

基于广义混合有限元的压电复合材料层合板的数值分析

王聿航 卿光辉

Analysis of piezoelectric composite laminates based on generalized mixed finite element

WANG Yuhang, QING Guanghui

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20210707.003>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于Layerwise理论的压电复合材料层合圆柱壳机电耦合有限单元

A coupled finite element method for composite laminated cylindrical shells with piezoelectric layers using Layerwise theory

复合材料学报. 2020, 37(2): 366–375 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20190529.002>

基于气体基压电复合材料的线聚焦空耦超声传感器研制与应用

Design and application of line-focus air-coupled ultrasonic transducer based on air-based piezoelectric composites

复合材料学报. 2018, 35(3): 653–660 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20170601.008>

基于弹性-黏弹性对应原理的复合材料层合板模态阻尼预测：理论及其有限元实现

Modal damping prediction of laminated composites using elastic-viscoelastic correspondence principle: Theory and finite element implementation

复合材料学报. 2017, 34(7): 1478–1488 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20161028.001>

基于ANSYS的复合材料螺旋桨叶片有限元建模与分析

Finite element modeling and analysis of composite propeller blade based on ANSYS

复合材料学报. 2017, 34(4): 819–826 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20160712.001>

扩展有限元方法与内聚力模型耦合下斜接修补复合材料的胶层损伤和缺陷

Adhesive damage and defect analysis of scarf-repaired composite by combining extended finite element method and cohesive zone model

复合材料学报. 2018, 35(5): 1354–1360 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20170807.001>

有限元法研究填料形貌与介电常数对无机/有机介电复合材料介电性能的影响

Computational study of both morphologies and dielectric constant of fillers on dielectric properties of inorganic/organic dielectric composites by finite element method

复合材料学报. 2019, 36(12): 2887–2893 <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20190416.003>

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20210707.003

基于广义混合有限元的压电复合材料层合板的数值分析



分享本文

王聿航, 卿光辉*

(中国民航大学 航空工程学院, 天津 300300)

摘要: 将纯弹性体的广义混合有限元法引入到压电材料的静力学分析中。由于采用了 8 节点六面体非协调实体单元对整体结构进行离散求解, 摒弃了板壳理论中的诸多人为假设。非协调项的加入使该方法比同类协调元显示出更好的数值性能。本文方法将应力边界条件和位移边界条件同时考虑, 并且求解过程中将层间应力和平面内应力分开处理, 按每层的本构关系求解平面内应力, 这样求得的层间应力和平面内应力都更加接近精确解。通过几个有代表性的层合板的数值算例说明了本文方法的精度, 相较于传统的解析法和数值法, 本文方法在适用性和有效性方面都具有优势。

关键词: 压电复合材料; 层合板; 广义混合有限元; 非协调; 机电耦合

中图分类号: O343.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2022)06-2987-10

Analysis of piezoelectric composite laminates based on generalized mixed finite element

WANG Yuhang, QING Guanghui*

(College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: Generalized mixed finite element method of pure elastomer was introduced into the static analysis of piezoelectric materials. Because the 8-node hexahedral noncompatible solid element was used to solve the whole structure discretely, many artificial assumptions in the theory of plate and shell were abandoned. The addition of noncompatible terms makes this method exhibit better numerical performance than the same kind of compatible elements. In this method, the stress boundary conditions and displacement boundary conditions were considered simultaneously, and the interlaminar stress and in-plane stress were treated separately in the solution process, and the in-plane stress was calculated according to the constitutive relation of each layer, so that the obtained interlaminar stress and in-plane stress are closer to the exact solution. The accuracy of the proposed method was illustrated by several representative numerical examples of laminates. Compared with the traditional analytical and numerical methods, the theoretical method presented in this paper has advantages in applicability and effectiveness.

