

计及应力水平效应的复合材料剩余强度概率模型

马辉东 曾世龙 马强 白学宗 安宗文

Probabilistic residual strength model for composite materials considering stress levels

MA Huidong, ZENG Shilong, MA Qiang, BAI Xuezhong, AN Zongwen

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20230614.002>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于复合材料剩余强度的衍生疲劳损伤模型

A derivative fatigue damage model based on residual strength of composites

复合材料学报. 2020, 37(10): 2473–2481 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20191224.002>

单向碳/碳复合材料拉-拉疲劳寿命及剩余强度预测模型

Model for predicting tension–tension fatigue life and residual strength of unidirectional carbon/carbon composites

复合材料学报. 2018, 35(8): 2293–2301 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20171115.004>

交变载荷对CFRP复合材料-铝合金粘接接头剩余强度的影响

Effect of alternating load on residual strength of adhesively bonded CFRP composite–aluminum alloy joints

复合材料学报. 2019, 36(5): 1124–1131 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180726.001>

胶层厚度对碳纤维/双马来酞亚胺树脂复合材料平-折-平混合连接接头力学性能的影响

Effect of adhesive thickness on mechanical properties of carbon fiber/bismaleimide resin composite flat–joggle–flat hybrid (bonded–bolted) joint

复合材料学报. 2020, 37(11): 2825–2832 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20200121.003>

碱、盐环境下不同应力水平FRP筋抗压强度试验与理论研究

Experimental and theoretical study on compressive strength of FRP rebars under different stress levels in alkali and salt solution

复合材料学报. 2017, 34(10): 2220–2231 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20170106.001>

全湿热场下碳纤维/环氧树脂复合材料弯曲性能及寿命预测

Flexural properties and life–time estimation of carbon fiber/epoxy composite under hygrothermal conditions

复合材料学报. 2020, 37(1): 104–112 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20190517.002>



扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

计及应力水平效应的复合材料剩余强度概率模型



分享本文

马辉东¹, 曾世龙^{1,2}, 马强¹, 白学宗¹, 安宗文^{*1}

(1. 兰州理工大学 机电工程学院, 兰州 730050; 2. 甘肃省特种设备检验检测研究院 国家风电设备质量检验检测中心(甘肃), 兰州 730050)

摘要: 针对当前大多数复合材料剩余强度模型通用化程度低、试验成本高的问题, 本文提出了一个计及应力水平效应且独立于应力水平的剩余强度概率模型。首先, 给出归一化强度储备的定义, 并根据归一化强度储备推导出确定性剩余强度模型。然后, 将一个疲劳寿命概率模型耦合进确定性剩余强度模型, 进而衍生出一个新的剩余强度概率模型。最后, 利用文献中的恒幅与变幅剩余强度试验数据对所提出的剩余强度概率模型的准确性和适用性进行验证。结果表明: 几乎所有的恒幅试验数据点都分布在预测曲线的 95% 置信上限与 5% 置信下限之间, 且 50% 可靠度的预测曲线对试验数据具有高拟合优度值: 0.94、0.84 及 0.97。所提出的模型在充分考虑了复合材料剩余强度统计特征的前提下, 仅用一组模型参数即可准确描述多个应力水平下的强度退化。在变幅工况下, 所提出模型在升序与降序变幅加载中的预测值与试验值的相对误差均低于 6%。

关键词: 复合材料; 强度储备; 剩余强度; 概率; 疲劳寿命; 恒幅与变幅; 应力水平

中图分类号: TB332

文献标志码: A

文章编号: 1000-3851(2024)02-1080-12

Probabilistic residual strength model for composite materials considering stress levels

MA Huidong¹, ZENG Shilong^{1,2}, MA Qiang¹, BAI Xuezhong¹, AN Zongwen^{*1}

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. National Wind Power Equipment Quality Supervision and Inspection Centre (Gansu), Gansu Province Special Equipment Inspection and Testing Institute, Lanzhou 730050, China)

Abstract: To address the problems of low generalization and high testing costs of most current residual strength models for composites, a probabilistic residual strength model that accounts for the effect of stress level and is independent of stress level was proposed. Firstly, the normalized strength reserve was defined and a deterministic residual strength model was derived based on the normalized strength reserve. Then, a fatigue life probability model was coupled into the deterministic residual strength model, and then a new residual strength probability model was derived. Finally, the accuracy and applicability of the proposed probabilistic residual strength model was verified using constant-amplitude and variable-amplitude residual strength experimental data from the open literatures. The results show that almost all the constant amplitude experimental data points are distributed between the upper 95% confidence limit and lower 5% confidence limit of the prediction curves, and the prediction curves with 50% reliability have high goodness-of-fit values for the experimental data: 0.94, 0.84 and 0.97. The proposed model accurately describes strength degradation at multiple stress levels using only one set of model

收稿日期: 2023-04-14; 修回日期: 2023-05-15; 录用日期: 2023-05-28; 网络首发时间: 2023-06-15 08:35:06

网络首发地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20230614.002>

基金项目: 国家自然科学基金 (51665029); 甘肃省高等学校产业支撑引导项目 (2020 C-12); 甘肃省科技计划资助 (22 JR5 RA238); 兰州理工大学优秀博士学位论文培育计划

National Natural Science Foundation of China (51665029); Industrial Support Plan for Colleges and Universities in Gansu Province of China (2020 C-12); Gansu Province Science and Technology Program Funding (22 JR5 RA238); Incubation Program of Excellent Doctoral Dissertation-Lanzhou University of Technology

通信作者: 安宗文, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为风电叶片及其复合材料疲劳寿命预测 E-mail: anzongwen@163.com

引用格式: 马辉东, 曾世龙, 马强, 等. 计及应力水平效应的复合材料剩余强度概率模型 [J]. 复合材料学报, 2024, 41(2): 1080-1091.

MA Huidong, ZENG Shilong, MA Qiang, et al. Probabilistic residual strength model for composite materials considering stress levels[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2024, 41(2): 1080-1091(in Chinese).

parameters, with sufficient consideration of the statistical characteristics of the residual strength of the composite. The relative error between the predicted values of the proposed model and experimental values for both ascending and descending variable-amplitude loading is less than 6%.

Keywords: composite; strength reserve; residual strength; probability; fatigue life; constant and variable amplitude; stress level

纤维增强复合材料在航空航天、风力发电等重大领域主承力部件(如风电叶片)上的广泛应用^[1]、工程结构中材料设计许用值的逐渐提高^[2]及越来越高的轻量化要求,使复合材料结构的疲劳问题不断显现^[3-5]。然而,复合材料结构疲劳特性的数学表征却是一个极其复杂、耗财耗时的过程,主要原因有二:首先,复合材料的各向异性和不均匀性本质加剧了复合材料结构疲劳演化的复杂程度,其疲劳破坏归因于不同尺度上的多种损伤模式的扩展、耦合及累积效应^[6];其次,组分材料、加工工艺及固有缺陷等(如纤维错位、空隙、未反应的树脂、残余应力等)的多样性使每个复合材料结构都具有独特的疲劳性能^[7],且这些复材结构的疲劳演化过程与应力水平、应力比等加载条件直接相关。可见复合材料结构损伤模式、加工缺陷的多样性及损伤演化对加载条件的依赖性,使复合材料结构的数学表征极具挑战性。此外,由于不同复材结构的内部缺陷和铺层配置的差异性,其疲劳试验结果必然具有较强的分散性,因而复合材料疲劳的数学表征应采用统计学手段^[8]。

通过对复合材料试样在恒幅正弦波载荷的激励下开展大量的疲劳试验研究发现,复合材料疲劳存在以下几点明显特征:(1)复合材料试样的疲劳试验数据具有明显的统计特性^[7];(2)强度退化的突然死亡特征,即复合材料试样的强度在前约90%的载荷循环中平稳缓慢地下降,而在最后不到10%的载荷周期内,强度迅速退化至最大加载应力值并发生失效^[9];(3)刚度退化的快-慢-快三阶段特性^[10];(4)强度-寿命等秩假设的有效性^[11],即静强度更高的试样也具有更长的疲劳寿命,发生失效时的剩余强度更高。为了降低表征复合材料疲劳的试验成本,研究者们分别基于强度退化和刚度退化提出了许多经验性的宏观唯象模型^[4, 7-8, 10, 12-16],相较于刚度退化模型,强度退化模型优势有二:首先,复合材料结构的剩余强度参数与其结构设计、可靠性分析等直接相关;其次,当剩余强度值退化至循环应力峰值时,试样发生破坏,因此,基于强度退化的模型拥有天然的失效判据^[7]。Halpin等^[17]率先提出了基于剩余强度

