - z[u_{(3}|_{22)} - 2b_2^2\varepsilon_{(22)}]\}$$

因而,定义

$$P_{\alpha\beta} := -u_3|_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\gamma}b_\beta^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma}b_\alpha^\gamma$$

或 $$P_{\alpha\beta}:=-u_3|_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(u_\alpha|_\gamma+u_\gamma|_\alpha)b_\beta^\gamma+\frac{1}{2}(u_\beta|_\gamma+u_\gamma|_\beta)b_\alpha^\gamma$$

式中 $u_3|_{\alpha\beta}=\hat{b}_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}$，其中 $\hat{b}_{\alpha\beta}$和 $b_{\alpha\beta}$分别为壳体中曲面变形前和变形后的曲率张量。

由上述推导，建议采用如下近似几何方程：

$$f_{(\alpha\beta)}\cong e_{(\alpha\beta)}+z\rho_{(\alpha\beta)}$$

$$e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_\alpha|_\beta+u_\beta|_\alpha+u^k|_\alpha u_k|_\beta)$$

$$u_3|_{\alpha\beta}=(u_3|_\alpha)\|_\beta+u_\gamma|_\alpha b_\beta^\gamma$$

$$(u_3|_\alpha)\|_\beta=(u_3|_\alpha)_{,\beta}-u_3|_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

$$\begin{aligned}(u_3|_1)\|_2&=(u_3|_1)_{,2}-u_3|_1\Gamma_{12}^1-u_3|_2\Gamma_{12}^2\\&=(u_3|_1)_{,2}-u_3|_1\frac{A_{1,2}}{A_1}-u_3|_2\frac{A_{2,1}}{A_2}\\&=[u_{(3}|_{1)}A_1]_{,2}-u_{(3}|_{1)}A_{1,2}-u_{(3}|_{2)}A_{2,1}\\&=l_{31,2}A_1-l_{32}A_{2,1}\end{aligned}$$

$$u_{(3}|_{12)}=\frac{1}{A_1A_2}u_3|_{12}=\frac{l_{31,2}}{A_2}-l_{32}\frac{A_{2,1}}{A_2A_1}-\frac{l_{21}}{R_2}$$

$$-\hat{m}_{11}:=(u_{(3}|_1)\|_{1)}=\frac{1}{A_1}l_{31,1}+\frac{A_{1,2}}{A_1A_2}l_{32}$$

$$-\hat{m}_{12}:=(u_{(3}|_1)\|_{2)}=\frac{1}{A_2}l_{31,2}-\frac{A_{2,1}}{A_2A_1}l_{32}$$

$$-\hat{m}_{21}:=(u_{(3}|_2)\|_{1)}=\frac{1}{A_1}l_{32,1}-\frac{A_{1,2}}{A_1A_2}l_{31}$$

$$-\hat{m}_{22}:=(u_{(3}|_2)\|_{2)}=\frac{1}{A_2}l_{32,2}+\frac{A_{2,1}}{A_2A_1}l_{31}$$

故 $u_{(3}|_{12)}=-\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2}=\chi_{12}=\chi_{21}=u_{(3}|_{21)}$

同样 $u_{(3}|_{11)}=-\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}$，$u_{(3}|_{22)}=-\hat{m}_{22}-\frac{l_{22}}{R_2}$

K. Washizu 曾定义

$$\chi_\alpha=-\hat{m}_{11},\ \chi_\beta=-\hat{m}_{22},\quad \chi_{\alpha\beta}=-\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_2}=-\hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_1}=\chi_{\beta\alpha}$$

这样实际上造成 χ_α，χ_β 和 $\chi_{\alpha\beta}=\chi_{\beta\alpha}$不是同一张量的物理分量，所以应改成如下：

$$\chi_\alpha=-\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1},\ \chi_\beta=-\hat{m}_{22}+\frac{l_{22}}{R_2},\quad \chi_{\alpha\beta}=-\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_2}=-\hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_1}=\chi_{\beta\alpha}$$

若以离开壳体中曲面法截线的曲率中心为曲面法线的正方向，则

$$\chi_{11}=-\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1},\ \chi_{22}=-\hat{m}_{22}-\frac{l_{22}}{R_2},\quad \chi_{12}=-\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2}=-\hat{m}_{21}-\frac{l_{12}}{R_1}=\chi_{21}$$