Keywords: piezoelectric composite; laminated plates; generalized mixed finite element; noncompatible; coupling of mechanics and electricity

近年来, 以智能复合材料层合板为代表的自适应结构具有极大的应用潜力。智能复合材料层合板是在传统复合材料层合板中引入智能材料, 使结构集承载和作动/传感功能于一体。分析压电复合材料层合板损伤失效的关键是建立其机电耦合模型。学者们在这方面进行了大量的理论研究。

计算机技术的发展推动了以有限元为代表的数值技术的发展。很多学者使用有限元方法分析了这些层合板的动力响应, 他们的注意力集中在位移控制和振动抑制上。相比之下, 对压电层合板的应力和强度分析只做了有限的工作。压电层合板通常具有相对较低的横向刚度, 并且容易分层。

收稿日期: 2021-05-11; 修回日期: 2021-06-21; 录用日期: 2021-06-30; 网络首发时间: 2021-07-07 16:43:36
网络首发地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20210707.003>
基金项目: 国家自然科学基金 (11502286)
通信作者: 卿光辉, 博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向为广义混合有限元理论与方法、复合材料结构与修理 E-mail: ghqing@cauc.edu.cn
引用格式: 王聿航, 卿光辉. 基于广义混合有限元的压电复合材料层合板的数值分析 [J]. 复合材料学报, 2022, 39(6): 2987-2996.
WANG Yuhang, QING Guanghui. Analysis of piezoelectric composite laminates based on generalized mixed finite element [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2022, 39(6): 2987-2996(in Chinese).

此外机电耦合效应可能会使层间应力显著增加进而导致分层,使压电系统失效。从20世纪70年代起,人们提出了许多关于分析此类结构的有限元模型。本文在文献[1]的基础上,将纯弹性体的广义混合有限元法,引入到压电材料的静力学分析中。Benjeddou^[2]对压电有限元的发展进行了综述,包括基本方程、实体单元模型、壳单元模型、板单元模型和梁单元模型等内容。Reddy^[3]针对压电复合材料层合板提出了基于经典薄板理论和三阶剪切变形理论的理论方程和有限元列式。Detwiler等^[4]通过假设电势沿板厚为线性分布,且在单元内保持为常量,将四边形4节点Mindlin板元用来分析压电复合材料层合板。Sheikh等^[5]提出了一个采用混合理论的四边形9节点单元,结构变形采用一阶剪切变形理论,而电势沿厚度的分布采用叠层理论。Carrera等^[6-7]进行了有限元和高级有限元的混合分析,分析了压电叠层板和夹层板的静、动态特性。Vidal等^[8]通过引入经典的四边形八节点有限元来描述面内的未知数,采用变量分离法来模拟压电层合板的静态响应。Plagianakos等^[9]开发了一种专注于压电板中层分层的单元。该单元显示出总体良好的性能,但在预测层合板外表面的层间应力方面略有误差。Korayem等^[10]利用改进的耦合应力理论建立了一个半解析模型,以研究压电叠层微悬臂板的静态和自由振动特性。Kpeky等^[11]提出了两种用于压电分析的混合固体壳单元,结果表明这些单元的精度和收敛速度均优于ABAQUS单元。Moleiro等^[12]提供了使用最小二乘公式的两种分层混合模型:模型A和模型B,对压电复合材料层合板进行了静力分析,其预测能力效果明显。Zenkour等^[13]提出了一种分析压电材料功能梯度板变形和应力的方法,位移分量采用四参数剪切变形板理论。Ramegowda等^[14]开发了一种新的耦合算法,利用壳单元和固体单元分别模拟结构场和电场,分析压电双晶片执行器和传感器中的机电耦合。Li等^[15]基于Reddy的分层位移理论,用三维层向理论表示位移场和电势,然后用哈密顿原理和变分法建立了有限元模型。Kapuria等^[16]基于位移的三阶锯齿形近似理论和电势沿厚度分段二次变化的假设,提出了一个多场有限元模型。该模型采用了具有四个物理节点和一个电节点的小平面壳单元,用于精确分析装有压电片致动器和传感器的智能复合材料和夹层壳体。状态空间法等三