退化的疲劳理论,在此基础上,大量强度退化式的疲劳模型被先后提出。然而,其中多数模型属于确定性模型,未计及复合材料疲劳数据的分散性和统计特征^[18]。Passipoularidis等^[19]基于大量的剩余强度试验数据,对比分析了文献中的几种经典剩余强度模型并得出结论:多数模型的预测依赖于大量的试验投入,且预测结果多不保守,从设计者的角度来看,BROUTMAN等^[12]的线性模型仍然是当前工程应用中的首选。此外,大量模型是基于特定的载荷状态(应力水平和应力比等)和铺层配置提出的,难以通用于其他载荷状态和铺层结构,这也是限制剩余强度类模型进一步应用的主要屏障^[15]。为了克服这个不足,Shokrieh等^[20]最先提出了一个通用型剩余性能退化模型,该模型能够预测任意应力比下单向层合板的疲劳行为。Stojković等^[15]提出了一个考虑应力水平影响且独立于应力水平的通用型剩余强度模型,该模型能仅用一组模型参数预测多个应力水平下的剩余强度退化过程,能大大减少确定模型参数所需的试验投入,缺点在于所提出模型是一个确定性模型,未计及复合材料剩余强度的统计特征。而当前公开发表的考虑载荷因素影响(或者独立于载荷因素,即应力水平、应力比等)的通用型模型非常有限,因此,开发具有通用性的疲劳模型对于扩大其应用范围、降低试验成本都具有重大意义。此外,复合材料结构在实际服役时,必然承受由多个应力水平组成的变幅载荷,已有研究表明,变幅加载顺序的不同会直接影响复合材料结构的疲劳行为^[7, 21-23]。为了降低复合材料变幅疲劳响应的复杂性,大量研究将变幅范围限制在二级变幅加载(即只有高、低两个应力水平),并试图建模这种变幅顺序效应。Paepegem等^[24]通过回顾一系列变幅疲劳试验发现,有一些试验结果表明:从低到高的加载顺序对复合材料试样的损伤比从高到低的加载顺序更严重,而另一些试验则得到相反的结论。变幅加载顺序的损伤无规律性给疲劳建模工作带来了严峻的挑战,因此,极有必要开发一个适用于变幅加载疲劳预测的模型,并验证其考虑变幅加载顺序的能力。

鉴于此, 本文通过将一个概率型疲劳寿命模型耦合进剩余强度模型, 提出一个计及应力水平效应的概率型剩余强度模型; 再利用文献中的疲劳试验数据, 从恒幅和变幅两个角度出发, 验证所提模型的准确性、适用性和统计性, 从而降低确定剩余强度模型参数所需的试验成本, 提高模型的通用化程度。

1 纤维增强复合材料的剩余强度

1.1 恒幅加载下复合材料的剩余强度

基于 D'Amore^[9] 提出的幂律模型 (如下式所示), 推导同时适用于恒幅与变幅加载预测的剩余强度模型:

$$\frac{d\sigma_R}{dn} = -an^{-b} \quad (1)$$

式中: σ_R 表示 n 次循环之后的试样剩余强度; a 和 b 表示给定加载条件下的正模型常数。首先, 假设正参数 b 取决于所关注的材料类型与加载模式, 其次, 在假设正参数 a 与加载幅值 $\Delta\sigma$ 间的线性关系 (比例因子 a_0) 的基础上, 即 $a=a_0\Delta\sigma=\sigma_0\sigma_{\max}(1-R)$ 可将上述基础模型演化为考虑了应力比 R 的新模型, 如下式所示:

$$\sigma_R = \sigma_0 - \alpha\sigma_{\max}(1-R)(n^\beta - 1) \quad (2)$$

式中: σ_0 表示材料的试验静强度; σ_{\max} 表示循环应力峰值, 代表应力水平; α 和 β 是模型参数:

$$\alpha = \frac{a_0}{1-b}, \quad \beta = 1-b \quad (3)$$

本文在进行模型推导时存在如下的 3 个假设:

假设 1: 当材料的剩余强度退化到最大应力水平值时试样发生破坏, 即 $\sigma_R = \sigma_{\max}$, 则可建立材料静强度与疲劳寿命间的定量关系:

$$\sigma_{0N} = \sigma_{\max}[\alpha(1-R)(N^\beta - 1) + 1] \quad (4)$$

式中, σ_{0N} 表示根据疲劳寿命 N 计算得到的材料静强度, 以下简称计算静强度。进一步对上式进行简单的代数变换即可得到考虑应力比影响的应力-寿命 ($S-N$) 曲线表达式:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0[\alpha(N^\beta - 1)(1-R) + 1]^{-1} \quad (5)$$

假设 2: 复合材料试样静强度的分布特性可用两参数威布尔分布描述, 则试样的静强度分布函数为

$$F_{\sigma_0}(\chi) = P(\sigma_0 \leq \chi) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\chi}{\gamma}\right)^\delta\right] \quad (6)$$

式中: P 表示事件概率; χ 表示任意实数; γ 是威布尔分布的尺度参数; δ 是威布尔分布的形状参数。

假设 3: 强度-寿命等秩, 式 (4) 也可证明该假设的合理性, 给定加载条件即最大应力水平和应力比, 则可根据疲劳寿命值反算出试样的静强度值。根据强度-寿命等秩假设, 可推导出试样疲劳寿命的分布函数为

$$F_N(N^*) = 1 - \exp\left\{-\left[\frac{\sigma_{\max}[1 + \alpha(N^{*\beta} - 1)(1-R)]}{\gamma}\right]^\delta\right\} \quad (7)$$

根据上式即可得到给定失效概率 $F(N)$ 的疲劳寿命 N 的计算公式:

$$N^* = \left\{1 + \frac{1}{\alpha(1-R)}\left[\frac{\gamma}{\sigma_{\max}}|\ln(1-F(N^*))|^{1/\delta} - 1\right]\right\}^{1/\beta} \quad (8)$$

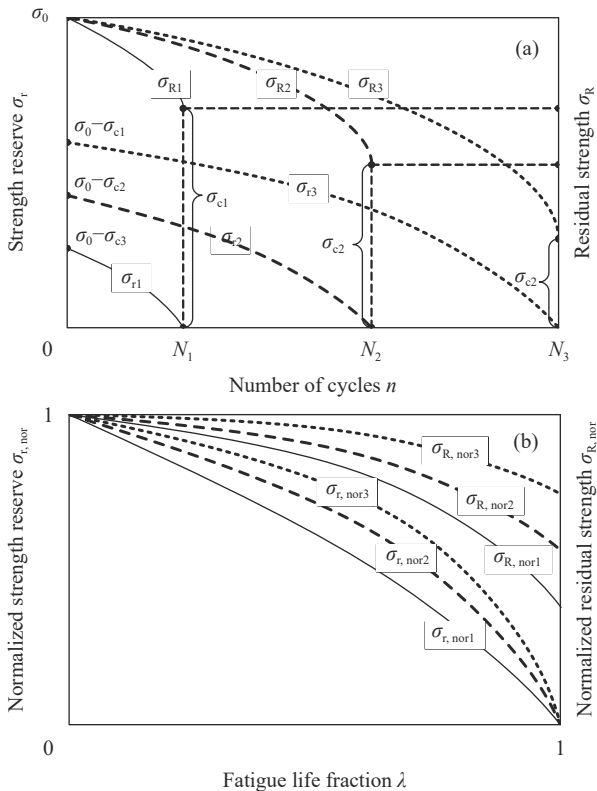
为了在剩余强度模型中计及应力水平效应, 采用了文献 [15] 中的方法, 即利用归一化强度储备模型还原剩余强度表达式, 这里的强度储备和归一化强度储备的概念解释如图 1 所示。