则 χ_{11}，χ_{22}，$\chi_{12}=\chi_{21}$是同一张量的物理分量。

由前述 $\rho_{\alpha\beta}$的定义，可知

$$\rho_{(11)}=-u_{(3}|_{11)}+2l_{11}b_1^1=-\chi_{11}+2l_{11}b_1^1=\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1}-\frac{2l_{11}}{R_1}$$

即 $\rho_{(11)}=\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}$

同理　$\rho_{(22)}=\hat{m}_{22}-\dfrac{l_{22}}{R_2}$，　$\rho_{(12)}=\hat{m}_{12}-\dfrac{1}{R_1}\dfrac{l_{12}+l_{21}}{2}-\dfrac{1}{R_2}\dfrac{l_{12}-l_{21}}{2}$

类似壳张量的定义　$\mu^\alpha_\beta:=\delta^\alpha_\beta-zb^\alpha_\beta$　一样，定义

$$\hat{f}_{\alpha\beta}:=e_{\alpha\beta}+z\rho_{\alpha\beta},\quad f_{(\alpha\beta)}:=f_{\alpha\beta}/\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}},\quad \hat{f}_{(\alpha\beta)}:=\hat{f}_{\alpha\beta}/\sqrt{a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}}$$

以下，按 K. Washizu 的推导方法，将其修正如下：

$$\begin{aligned}\frac{2}{A_1^2}f_{11}&=[(1-\frac{z}{R_1})+l_{11}+z\hat{m}_{11}]^2+(l_{21}+z\hat{m}_{21})^2+l_{31}^2-(1-\frac{z}{R_1})^2\\&=(1+l_{11})^2+l_{21}^2+l_{31}^2-1+2z(\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}+l_{11}\hat{m}_{11}+l_{21}\hat{m}_{21})-\\&\quad z^2(2\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}-\hat{m}_{11}^2-\hat{m}_{21}^2)\\&\cong 2l_{11}+l_{11}^2+l_{21}^2+l_{31}^2+2z(\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1})-2z^2\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}\\&\cong 2[l_{11}+z(\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}-z^2\frac{\hat{m}_{11}}{R_1})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{A_1A_2}f_{12}&=[(1-\frac{z}{R_1})+l_{11}+z\hat{m}_{11}](l_{12}+z\hat{m}_{12})+\\&\quad[(1-\frac{z}{R_2})+l_{22}+z\hat{m}_{22}](l_{21}+z\hat{m}_{21})+l_{31}l_{32}\\&=(1+l_{11})l_{12}+(1+l_{22})l_{21}+l_{31}l_{32}+z(\hat{m}_{12}-\frac{l_{12}}{R_1}+\hat{m}_{21}-\frac{l_{21}}{R_2}+l_{11}\hat{m}_{12}+\\&\quad l_{21}\hat{m}_{22}+l_{22}\hat{m}_{21}+l_{12}\hat{m}_{11})-z^2(\frac{\hat{m}_{12}}{R_1}+\frac{\hat{m}_{21}}{R_2}-\hat{m}_{11}\hat{m}_{12}-\hat{m}_{21}\hat{m}_{22})\\&\cong l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32}+2z(\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2})-z^2(\frac{\hat{m}_{12}}{R_1}+\frac{\hat{m}_{21}}{R_2})\\&\cong 2[\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})+z(\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2})-\frac{1}{2}z^2(\frac{\hat{m}_{12}}{R_1}+\frac{\hat{m}_{21}}{R_2})]\end{aligned}$$

这样，对于小应变张量分量

$$2\epsilon_{11}=2\frac{l_{11}+z(m_{11}-\dfrac{l_{11}}{R_1})-z^2\dfrac{\hat{m}_{11}}{R_1}}{(1-\dfrac{z}{R_1})^2}=2\frac{l_{11}+z\hat{m}_{11}}{1-\dfrac{z}{R_1}}$$

$$2\epsilon_{22}=2\frac{l_{22}+z(\hat{m}_{22}-\dfrac{l_{22}}{R_2})-z^2\dfrac{\hat{m}_{22}}{R_2}}{(1-\dfrac{z}{R_2})^2}=2\frac{l_{22}+z\hat{m}_{22}}{1-\dfrac{z}{R_2}}$$

$$\begin{aligned}2\epsilon_{12}&=2\frac{l_{12}+l_{21}+2z(\hat{m}_{12}-\dfrac{l_{21}}{R_2})-z^2(\dfrac{\hat{m}_{12}}{R_1}+\dfrac{\hat{m}_{21}}{R_2})}{(1-\dfrac{z}{R_1})(1-\dfrac{z}{R_2})}\\&=\frac{l_{12}+z\hat{m}_{12}}{1-\dfrac{z}{R_2}}+\frac{l_{21}+z\hat{m}_{21}}{1-\dfrac{z}{R_1}}\end{aligned}$$