维解析理论没有对场变量(位移 u 、电势 ϕ 、应力 σ)在厚度上的变化做特别的假设,解析求解了压电材料的运动方程、电荷平衡方程、本构方程、应变-位移关系和电场-电势关系,所有位置均满足边界条件和层间界面连续条件。然而,解析精确解仅能在少数特定的几何和边界条件下得到,不过这种精确解可以用来验证各种数值方法的正确性。基于位移的有限元单元很难模拟复合材料系统,由于它们不能考虑顶面和底面上的表面力零值条件以及层间应力的连续性要求。而传统的混合元系数矩阵主对角线上存在零元素,容易出现数值震荡。国内有团队几年前就在做通过修正后的H-R混合变分原理,利用Mathematica软件编程进行复合材料结构的数值计算。诸如Qing等^[1]将最小势能原理与Hellinger-Reissner(H-R)混合变分原理结合起来导出了广义H-R混合变分原理并将其成功应用于纯弹性材料,该混合法不使用任何稳定单元技术。刘艳红等^[17]将弹性材料的广义H-R变分原理扩展为热弹性材料的广义H-R变分原理,并加之以修正,建立了含参数的非协调单元。赵直钦^[18]运用经过修正的广义H-R变分原理建立的非协调单元对压电、压磁材料进行了研究。他们的工作为本文的工作奠定了一定的基础。

在层合压电结构中存在着结构场与电场的耦合关系,其控制方程中包含机械量和电学量,同时复合材料基体和压电材料的各向异性及材料层交错铺设所造成的结构不均匀性和不连续性,导致对压电复合材料混合层合板的建模具有难度。本文所发展的理论对压电层合复合材料中力学量的非均匀性和电势的非均匀性能进行有效的模拟,同时也能避免传统混合元的数值震荡问题,对层间应力和平面内应力具有良好的计算效果。

1 机电耦合的变分原理

1.1 基本方程

压电介质中,耦合力场和电场的线性本构方程为

$$\sigma = C\varepsilon - eE$$

$$D = e^T \varepsilon + \kappa E \quad (1)$$

式中: $\sigma=[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}]^T$ 为应力分量; $D=[D_x, D_y, D_z]^T$ 为电位移分量; $\varepsilon=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}]^T$ 为应变分量; $E=[E_x, E_y, E_z]^T$ 为电场强度分量; C 为压电弹性体的刚度系数矩阵; e 是压电常数矩阵; κ 是介电常数矩阵。

正交各向异性材料的刚度系数矩阵、压电常数矩阵、介电常数矩阵如下：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

几何方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{5}$$

电场强度和电势的关系为

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{6}$$

式中， ϕ 为电势。

考虑极化方向为 z 轴的压电复合材料层合板，即极化方向为沿板厚方向，通过对式(1)进行行列变换，将压电复合材料层合板的层间应力和平面内应力分开来写：

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\varepsilon}_0 \\ \mathbf{\varepsilon}_i \end{Bmatrix} \tag{7}$$

式中：

$$\mathbf{p}_0 = [\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z, D_z]^T;$$

$$\mathbf{p}_i = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, D_x, D_y]^T;$$

$$\mathbf{\varepsilon}_0 = [\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_z, -E_z]^T;$$

$$\mathbf{\varepsilon}_i = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, -E_x, -E_y]^T;$$

将电势类比为广义位移 $\mathbf{u}=[u,v,w,\phi]^T$ ，将电流类比为广义应力 $\mathbf{\bar{\sigma}}=[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}, D_x, D_y, D_z]^T$ 。

1.2 有限元控制方程

在弹性理论中，有一类应用比较广泛的含二类变量的混合变分原理—H-R混合变分原理，现在将其改进形成广义混合变分原理，并将其应用

于压电复合材料层合板中。

不考虑体积力的H-R变分原理泛函为

$$\Pi_{HR} = \int_e \left[-\frac{1}{2} \mathbf{\bar{\sigma}}^T \mathbf{S} \mathbf{\bar{\sigma}} + \mathbf{\bar{\sigma}}^T \nabla \mathbf{u} \right] dV - \int_{s_\sigma} \mathbf{\bar{T}}^T \mathbf{u} dS \tag{8}$$