图 1 中 σ_R 和 σ_r 分别表示材料的剩余强度和强度储备, 剩余强度与强度储备间相差一个临界强度 σ_c , 即 $\sigma_r = \sigma_R - \sigma_c$, 根据假设 1, 当材料强度退化至所施加的最大应力水平时, 材料发生失效, 也就是 $\sigma_c = \sigma_{\max}$ 。因此, 当材料发生失效时, 剩余强度将退化至临界强度值, 而强度储备将退化至 0。与归一化剩余强度类似, 归一化强度储备就是某一循环次数下的材料强度储备与初始强度储备 ($\sigma_0 - \sigma_c$) 的比值, 其中的 σ_0 表示材料的静强度。从定义不难看出, 归一化强度储备的定义域和值域都是 $[0, 1]$ 。这里, 选择 Stojković 等^[15] 提出的式 (9) 所示的归一化强度储备模型, 所不同的是式中的疲劳寿命 N 不再是一个定值, 而是一个随机变量:

$$\sigma_{r,n} = \left(1 - \left(\frac{n}{N^*}\right)^\mu\right)^\nu \quad (9)$$

式中: $\sigma_{r,n}$ 表示材料的归一化强度储备; μ 和 ν 表示待定的模型参数。

根据式 (9) 还原试样的剩余强度模型如式 (10) 所示, 通过式 (10) 即可得到给定失效概率的试样强度退化规律。采用归一化强度储备还原剩余强度的优势在于仅用有限个应力水平的试验数据即可预测任意应力水平下的剩余强度的退化规律。



σ_0 —Tensile static strength; σ_c —Critical strength, numerically equal to the peak stress; N —Fatigue life

图 1 归一化强度储备的概念: (a) 剩余强度与强度储备; (b) 归一化剩余强度与归一化强度储备

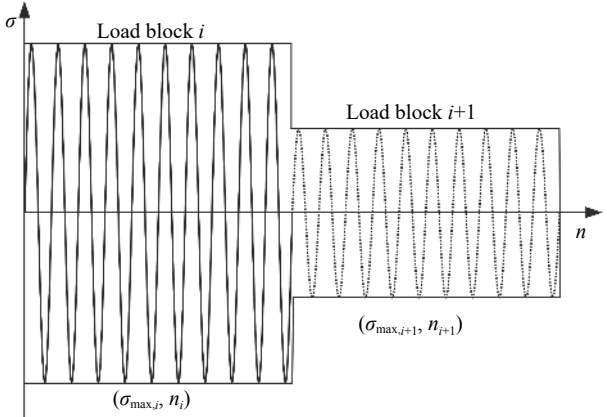
Fig. 1 Concept of normalized strength reserve: (a) Residual strength and strength reserve; (b) Normalized residual strength and normalized strength reserve

$$\sigma_R = \sigma_{\max} + (\sigma_{0,i} - \sigma_{\max}) \left(1 - \left(\frac{n}{N^*} \right)^\mu \right)^\nu \quad (10)$$

1.2 变幅加载下复合材料的剩余强度

复合材料在随机载荷谱下的响应极其复杂, 通过将随机载荷谱等效转换为 i 个应力水平为 $\sigma_{\max,i}$ 、应力比为 R_i 的恒幅载荷块, 是一种简化随机载荷谱的有效手段^[7]。转换后的多幅值载荷块虽然在各自应力水平的载荷块内是恒幅的, 但当从第 i 个载荷块跳跃至第 $i+1$ 个载荷块时, 属于变幅加载, 且存在应力水平升高的升序变幅 (从第 $i+1$ 载荷块到第 i 载荷块) 和应力水平降低的降序变幅 (从第 i 载荷块到第 $i+1$ 载荷块) 两种情况, 如图 2 所示。

对于承受多水平变幅载荷谱的复合材料试样的剩余强度计算方法如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 言简意赅起见, 这里仍以包含两个水平载荷块的载荷谱为例进行说明。首先, 根据式 (10) 所示的剩余强度模型绘制出各自应力水平下 (即 $\sigma_{\max,i}$ 、 R_i 、



$\sigma_{\max,i}$ —Peak stress of the i th load block; $\sigma_{\max,i+1}$ —Peak stress of the $(i+1)$ th load block; n_i —Cycle counts of the i th load block; n_{i+1} —Cycle counts of the $(i+1)$ th load block

图 2 两个连续载荷块的加载示意图

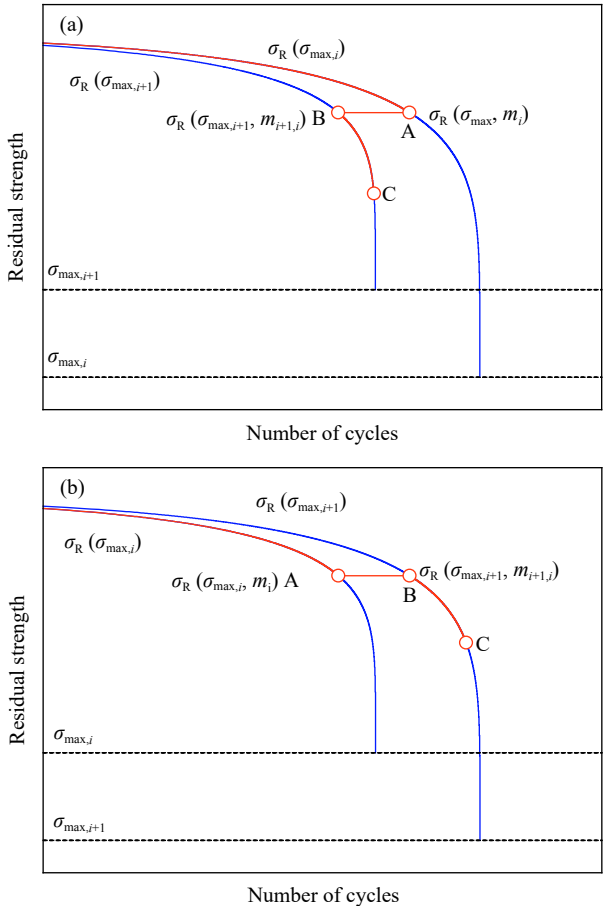
Fig. 2 Loading diagram of two continuous load blocks

n_i 和 $\sigma_{\max,i+1}$, R_{i+1} , n_{i+1}) 的剩余强度退化曲线, 如图 3(a) 和图 3(b) 中细实线所示; 其次, 根据第一个载荷块加载结束时 (图 3(a) 和图 3(b) 中 A 点) 的剩余强度 $\sigma_R(\sigma_{\max,i}, m_i)$ 与第二个载荷块加载开始时的剩余强度 $\sigma_R(\sigma_{\max,i+1}, m_{i+1,i})$ 相等的原则, 求得按第二应力水平加载至该剩余强度值时的等效载荷循环次数 $m_{i+1,i}$, 即可将强度退化过程从第一条剩余强度退化曲线等效转移至第二条剩余强度退化曲线, 进而从 B 点开始, 继续沿第二条退化曲线退化至 C 点。可见, 该变幅转换的本质是利用前一载荷块加载结束时的剩余强度与后一载荷块加载开始时的剩余强度值相等的原则, 将含多个应力水平载荷块的变幅加载效应等效转换到只含一个应力水平的恒幅剩余强度退化曲线上的过程。

这种将试样剩余强度在不同应力水平退化曲线间等效转移退化的变幅处理方式最早是由 Yang 等^[25] 提出, 并被 Broutman 等^[12] 用于变幅加载的试验研究, 从而代替线性 Miner 累加理论。因此, 基于式 (10) 并令两个应力水平下的剩余强度值相等, 则有

$$\sigma_R(m_i) = \sigma_{\max,i} + (\sigma_{0,m} - \sigma_{\max,i}) \left(1 - \left(\frac{m_i}{N_i^*} \right)^\mu \right)^\nu = \sigma_{\max,i+1} + (\sigma_{0,m} - \sigma_{\max,i+1}) \left(1 - \left(\frac{m_{i+1,i}}{N_{i+1}^*} \right)^\mu \right)^\nu = \sigma_R(m_{i+1,i}) \quad (11)$$