由此推导，可见小应变张量分量可写成

$$2\varepsilon_{11}=\frac{l_{11}+z\hat{m}_{11}}{1-\frac{z}{R_1}}+\frac{l_{11}+z\hat{m}_{11}}{1-\frac{z}{R_1}},\quad 2\varepsilon_{22}=\frac{l_{22}+z\hat{m}_{22}}{1-\frac{z}{R_2}}+\frac{l_{22}+z\hat{m}_{22}}{1-\frac{z}{R_2}}$$

$$2\varepsilon_{12}=\frac{l_{12}+z\hat{m}_{12}}{1-\frac{z}{R_2}}+\frac{l_{21}+z\hat{m}_{21}}{1-\frac{z}{R_1}}$$

这里，$-\hat{m}_{11}$，$-\hat{m}_{22}$是与$-\hat{m}_{12}$，$-\hat{m}_{21}$相对应的量。

故而，由 ε_{12}式定义

$$\chi_{12}:=-\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_2}=-\hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_1}=\chi_{21}$$

相对应的，由 ε_{11}和 ε_{22}式可以看出，必然有定义

$$\chi_{11}:=-\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1},\quad \chi_{22}:=-\hat{m}_{22}+\frac{l_{22}}{R_2}$$

可见，K. Washizu 的定义显然是不对的。

对于物理分量，则有

$$\begin{aligned}\eta_{11}&=f_{11}/[A_1(1-\frac{z}{R_1})]^2\\&\cong[l_{11}+\frac{1}{2}(l_{11}^2+l_{21}^2+l_{31}^2)+z(\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}+l_{11}\hat{m}_{11}+\\&\quad l_{21}\hat{m}_{21})-\frac{z^2}{2}(2\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}-\hat{m}_{11}^2-\hat{m}_{21}^2)](1+2\frac{z}{R_1}+\frac{z^2}{R_1^2})\\&=l_{11}+\frac{1}{2}(l_{11}^2+l_{21}^2+l_{31}^2)+z(\hat{m}_{11}-\frac{l_{11}}{R_1}+l_{11}\hat{m}_{11}+l_{21}\hat{m}_{21}+\\&\quad\frac{l_{11}^2}{R_1}+\frac{l_{21}^2}{R_1}+\frac{l_{31}^2}{R_1})+z^2[\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}-\frac{l_{11}}{R_1^2}+2\frac{l_{11}\hat{m}_{11}}{R_1}+\\&\quad 2\frac{l_{21}\hat{m}_{21}}{R_1}+\frac{1}{2}(\frac{l_{11}^2}{R_1^2}+\frac{l_{21}^2}{R_1^2}+\frac{l_{31}^2}{R_1^2}+\hat{m}_{11}^2+\hat{m}_{21}^2)]\\&=l_{11}+\frac{1}{2}(l_{11}^2+l_{21}^2+l_{31}^2)+z(\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1})+z^2(\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}-\frac{l_{11}}{R_1^2})\\&=l_{11}+\frac{1}{2}(l_{11}^2+l_{21}^2+l_{31}^2)+z(\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1})\\&=e_{11}+z\rho_{11}\end{aligned}$$