式中： V 和 s_σ 分别为系统的体积和外载作用的表面积； $\mathbf{\bar{T}}=[\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z]^T$ 为外载。

广义混合变分原理泛函形式为

$$\begin{aligned} \Pi_{GHR} &= \Pi_{HR} + \\ &\alpha \int_e \left[\frac{1}{2} \mathbf{\bar{\sigma}}^T \mathbf{S} \mathbf{\bar{\sigma}} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{C}} \nabla \mathbf{u} - \mathbf{\bar{\sigma}}^T \nabla \mathbf{u} \right] dV \end{aligned} \tag{9}$$

式中： ∇ 为 9×4 的微分操作算子矩阵； $\tilde{\mathbf{C}}$ 为 9×9 的材料刚度矩阵； $\mathbf{S}$ 为其柔度矩阵。

参数 α 的取值范围为 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。当 $\alpha=0$ 时，式(9)就变成了H-R混合变分原理， $\alpha=1$ 时，式(9)就变成了最小势能原理。当 $\alpha=1/2$ 时，式(9)就转化为最简单的广义混合变分原理。

对式(8)进一步化简可得：

$$\begin{aligned} \Pi_{GHR} &= \frac{1}{2} (\alpha - 1) \int_e \mathbf{\bar{\sigma}}^T \mathbf{S} \mathbf{\bar{\sigma}} dV + (1 - \alpha) \int_e \mathbf{\bar{\sigma}}^T \nabla \mathbf{u} dV + \\ &\frac{\alpha}{2} \int_e (\nabla \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{C}} \nabla \mathbf{u} dV - \int_{s_\sigma} \mathbf{\bar{T}}^T \mathbf{u} dS \end{aligned} \tag{10}$$

运用8节点六面体非协调单元对压电复合材料层合板进行网格划分。非协调模式加在单元内部，增加了位移自由度的个数，从而有利于消除在弯曲载荷作用下单元体产生的剪切自锁现象。对二、三维等参协调元引入非协调函数，能明显地改善单元的数值性能。

将非协调元的位移写成以下形式：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_\lambda \tag{11}$$

式中： $\mathbf{u}_q$ 是协调项； $\mathbf{u}_\lambda$ 是非协调项。

对于8节点实体单元而言，位移的协调部分和应力可以分别用相同的形函数插值表示：

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{N}_u \mathbf{q}_e \tag{12}$$

$$\mathbf{\bar{\sigma}} = \mathbf{N}_\sigma \mathbf{p}_e \tag{13}$$

非协调项可以写为

$$\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda \mathbf{\lambda}_e \tag{14}$$

由于8节点六面体单元的协调项形函数是统一的，这里只给出非协调项的形函数。选取单元内部3个节点构造非协调项，非协调项^[19]的形函数为

$$\mathbf{N}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_\lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_\lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{N}_\lambda^* \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$N_{\lambda}^* = ([\xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2] - [\xi \quad \eta \quad \zeta](P^*)^{-1}P) \quad (16)$$

$$P^* = \int_e J^{-1} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (17)$$

$$P = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (18)$$

式中, J 为 Jacobi 矩阵。

在有限元模型中, 几何边界条件常用协调位移插值函数 u_q 来限制, 应力边界条件上的已知载荷将移植到节点载荷上。

将式 (11)~(14) 代入式 (10) 中得到:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{GHR}}(p_e, q_e, \lambda_e) = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (\alpha - 1) p_e^T K_{ss}^{(i)} p_e + \right. \\ & (1 - \alpha) p_e^T K_{sd}^{(i)} q_e + (1 - \alpha) p_e^T K_{sl}^{(i)} q_e + \\ & \frac{\alpha}{2} q_e^T K_{dd}^{(i)} q_e + \frac{\alpha}{2} q_e^T K_{dl}^{(i)} \lambda_e + \frac{\alpha}{2} \lambda_e^T K_{ld}^{(i)} q_e + \\ & \left. \frac{\alpha}{2} \lambda_e^T K_{ll}^{(i)} \lambda_e - f_q^{(i)} q_e \right] \quad (19) \end{aligned}$$