式中: $\sigma_R(m_i)$ 表示第 i 个载荷块加载 m_i 次时的剩余强度值; 类似的, $\sigma_R(m_{i+1,i})$ 表示第 $i+1$ 个载荷块加载 $m_{i+1,i}$ 次时的剩余强度值; N_i^* 表示在 $\sigma_{\max,i}$ 加



m_i —Number of stress cycles in the first load block; $m_{i+1,i}$ —Equivalent number of cycles of the first load block m_i in the second load block

图3 变幅加载下的剩余强度退化路径: (a) 低-高 (L-H); (b) 高-低 (H-L)

Fig. 3 Residual strength degradation paths under variable amplitude loading: (a) Low-high (L-H); (b) High-low (H-L)

载条件下, 给定失效概率的疲劳寿命; N_{i+1}^* 表示在 $\sigma_{\max,i+1}$ 加载条件下, 给定失效概率的疲劳寿命; $\sigma_{0,m}$ 表示试样的初始静强度; $m_{i+1,i}$ 表示与第 i 个载荷块产生相同强度退化量时需要第 $i+1$ 个载荷块施加的等效循环次数。根据式 (11) 即可求出等效循环次数 $m_{i+1,i}$:

$$m_{i+1,i} = N^* \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma_R(m_i) - \sigma_{\max,i+1}}{\sigma_{0,m} - \sigma_{\max,i+1}} \right]^{1/\nu} \right\}^{1/\mu} \quad (12)$$

则经过第 i 和 $i+1$ 两个载荷块加载之后试样的剩余强度为

$$\sigma_R(m_{i+1}) = \sigma_{\max,i+1} + (\sigma_{0,m} - \sigma_{\max,i+1}) \left(1 - \left(\frac{m_{i+1}^{\text{tol}}}{N_{i+1}^*} \right)^{\mu} \right)^{\nu} \quad (13)$$

式中, $m_{i+1}^{\text{tol}} = m_{i+1,i} + m_{i+1,0}$ 。

上述恒幅和变幅加载条件下复合材料试样的剩余强度预测方法将分两步进行验证, 首先, 验

证在恒幅加载条件下通过一组模型参数预测多个应力水平下强度退化和模型考虑统计效应的能力; 其次, 验证在变幅值加载条件下模型考虑加载顺序的能力。

1.3 损伤评估准则

工程中最常用的线性损伤累积准则为^[12]

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} \quad (14)$$

而基于剩余强度的疲劳损伤累积模型可定义为每个载荷块加载时的相对强度退化量的总和^[7], 其显示表达式如下:

$$D = \sum_i \left(\frac{\sigma_{R,i} - \sigma_{R,i+1}}{\sigma_0 - \sigma_{\max,i}} \right) \quad (15)$$

2 试验数据

为了验证所提出的恒幅和变幅加载条件下复合材料剩余强度预测方法的可靠性, 采用了 Post 等^[22]公开发表的试验数据。试验所选用的单层材料为 Vetrotex 324 机织粗纱, 基体材料为 Dow Derakane 510 A 乙烯基酯树脂, 并以 [0/+45/90/-45/0]_s 的准各向同性叠层顺序制造成复合材料层压板。Post 等^[22]的研究中涉及的测试包括 20 次静强度拉伸测试 (表 1)、88 次恒幅疲劳测试、189 次剩余强度测试, 限于篇幅, 其余详细试验数据参见文献 [22]。其中, 恒幅疲劳测试在 6 个应力水平下执行, 得到的疲劳寿命跨度可从 900 到 150 万次。而变幅疲劳测试在 22 个应力水平下执行, 载荷总循环次数达到 735 641 次。材料的剩余强度在循环次数达到相应应力水平的疲劳寿命的固定百分比时进行破坏测试, 所采用的固定百分比分别为 10%、30%、50%、60% 及 70%。恒幅疲劳寿

表 1 铺层顺序为 [0/+45/90/-45/0]_s 的 VARTM E-玻璃/乙烯基酯的静拉伸强度^[22]

Table 1 Static tensile strength of VARTM E-glass/vinyl ester with a lay-up sequence of [0/+45/90/-45/0]_s^[22]

Test number	σ_0 /MPa	Test number	σ_0 /MPa
1	338	11	343
2	342	12	333
3	350	13	333
4	333	14	327
5	321	15	323
6	328	16	338
7	326	17	331
8	353	18	332
9	341	19	341
10	332	20	321

命测试和剩余强度测试均在应力比 $R=0.1$ 和加载频率 $f=10\text{ Hz}$ 下执行,一些试样在测试中出现的过早失效问题在此不予考虑。

此外,另外一组来自文献 [26] 的试验数据也被用来验证所提出模型的恒幅与变幅预测能力。试验中选用的单层材料为 T300/934 石墨/环氧树脂,并以 $[0/45/90/-45_2/90/45/0]_2$ 的铺层顺序制造成为复合材料层压板。试验中涵盖了表 2 所示的 25 个试样的拉伸静强度试验、60 个试样的疲劳寿命试验及 3 个应力水平下(即 290 MPa、345 MPa 及 400 MPa)的剩余强度试验。

表 2 铺层顺序为 $[0/45/90/-45_2/90/45/0]_2$ 的 T300/934 石墨/环氧树脂的静拉伸强度^[26]

Table 2 Static tensile strength of T300/934 graphite/epoxy with a lay-up sequence of $[0/45/90/-45_2/90/45/0]_2$ ^[26]

Test number	σ_0/MPa	Test number	σ_0/MPa
1	427.49	14	481.96
2	444.04	15	481.96
3	445.42	16	486.79
4	445.42	17	486.79
5	449.55	18	491.61
6	455.07	19	492.30
7	455.07	20	495.06
8	466.10	21	496.44
9	468.86	22	500.58
10	477.82	23	503.33
11	477.82	24	511.61
12	477.80	25	519.88
13	480.58		

3 模型验证与结果讨论

3.1 VARTM E-玻璃/乙烯基酯复合材料的恒幅剩余强度预测

本节将采用文献 [22] 中的试验数据对第 1.1 节提出的恒幅和第 1.2 节提出的变幅加载下复合材料试样的剩余强度预测方法进行验证。结合式 (8) 和式 (10) 可知,要预测给定失效概率和加载工况下的剩余强度值,共需借助疲劳试验确定 α 、 β 、 γ 、 δ 、 μ 及 ν 这 6 个模型参数。首先,为了确定模型参数 α 和 β ,将文献 [22] 中的静强度试验数据和疲劳寿命数据代入式 (5),并利用最小二乘回归法拟合得到模型参数 $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.1932$, 相应的 $S-N$ 曲线如图 4 所示。

其次,为了得到模型参数 γ 和 δ ,需要将复合材料试样的静强度试验数据代入式 (6) 进行拟合,分别得到威布尔分布的尺度参数值 γ 和形状参数

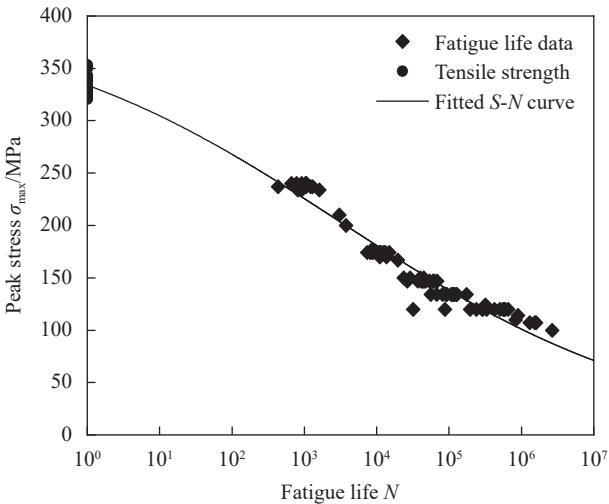


图 4 VARTM E-玻璃/乙烯基酯的应力-寿命 ($S-N$) 曲线^[22]