同理可得

$$\eta_{22}\cong e_{22}+z\rho_{22}$$

$$\begin{aligned}\eta_{12}&=f_{12}/[A_1A_2(1-\frac{z}{R_1})(1-\frac{z}{R_2})]\\&\cong\frac{1}{2}[l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32}+z(\hat{m}_{12}-\frac{l_{12}}{R_1}+\\&\quad m_{21}-\frac{l_{21}}{R_2}+l_{11}\hat{m}_{12}+l_{21}\hat{m}_{22}+l_{22}\hat{m}_{21}+l_{12}\hat{m}_{11})-\\&\quad z^2(\frac{\hat{m}_{11}}{R_1}+\frac{\hat{m}_{21}}{R_2}-\hat{m}_{11}\hat{m}_{12}-\hat{m}_{21}\hat{m}_{22})](1+\frac{z}{R_1})(1+\frac{z}{R_2})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})+\frac{z}{2}[\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_1}+ \\
&\quad \hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_2}+l_{11}\hat{m}_{12}+l_{21}\hat{m}_{22}+l_{22}\hat{m}_{21}+l_{12}\hat{m}_{11}+ \\
&\quad (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})(l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})]+\frac{z^2}{2}[\frac{\hat{m}_{12}}{R_2}-\frac{l_{21}}{R_2^2}+ \\
&\quad \frac{\hat{m}_{21}}{R_1}-\frac{l_{12}}{R_1^2}+\hat{m}_{11}\hat{m}_{12}+\hat{m}_{21}\hat{m}_{22}+(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})(l_{11}\hat{m}_{12}+ \\
&\quad l_{21}\hat{m}_{22}+l_{22}\hat{m}_{21}+l_{12}\hat{m}_{11})+\frac{1}{R_1R_2}(l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})] \\
&= \frac{1}{2}(l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})+\frac{z}{2}[\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_1}+ \\
&\quad \hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_2})+\frac{z^2}{2}(\frac{\hat{m}_{12}}{R_2}-\frac{l_{21}}{R_2^2}+\frac{\hat{m}_{21}}{R_1}-\frac{l_{12}}{R_1^2}) \\
&= \frac{1}{2}(l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})+\frac{z}{2}(\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_1}+\hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_2}) \\
&= \frac{1}{2}(l_{12}+l_{21}+l_{11}l_{12}+l_{21}l_{22}+l_{31}l_{32})+ \\
&\quad z[\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2}+\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})] \\
&= e_{12}+z\rho_{12}
\end{aligned}
$$

式中　$\rho_{11}=\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1}$，　$\rho_{22}=\hat{m}_{22}+\frac{l_{22}}{R_2}$，

$$
\rho_{12}=\hat{m}_{12}-\frac{l_{21}}{R_2}+\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\hat{m}_{12}+\frac{1}{R_1}\frac{l_{12}+l_{21}}{2}+\frac{1}{R_2}\frac{l_{12}-l_{21}}{2}
$$

若 a_3 以离开壳体中曲面法截线的曲率中心为正方向，则上述 ρ 各式中的 R_1 和 R_2 可改换成 $-R_1$ 和 $-R_2$，这时的 ρ 就和前述之 ρ 相同了。

综上所述，对于几何方程，有三种近似表达式：

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=l_{11}+z\hat{m}_{11} \\
\varepsilon_{22}&=l_{22}+z\hat{m}_{22} \\
\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})+\frac{z}{2}(\hat{m}_{12}+\hat{m}_{21})
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=l_{11}+z(\hat{m}_{11}+\frac{l_{11}}{R_1}) \\
\varepsilon_{22}&=l_{22}+z(\hat{m}_{22}+\frac{l_{22}}{R_2}) \\
\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})+z(\hat{m}_{12}+\frac{l_{21}}{R_2}) \\
&=\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21})+z(\hat{m}_{21}+\frac{l_{12}}{R_1})
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= l_{11} + z(\hat{m}_{11} - \frac{l_{11}}{R_1}) \\ \varepsilon_{22} &= l_{22} + z(\hat{m}_{22} - \frac{l_{22}}{R_2}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + z[\hat{m}_{12} - \frac{l_{12}}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) - \frac{l_{21}}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})] \\ &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + z[\hat{m}_{21} - \frac{l_{21}}{2}(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}) - \frac{l_{12}}{2}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})] \\ &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + \frac{z}{2}(\hat{m}_{12} - \frac{l_{21}}{R_1} + \hat{m}_{21} - \frac{l_{12}}{R_2})\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

上述(1)、(2)、(3)三式中，(3)式较为精确，对于球壳，(3)式中之 $R_1=R_2=R$，故而在这种情况下，(3)式可以简化为

$$\varepsilon_{11} = l_{11} + z(\hat{m}_{11} - \frac{l_{11}}{R}), \quad \varepsilon_{22} = l_{22} + z(\hat{m}_{22} - \frac{l_{22}}{R})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + z(\hat{m}_{12} - \frac{l_{12}}{R}) = \frac{1}{2}(l_{21} + l_{12}) + z(\hat{m}_{21} - \frac{l_{21}}{R})$$