式中:

$$K_{ss}^{(i)} = \int_e N_{\sigma}^T \tilde{C} N_{\sigma} dV;$$

$$K_{sd}^{(i)} = \int_e N_{\sigma}^T \nabla N_u dV;$$

$$K_{sl}^{(i)} = \int_e N_{\sigma}^T \nabla N_r dV;$$

$$K_{dl}^{(i)} = \int_e (\nabla N_u)^T \tilde{C} \nabla N_r dV;$$

$$K_{dd}^{(i)} = \int_e (\nabla N_u)^T \tilde{C} \nabla N_u dV;$$

$$K_{ll}^{(i)} = \int_e (\nabla N_r)^T \tilde{C} \nabla N_r dV;$$

$$f_q^{(i)} = \int_e N_u^T \bar{T} dS;$$

$\sum$ 表示对所有单元的叠加。将 p_e 、 q_e 、 λ_e 看成独立变量, 用式 (19) 分别对其进行变分后再组装各矩阵, 得到如下列式:

$$(\alpha - 1) K_{ss} p + (1 - \alpha) K_{sd} q + (1 - \alpha) K_{sl} \lambda = 0 \quad (20a)$$

$$(1 - \alpha) K_{sd}^T p + \alpha K_{dd} q + \alpha K_{dl} \lambda = f_q \quad (20b)$$

$$(1 - \alpha) K_{sl}^T p + \alpha K_{ld} q + \alpha K_{ll} \lambda = 0 \quad (20c)$$

由式 (20c) 可得:

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\alpha} K_{ll}^{-1} K_{sl}^T p - K_{ll}^{-1} K_{ld} q \quad (21)$$

再将式 (21) 回代到式 (20a)、式 (20b) 中, 得到如下矩阵形式的含参数 α 的混合能方程:

$$\begin{bmatrix} (\alpha - 1) A_{ss} & (1 - \alpha) A_{sd} \\ (1 - \alpha) A_{sd}^T & \alpha A_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_q \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式中:

$$A_{ss} = K_{ss} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} K_{sl} K_{ll}^{-1} K_{sl}^T;$$

$$A_{sd} = K_{sd} - K_{sl} K_{ll}^{-1} K_{ld};$$

$$A_{dd} = K_{dd} - K_{dl} K_{ll}^{-1} K_{ld}$$

实际工程中的叠层结构材料 (如压电复合材料) 具有层间应力连续, 而平面内应力不连续的特点。高的层间应力是复合材料特有的破坏机制之一的基础。为了更准确地分析其应力状态, 分开求解层间应力和平面内应力。

将式 (22) 分开来写:

$$(\alpha - 1) A_{ss} p + (1 - \alpha) A_{sd} q = 0 \quad (23a)$$

$$(1 - \alpha) A_{sd}^T p + \alpha A_{dd} q = f_q \quad (23b)$$

由式 (23a) 得:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\alpha - 1) A_{11} & (\alpha - 1) A_{12} \\ (\alpha - 1) A_{21} & (\alpha - 1) A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ p_i \end{Bmatrix} + \\ & \begin{Bmatrix} (1 - \alpha) A_{sdo} \\ (1 - \alpha) A_{sdi} \end{Bmatrix} q = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

由式 (24) 得:

$$(\alpha - 1) A_{11} p_o + (\alpha - 1) A_{12} p_i + (1 - \alpha) A_{sdo} q = 0 \quad (25)$$

$$(\alpha - 1) A_{21} p_o + (\alpha - 1) A_{22} p_i + (1 - \alpha) A_{sdi} q = 0 \quad (26)$$

式 (25) 中 A_{12} 不可逆, 故由式 (26) 可得:

$$p_i = -A_{22}^{-1} A_{21} p_o + A_{22}^{-1} A_{sdi} q \quad (27)$$

式 (27) 即为平面内应力的表达式, 由位移和层间应力表示。在求解过程中, 首先利用整体模型的位移边界条件和层间应力边界条件 (电学量类比为了机械量, 因此电学边界条件包含在其中) 求解出未知的位移和层间应力。然后将位移 q 和层间应力 p_o 的结果作为已知量, 再对每层的式 (27) 施加平面内应力边界条件, 求出平面内应力。