Fig. 4 Stress-life ($S-N$) curve for VARTM E-glass/vinyl ester^[22]

值 δ 。此处,静强度数据可以通过静拉伸试验测得的试验静强度数据,也可以是根据式 (4) 和疲劳寿命数据计算得到的计算静强度数据,两种数据的威布尔曲线拟合结果如图 5 所示。理论上讲,根据试验静强度和计算静强度拟合得到的两条曲线应该是重合的,而由图 5(a) 亦可看出两者实际不重合,究其根本原因是疲劳测试和静力测试间的加载应变率差异明显且未被考虑^[2]。譬如文献 [22] 中,疲劳测试的加载频率为 10 Hz,应力水平 σ_{\max} 跨度从 100 MPa 到 240 MPa,则应力水平从谷值到峰值的加载时间为 0.05 s,平均加载率的跨度区间为 2 000~4 800 MPa·s⁻¹,进而根据给定的材料刚度为 25 000 MPa,可确定疲劳测试时的平均应变率为 0.08~0.192 s⁻¹。另一方面,静力测试时的加载速率为 667 N·s⁻¹,根据试样的横截面积 (150 mm²) 即可确定平均加载率为 4.45 MPa·s⁻¹,则相应的平均应变率为 1.78×10⁻⁴ s⁻¹。由此可见,静力测试的平均应变率较疲劳测试的平均应变率低了 3 个数量级,进而导致图 5(a) 所示的差异。为了尽可能缩小这种差异的影响,将试验静强度和计算静强度进行合并,并仍然根据式 (6) 拟合得到合并静强度数据的威布尔统计分布,如图 5(b) 所示,相应的模型参数值分别为 $\gamma=340.6$, $\delta=20.99$ 。

最后,为了得到模型参数 μ 和 ν ,需要将各个应力水平下的剩余强度试验数据转化为强度储备数据并进行归一化处理,强度储备 σ_r 与剩余强度 σ_R 间的关系为

$$\sigma_r = \sigma_R - \sigma_{\max,i} \tag{16}$$

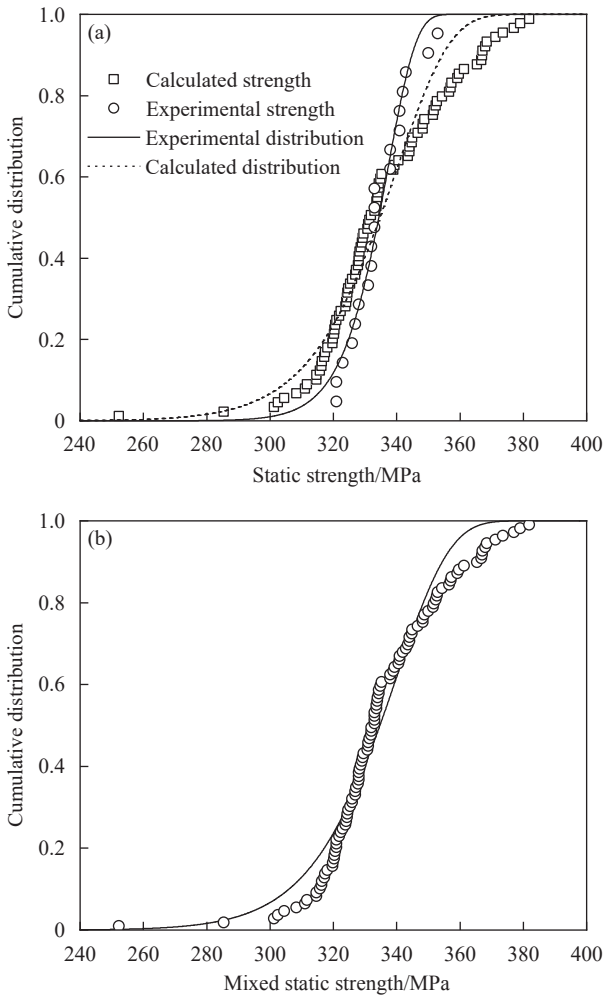
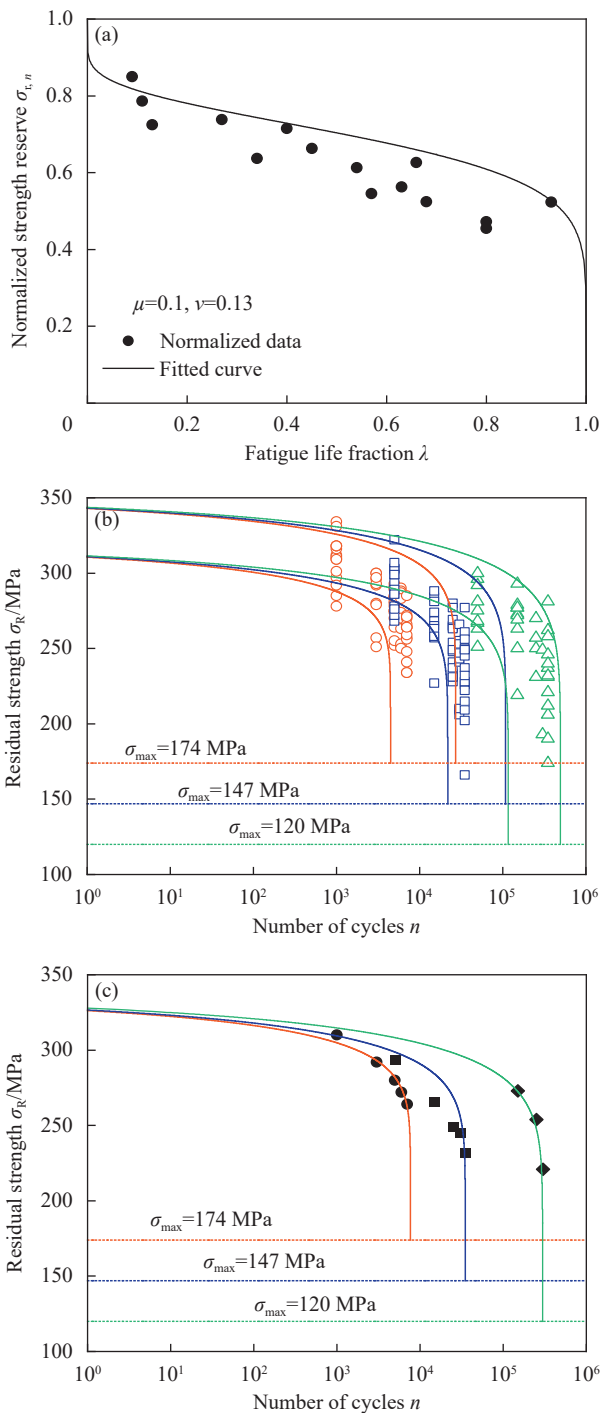


图5 VARTM E-玻璃/乙烯基酯的静强度累积概率分布^[22]:
(a) 试验与计算静强度; (b) 合并静强度

Fig. 5 Cumulative probability distributions of static strength for VARTM E-glass/vinyl ester^[22]: (a) Experimental and calculated static strength; (b) Mixed static strength

进而通过将转化后的 3 个应力水平 (174 MPa、147 MPa 及 120 MPa) 下的强度储备数据拟合到式 (9), 即可得到参数值: $\mu = 0.1$, $\nu = 0.13$ 。将这一组参数代入式 (10) 便可得到剩余强度在整个寿命区间的退化规律, 通过引入归一化强度储备反推剩余强度的优势在于仅用一组模型参数即可确定任意应力水平下的剩余强度退化规律, 大大节约了试验成本。最终的归一化强度储备曲线及 3 个应力水平下的剩余强度退化曲线如图 6(a)~6(c) 所示。

图 6(a) 中, 归一化强度储备曲线的拟合优度为 $R^2 = 0.8031$, 由于用于归一化强度储备拟合的试验数据来自 3 个不同的应力水平, 数据分散性相对单个应力水平更强, 因而导致曲线的拟合优度不高。将归一化强度储备拟合得到的一组模型