对于扁壳，由于 $\frac{1}{R_1} \cong 0$， $\frac{1}{R_2} \cong 0$，所以

$$\varepsilon_{11} = l_{11} + z\hat{m}_{11}, \quad \varepsilon_{22} = l_{22} + z\hat{m}_{22}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) + z\hat{m}_{12} = \frac{1}{2}(l_{21} + l_{12}) + z\hat{m}_{21} = \frac{1}{2}[(l_{12} + l_{21}) + z(\hat{m}_{12} + \hat{m}_{21})]$$

即对于扁壳而言，(3)式和(2)式都简化成(1)式。

4 结束语

本文所推导之几何方程只是任意壳体稳定性研究的一部分。作者还将介绍对壳体弹性本构方程的特性及稳定方程的研究。由于复合材料多层壳的非均质性使其力学分析变得复杂，因而，对于复合材料任意形状壳体，在本文的基础上，寻找具有普遍性的稳定方程是具有实际意义的。

参 考 文 献

1 Flügge W. Tensor analysis and continuum mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1972: 120－160

2 Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. New York: Pergamon Press, 1982: 107－126

3 冯元桢. 连续介质力学导论. 北京：科学出版社，1984：133－170

4 黄执中. 任意形状壳体非线性理论的普适方程. 现代数学和力学，1990：288

5 李松年，黄执中. 非线性连续流力学. 北京：北京航空学院出版社，1987：32，100－103，105－164

6 Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. New York: Academic Press, 1977: 117－156

ON THE STABILITY OF ARBITRARY COMPOSITES SHELLS (Ⅰ) ——GEOMETRICAL EQUATIONS

Mai Hanchao
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract The new non-linear geometrical differential equations for arbitrary composites shells are derived on the basis of 3-dimensional non-linear theory in curveilinear coordinates. The Washizu equation in modified and a more accurate stability equation is expected to be established based upon it.

Key words tensor analysis, geometrical equation, stability equation

日本东丽公司的 CF 年产能力将达 2900 吨

据日本塑料产业资材新闻(EPJ)1994 年 12 月 1 日报道，东丽公司现有碳纤维(CF)生产能力为年产 2550 吨，生产 PAN 系 CF(TORAYCA)的爱媛工场将使生产设备增强 350 吨的年产能力，计划 1995 年年中开工。

这样，东丽公司的年产能力将为 2900 吨，仍保持世界第一的地位(在法国还有合作公司 SOFICAR，其年产 CF 能力为 700 吨，加起来为 3600 吨)。

美国在高尔夫球杆及汽车用 CNG(压缩天然气)容器方面，以日本为中心在道路修补和土木工程用器材方面等，对 CF 的需要在急速增长，东丽增加生产能力的目的就是为适应这种需要。

PAN 系 CF 由东丽公司于 1971 年在世界上首先正式批量生产，在日本的体育用品和欧美的航空、航天方面开始得到应用，进入 80 年代以后市场得到快速增长，而在 1991 年以后则由于民航的需要急速减少和世界同时不景气，近几年 CF 的市场状况持续低迷。

其结果，1990 年考陶尔兹公司、1993 年美国 BASF 公司、1994 年新旭化成碳公司陆续从 CF 部门撤退，发生了世界性的业界重组。

与此相反，从 93 年下半年开始，美国在高尔夫球杆相关方面的需要急增(CFRP 化率从 92 年的 31%上升到 94 年的 55%)，以此为契机显现出需求得到恢复的征兆，进一步预测：美国 CNG 容器的 CF 需要量在数年内会达到 3000～4000 吨。

在日本，很早就期待在土木建筑方面应用，进入 1994 年以后陆续开始正式采用，在世界上成为该行业应用的先驱。

关于飞机方面的用途，波音公司的 B777 从 94 年起开始批量生产，预计 95 年以后也会有比较长期稳定的需求增长。

东丽公司预测，以上述这些 CF 相关市场的世界性动向为背景，全世界的 CF 需要量 94 年会比前一年增长 8.4%(93 年对前一年增长 5.2%；92 年对前一年增长 0.9%)，将为 7230 吨，而 95 年以后每年将有 15%～20%的高增长率。

由于这种世界性需求的急速恢复和 92～94 年间因世界性业界重组而造成的设备能力的缩小，正在急速地对供求平衡加以改善，人们认为：95 年的 CF 整个市场会发生供应不足状态。

因此，东丽公司在致力于下落价格回升的同时，为对应需求情况的好转，决定扩大 TORAYCA 碳纤维的生产能力。　　(申从祥)