由式 (23b) 可得:

$$(1 - \alpha) A_{sdo}^T p_o + (1 - \alpha) A_{sdi}^T p_i + \alpha A_{dd} q = f_q \quad (28)$$

将式 (27) 代到式 (25)、式 (28) 中, 可得:

$$\begin{bmatrix} (\alpha - 1) I_{ss} & (1 - \alpha) I_{sd} \\ (1 - \alpha) I_{sd}^T & (1 - \alpha) I_{dd} + \alpha A_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_q \end{Bmatrix} \quad (29)$$

式中:

$$I_{ss} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21};$$

$$I_{sd} = A_{sdo} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{sdi};$$

$$I_{dd} = \Lambda_{sdi}^T A_{22}^{-1} \Lambda_{sdi}$$

Fellipa 在文献 [20-21] 中就广义混合法中的参数确定问题提出了基于误差分析理论的中值法，即假设各未知量的精确解位于基于最小势能原理的有限元法所求解出的数值结果与基于最小余能原理有限元法所求解出的数值结果的正中间，由此确定了参数的值。他指出当 α 值为 0.75 时，会得到非常好的效果。因此在以下的算例中采用这个值。运用符号软件 Mathematica 进行编程求解，该软件是全精度运行的，可得到任意精度的数值解。

2 数值算例

为了将分析结果与封闭形式的精确解进行比较，只考虑四边简支的压电复合材料层合板模型。

例 1：四边简支正交铺设的 4 层 (p/0/90/p) 压电复合材料层合厚板，p 表示压电材料层。板的总厚度 h 为 1.0 m，板的边长 $L=4$ m，核心由两层正交铺设 (0/90) 的弹性材料石墨/环氧树脂构成，每层厚度为 $0.4h$ ，其材料常数如下： $E_1=132.39$ GPa， $E_2=E_3=10.756$ GPa， $G_{12}=G_{13}=5.654$ GPa， $G_{23}=3.606$ GPa， $\nu_{12}=\nu_{13}=0.24$ ， $\nu_{23}=0.49$ ， $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0=3.5$ ， $\varepsilon_{22}/\varepsilon_0=\varepsilon_{33}/\varepsilon_0=3$ 。

在其上下表面各有一厚度为 $0.1h$ 的压电材料层 (铅钛酸铅压电陶瓷，PZT-4)，其材料常数如下： $E_1=E_2=81.3$ GPa， $E_3=64.5$ GPa， $G_{12}=30.6$ GPa， $G_{23}=G_{13}=25.6$ GPa， $\nu_{12}=0.329$ ， $\nu_{13}=\nu_{23}=0.432$ ， $e_{33}=15.08$ C/m²， $e_{24}=e_{15}=12.72$ C/m²， $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0=\varepsilon_{22}/\varepsilon_0=1475$ ， $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0=1300$ 。

为了简洁起见，没有给出材料刚度系数 C_{ij} 及杨氏模量 E_1 、 E_2 、 E_3 ，剪切模量 G_{12} 、 G_{13} 、 G_{23} 和泊松比 ν_{12} 、 ν_{13} 、 ν_{23} 相关联的表达式，它们可以在文献 [22] 中找到。

分别对应传感器 (Sensor) 和致动器 (Actuator) 的配置情况，对该压电复合材料层合板进行静力分析。鉴于几何形状和载荷的对称性，选取板的 1/4 进行分析，网格划分为 $8 \times 8 \times 20$ ，板的几何模型和网格划分模型如图 1、图 2 所示。

工况 1：对于 Sensor 情况，在板的上表面施加横向正弦分布的机械载荷 $p=p_0\sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$ 。上、下表面电势为 0。

工况 2：对于 Actuator 情况，在板的上表面施加横向正弦分布的电势 $\phi=\phi_0\sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$ 。下表面电势为 0。