$\mu \nu$ -Model parameters for the normalized strength reserve model

图6 模型参数拟合与 VARTM E-玻璃/乙烯基酯的剩余强度预测曲线:
(a) 归一化强度储备拟合曲线与试验数据^[22]; (b) 置信区间为 5%-95% 的剩余强度预测区间与试验数据^[22]; (c) 失效概率为 50% 的剩余强度预测曲线与试验数据^[22]

Fig. 6 Model parameter fitting and residual strength prediction curves for VARTM E-glass/vinyl ester: (a) Normalized strength reserve fitting curve vs. experimental data^[22]; (b) Residual strength prediction band with confidence interval of 5%-95% vs. experimental data^[22]; (c) Residual strength prediction curves with 50% failure probability vs. experimental data^[22]

参数代入 3 个应水平的剩余强度模型，得到了 3 个应力水平的剩余强度预测曲线与试验数据的对比如图 6(b) 所示，图中的上、下限分别对应失效概率为 0.95 和 0.05 时的剩余强度预测曲线，由图 6(b) 可知，几乎所有的试验数据点都准确地散落在置信分布带之内。此外，为了更明确地证明模型的预测精度，给出了在 50% 失效概率下的模型预测曲线与试验数据中值的对比，如图 6(c) 所示，通过给定图 6(a) 中拟合得到的模型参数，采用最小二乘法进行拟合计算得到 3 个应力水平下(即 174、147 及 120 MPa) 的拟合优度 R^2 分别为 0.94、0.84 及 0.97。因此，可以认为所提出模型仅用一组模型参数即可准确地刻画 3 个应力水平下试样剩余强度的退化规律，证明了模型独立于应力水平及预测强度退化过程的能力。

3.2 T300/934 石墨/环氧树脂与 VARTM E-玻璃/乙烯基酯复合材料的变幅剩余强度预测

3.2.1 算例 1: T300/934 石墨/环氧树脂

基于文献 [26] 的试验数据并遵循与 3.1 节相同的验算流程，结果同样表明所提出模型具有应力水平独立性和表征剩余强度统计特性的能力，限于篇幅，这部分内容不再详述。根据表 3 所示的变幅加载方案，依据式 (10)~(15) 对变幅加载工况

下的剩余强度及疲劳损伤进行预测，图 7 和图 8 表示两个应力水平和 3 个应力水平的降序和升序变幅加载剩余强度的预测情况，进而计算出各自工况下的疲劳累积损伤，并与采用文献 [7] 中的方法和线性累积损伤理论计算得到的损伤值进行比较，结果如表 3 所示。可知，根据文献 [7] 的方法计算的累积损伤值明显高于线性累积损伤值，而根据式 (15) 计算得到的累积损伤值明显低于线性累积损伤值。这是由于文献 [7] 的剩余强度模型并不完全遵循强度的“突然死亡”特征，该强度退化模型的最后阶段仍然是较平缓的衰退曲线，甚至在强度退化至接近临界强度值时，退化曲线还有渐进水平的趋势。这样的模型特征导致了强度退化中间阶段的退化量较显著，因而该模型预测的累积损伤值偏高。工程中应用最为广泛的线性累积损伤理论是一种非常保守的理论，而模型的过于保守必然导致结构设计中强度过剩和材料浪费。因此，基于强度退化的损伤模型应准确且相对保守地预测结构的疲劳累积损伤，从而在结构设计阶段保证结构强度的同时，最大程度地实现结构轻量化。由此可知，基于强度退化的疲劳累积损伤预测值小于线性累积损伤值是更合理的预测结果。

表 3 T300/934 石墨/环氧树脂的非线性累积损伤与线性累积损伤的对比^[7]

Table 3 Non-linear cumulative damage of T300/934 graphite/epoxy in comparison to linear cumulative damage ^[7]									
	σ_1	σ_2	σ_3	n_1	n_2	n_3	Ref. ^[7]	Eq.(14)	Eq.(15)
H-L	345	290	—	20 000	40 000	—	0.76	0.63	0.45
L-H	290	345	—	40 000	20 000	—	0.67	0.63	0.50
H-L	400	345	290	4 000	8 000	20 000	0.86	0.62	0.48
L-H	290	345	400	20 000	8 000	4 000	0.70	0.62	0.46

Notes: σ_1 —Peak stress of the first loading; σ_2 —Peak stress of the second loading; σ_3 —Peak stress of the third loading; n_1 —Number of cycles for the first loading; n_2 —Number of cycles for the second loading; n_3 —Number of cycles for the third loading.

由表 3 亦可知两个应力水平的变幅加载工况中，升序加载造成的损伤 0.5 大于降序加载造成的损伤 0.45，而在 3 个应力水平的变幅加载工况中，升序加载造成的损伤 0.46 小于降序加载造成的损伤 0.48。因此，升序和降序变幅加载工况对复合材料结构损伤累积的影响大小并没有统一的规律，就像 Paapegem 等 [24] 所述，“当从文献中考究变幅这个主题时，仅仅能够得出一个统一的结论：升序和降序加载哪种加载方式对复合材料疲劳寿命的影响更显著是没有统一论的”。

此外，在当前算例中，即仅有两到三级应力

水平加载的情况下，单纯的升序和降序加载对复合材料试样寿命的影响并不显著，若考虑到强度的分散性，则单调变幅加载顺序对复合材料试样寿命的影响可以忽略，这也与 Post 等 [22] 等的观点相一致。

3.2.2 算例 2: VARTM E-玻璃/乙烯基酯

为了使试验中的变幅载荷更加符合实际工况，Post 等 [22] 最初选择了 30 个应力水平，总的疲劳测试循环次数将达到 99 999 998 次，能以接近真实的载荷工况测试 30 年寿命的长寿命结构。而考虑到测试时间的合理性，研究者将 30 个应力水平降

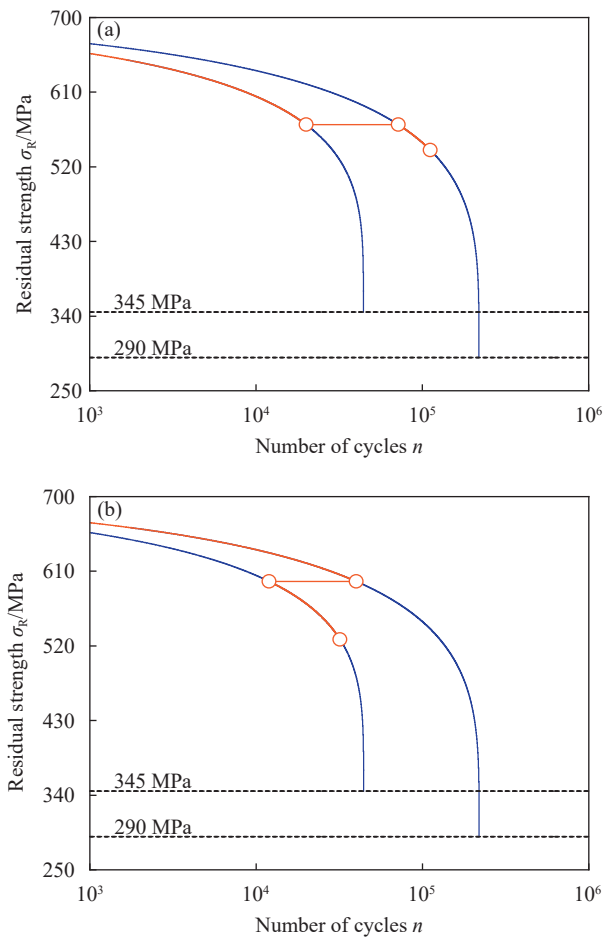


图7 二级应力水平变幅加载的 T300/934 石墨/环氧树脂剩余强度预测: (a) 高-低; (b) 低-高

Fig. 7 Residual strength prediction of T300/934 graphite/epoxy under variable amplitude loading containing 2 stress levels: (a) H-L; (b) L-H

低至 22 个, 相应的总载荷循环次数降低至 735 641 次, 具体应力水平及相应的载荷循环次数见表 4。

取失效概率为 50% 和 5%, 根据式 (11)~(13) 的变幅剩余强度预测方法, 得到升序和降序变幅加载下的归一化剩余强度退化曲线分别如图 9(a) 和图 9(b) 所示, 并与相应的试验结果进行对比。

图 9(a) 中的 2 条实线表示失效概率为 50% 时的变幅剩余强度预测曲线, 升序加载时, 模型预测剩余强度值为 272 MPa, 试验中值为 289 MPa, 相对误差为 5.9%; 降序加载时, 模型预测剩余强度值为 278 MPa, 试验中值为 285 MPa, 相对误差为 2.5%。同理, 图 9(b) 中的 2 条实线表示失效概率为 5% 时的变幅剩余强度预测曲线, 升序加载时, 模型预测剩余强度值为 255 MPa, 试验最小值为 260 MPa, 相对误差为 2%; 降序加载时, 模型预测剩余强度值为 257 MPa, 试验最小值为

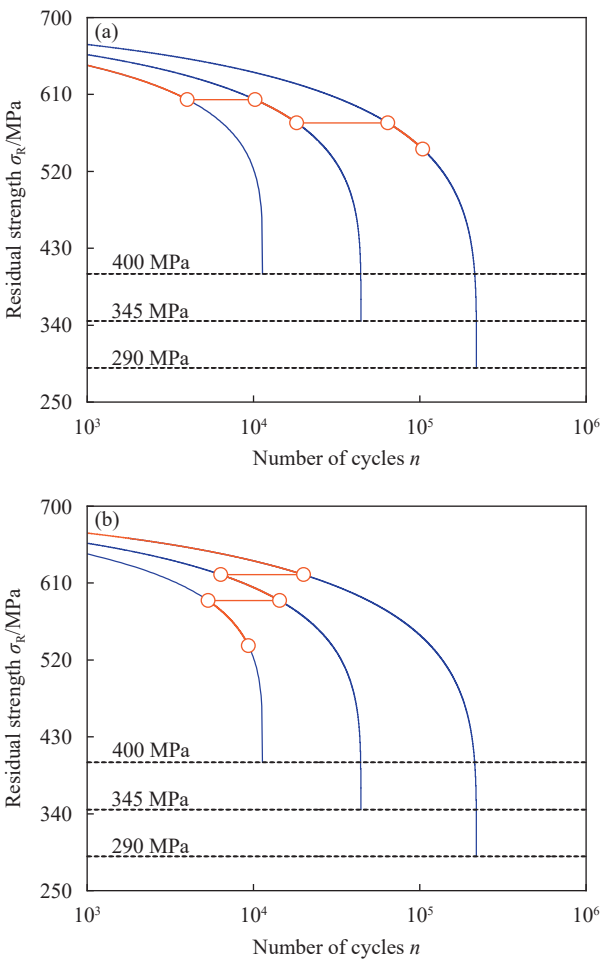


图8 三级应力水平变幅加载的 T300/934 石墨/环氧树脂剩余强度预测: (a) 高-低; (b) 低-高

Fig. 8 Residual strength prediction of T300/934 graphite/epoxy under variable amplitude loading containing 3 stress levels: (a) H-L; (b) L-H

表 4 VARTM E-玻璃/乙烯基酯的变幅测试载荷谱^[22]

Table 4 Load spectra for variable amplitude testing of VARTM E-glass/vinyl ester^[22]

Load cycle	Stress/MPa	Load cycle	Stress/MPa
337 535	74	394	157
182 664	81	213	150
98 852	88	115	164
53 496	95	62	170
28 950	102	34	177
15 667	109	18	183
8 478	116	10	190
4 588	123	5	196
2 483	130	3	203
1 344	144	2	209
727	137	1	216

262 MPa, 相对误差为 1.9%。由此可见, 当可靠度选择为 50% 时, 所提出模型在升序与降序变幅加载中的预测值与试验值的相对误差不超过 6%;

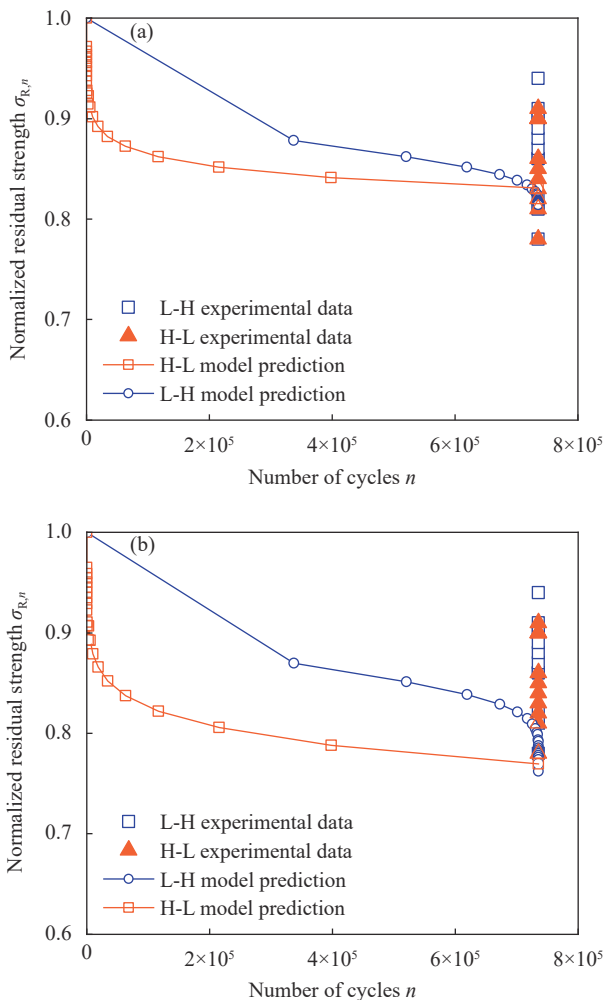


图9 22级应力水平加载的 VARTM E-玻璃/乙烯基酯剩余强度预测曲线与试验数据^[22]: (a) 50% 失效概率的剩余强度预测; (b) 5% 失效概率的剩余强度预测

Fig. 9 Residual strength prediction curves of VARTM E-glass/vinyl ester for 22 stress level loading vs. experimental data^[22]: (a) Residual strength prediction for 50% probability of failure; (b) Residual strength prediction for 5% probability of failure

当可靠度选择为 5% 时, 所提出模型在升序与降序变幅加载中的预测值与试验值的相对误差不超过 2%, 两种可靠度下的预测结果都足够准确, 且在当前算例中所给定的可靠度越高, 模型的预测误差越小。另外, 两个加载顺序下的模型预测误差都处于试验值的保守侧, 既避免了模型预测过于保守而明显增加材料成本的问题, 又足够精确地预测了变幅加载工况下复合材料试样的强度退化。

以上算例验证中所涉及的模型参数如表 5 所示。值得一提的是, 虽然所提出的模型在恒幅和变幅加载工况下都有较准确的预测结果, 但仍然存在以下两个不足: 首先, 在处理计算静强度和试验静强度的差异性问题时, 选择了将两组数据

合并的处理方法, 但从本质上来讲, 两组数据存在差异是由于静力测试和疲劳测试间的应变率存在明显差异, 当前研究中的处理方法并未考虑应变率效应。其次, 对所提模型的变幅预测能力进行验证时, 仅仅考虑了升序和降序两种情况, 实际工况下的应力水平是随机变化的, 即应力水平不仅仅是单调升高和降低, 应力水平非单调变化的变幅预测在本文中并未涉及。

表 5 两个算例 (VARTM E-玻璃/乙烯基酯和 T300/934 石墨/环氧树脂) 涉及的模型参数

Table 5 Model parameters involved in the two cases (VARTM E-glass/vinyl ester and T300/934 graphite/epoxy)

	α	β	γ	δ	μ	ν
Case 1	0.0544	0.1730	490	20	0.2	0.25
Case 2	0.1909	0.1932	340.6	20.99	0.1	0.13

Notes: α , β —Model parameters of the S-N curve; γ —Scale parameter of the Weibull distribution of static strength; δ —Shape parameter of the Weibull distribution of static strength.

4 结论

(1) 试验静强度与计算静强度的威布尔统计分布存在明显差异的原因是静力测试和疲劳测试时的应变率相差过大, 经简单估算表明: 疲劳试验较静力试验的加载应变率高出 3 个数量级。

(2) 通过归一化强度储备还原剩余强度的方法能够仅用一组模型参数去预测任意应力水平下的剩余强度。算例验证表明, 几乎所有试验数据点都分布在由 95% 置信上限和 5% 的置信下界限定的剩余强度分布带之内, 且 50% 可靠度下的预测曲线与试验数据间具有高拟合优度值 (R^2 值分别为 0.94、0.84 及 0.97), 这都证明了所提出模型能在显著降低模型参数依赖性的同时, 准确地刻画试样的剩余强度退化过程。

(3) 若考虑强度的分散性, 在仅有两到三级应力水平加载的情况下, 单调变幅加载顺序 (即单调升序与单调降序) 对复合材料试样寿命的影响可以忽略不计。

(4) 在对 22 个应力水平载荷块的变幅加载预测中, 当选择可靠度为 50% 时, 升序加载剩余强度预测值与试验数据的相对误差为 5.9%, 降序加载剩余强度预测值与试验数据的相对误差为 2.5%; 当选择可靠度为 95% 时, 升序加载剩余强度预测值与试验数据的相对误差为 2%, 降序加载剩余强

度预测值与试验数据的相对误差为 1.9%。因此, 所提出模型在升序与降序变幅加载中的预测值与试验值的相对误差均不超过 6%, 预测结果足够准确, 且预测精度随着可靠度的增加而有所提高。

参考文献:

- [1] SHABANI P, TAHERI-BEHROOZ F, SAMAREH-MOUSA V S, et al. Very high cycle and gigacycle fatigue of fiber-reinforced composites: A review on experimental approaches and fatigue damage mechanisms[J]. *Progress in Materials Science*, 2021, 118: 100762.
- [2] 吴涛, 姚卫星, 黄杰. 纤维增强树脂基复合材料超高周疲劳研究进展[J]. *材料导报*, 2022, 36(6): 214-222.
WU Tao, YAO Weixing, HUANG Jie. Recent development of research on very high cycle fatigue of fiber reinforced plastic[J]. *Materials Reports*, 2022, 36(6): 214-222(in Chinese).
- [3] 程小全, 杜晓渊. 纤维增强复合材料疲劳寿命预测及损伤分析模型研究进展[J]. *北京航空航天大学学报*, 2021, 47(7): 1311-1322.
CHEN Xiaoquan, DU Xiaoyuan. Research development of fatigue life prediction and damage analysis model of fiber-reinforced composite[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2021, 47(7): 1311-1322(in Chinese).
- [4] WU F Q, YAO W X. A fatigue damage model of composite materials[J]. *International Journal of Fatigue*, 2010, 32(1): 134-138.
- [5] 李顶河, 李梁轶, 郭巧荣, 等. 基于离散损伤模型的复合材料双悬臂梁分层疲劳扩展分析[J]. *复合材料学报*, 2022, 39(7): 3603-3615.
LI Dinghe, LI Liangyi, GUO Qiaorong, et al. Fatigue delamination analysis of composite double cantilever beams based on discrete damage zone model[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2022, 39(7): 3603-3615(in Chinese).
- [6] HUANG J Z, GUO L C, CHEN L L, et al. Damage evolution of 3D woven carbon/epoxy composites under the tension-compression fatigue loading based on multi damage information[J]. *International Journal of Fatigue*, 2022, 154: 106566.
- [7] D'AMORE A, GRASSIA L. A method to predict the fatigue life and the residual strength of composite materials subjected to variable amplitude (VA) loadings[J]. *Composite Structures*, 2019, 228: 111338.
- [8] 高建雄, 安宗文, 白学宗. 随机载荷下风电叶片复合材料剩余强度概率模型[J]. *太阳能学报*, 2018, 39(8): 2169-2175.
GAO Jianxiong, AN Zongwen, BAI Xuezhong. Probabilistic model of residual strength of composite materials for wind turbine blades under random load[J]. *Acta Energiae Solaris Sinica*, 2018, 39(8): 2169-2175(in Chinese).
- [9] D'AMORE A, GIORGIO M, GRASSIA L. Modeling the residual strength of carbon fiber reinforced composites subjected to cyclic loading[J]. *International Journal of Fatigue*, 2015, 78: 31-37.
- [10] MA H D, MA Q, BAI X Z, et al. A material property degradation model of composite laminates considering stress level[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, 30(2): 272-283.
- [11] CHOU P C, CROMAN R. Residual strength in fatigue based on the strength-life equal rank assumption[J]. *Journal of Composite Materials*, 1978, 12(2): 177-194.
- [12] BROUTMAN L, SAHU S. A new theory to predict cumulative fatigue damage in fiber glass reinforced plastics[M]. West Conshohocken: ASTM International, 1972: 170-188.
- [13] FANG G W, GAO X G, ZHANG S, et al. A residual strength model for the fatigue strengthening behavior of 2D needled CMCs[J]. *International Journal of Fatigue*, 2015, 80: 298-305.
- [14] GANESAN C, JOANNA P. Modeling the residual strength and fatigue life of carbon fiber composites under constant amplitude loading[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, 27(21): 1840-1848.
- [15] STOJKOVIĆ N, FOLIĆ R, PASTERNAK H. Mathematical model for the prediction of strength degradation of composites subjected to constant amplitude fatigue[J]. *International Journal of Fatigue*, 2017, 103: 478-487.
- [16] 赵晟, 张继文. 一种基于复合材料剩余强度的衍生疲劳损伤模型[J]. *复合材料学报*, 2020, 37(10): 2473-2481.
ZHAO Sheng, ZHANG Jiwen. A derivative fatigue damage model based on residual strength of composite[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2020, 37(10): 2473-2481(in Chinese).
- [17] HALPIN J C, JOHNSON T A, WADDOUPS M E. Kinetic fracture models and structural reliability[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1972, 8(4): 465-468.
- [18] TSERPES K I, PAPANIKOS P, LABEAS G, et al. Fatigue damage accumulation and residual strength assessment of CFRP laminates[J]. *Composite Structures*, 2004, 63(2): 219-230.
- [19] PASSIPOULARIDIS V A, PHILIPPIDIS T P. Strength degradation due to fatigue in fiber dominated glass/epoxy composites: A statistical approach[J]. *Journal of Composite Materials*, 2009, 43(9): 997-1013.
- [20] SHOKRIEH M M, LESSARD L B. Multiaxial fatigue behaviour of unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments—I. Modelling[J]. *International Journal of Fatigue*, 1997, 19(3): 201-207.

[21] POST N L, CASE S W, LESKO J J. Modeling the variable amplitude fatigue of composite materials: A review and evaluation of the state of the art for spectrum loading[J]. [International Journal of Fatigue](#), 2008, 30(12): 2064-2086.

[22] POST N, CAIN J, MCDONALD K, et al. Residual strength prediction of composite materials: Random spectrum loading[J]. [Engineering Fracture Mechanics](#), 2008, 75(9): 2707-2724.

[23] VASSILOPOULOS A, NIJSSEN R. Fatigue life prediction of composite materials under realistic loading conditions (variable amplitude loading)[M]//Fatigue life prediction of composites and composite structures. Second Editon. Sawston: Woodhead Publishing, 2010: 293-333.

[24] PAEPEGEM W V, DEGRIECK J. Effects of load sequence and block loading on the fatigue response of fiber-reinforced composites[J]. [Mechanics of Advanced Materials and Structures](#), 2002, 9(1): 19-35.

[25] YANG J, JONES D. Load sequence effects on the fatigue of unnotched composite materials[J]. [Fatigue of Fibrous Composite Materials](#), 1981, 723: 213-232.

[26] RYDER J, WALKER E. Ascertainment of the effect of compressive loading on the fatigue lifetime of graphite epoxy laminates for structural applications[R]. Burbank: Lockheed-California co Burbank Rye Canyon Research Lab, 1976.