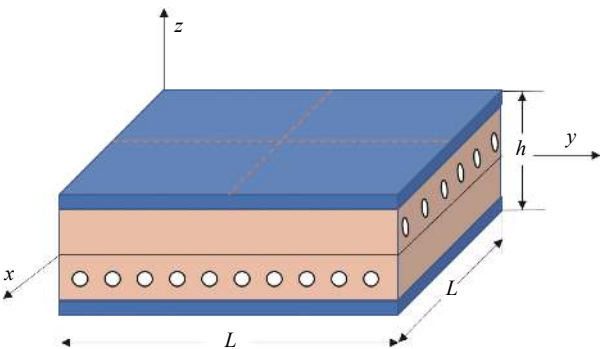


图 1 铅钛酸铅压电陶瓷 (PZT-4) 压电层合板几何模型
Fig. 1 Geometric model of lead zirconate titanate ceramic (PZT-4) piezoelectric laminates

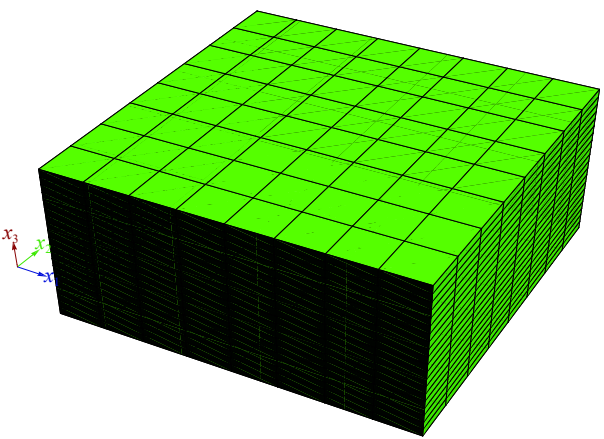


图 2 PZT-4 压电层合板模型网格划分
Fig. 2 Model meshing of PZT-4 piezoelectric laminates

表 1 表示工况 1 下 ($p_0=1$) 各个物理参数的数值结果及同其他文献的对比。

给出工况 1 下沿板厚的纵向位移 u 、横向位移 w 、层间应力 σ_z 及平面内应力 σ_x 、 σ_{xy} 的一些结果，如图 3~7 所示。

表 2 表示工况 2 下 ($\phi_0=1$) 各个物理参数的数值结果及同其他文献的对比。

给出工况 2 下沿板厚的电势 ϕ 、层间应力 σ_{xz} 及平面内应力 σ_{xy} 的一些结果，如图 8~10 所示。

从图 3~10 可以看出，无论是工况 1 还是工况 2，本文所采用的方法与精确解相比都取得了非常好的效果。数值结果表明，机电耦合可能对层间应力产生显著影响，导致压电层合板横截面上的应力高度非线性分布，从图 7 和图 10 可以看出，平面内应力不连续，这是符合客观实际情况的。也可以看出本文给出的结果和几何规则模型的精确解误差非常小，充分说明了本文方法的有效性。

例 2：Ray 等 [25] 以 Pagano 等 [26] 的方法为基础，

表 1 工况 1 下 PZT-4 压电层合板的各个物理参数值

Table 1 Each physical parameter value of PZT-4 piezoelectric laminates under working condition 1

Reference solution	$u(0, \frac{L}{2}, 0)/10^{-11}\text{m}$	$w(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)/10^{-11}\text{m}$	$\phi(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)/10^{-2}\text{V}$	$\sigma_{xz}(0, \frac{L}{2}, 0)/\text{Pa}$	$\sigma_x(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)/\text{Pa}$	$\sigma_z(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)/\text{Pa}$
Exact ^[23]	20.392	30.027	0.611	—	6.5643	0.498
LW1 ^[24]	—	29.851	0.6032	0.7099	7.0132	0.579
Present	20.287	29.82	0.6065	0.691	6.46	0.497
Error/%	0.5	0.6	0.7	—	1.5	0.13

Notes: u —Longitudinal displacement; w —Transverse displacement; ϕ —Electric potential; σ_z , σ_{xz} —Interlaminar stress; σ_x —In-plane stress.

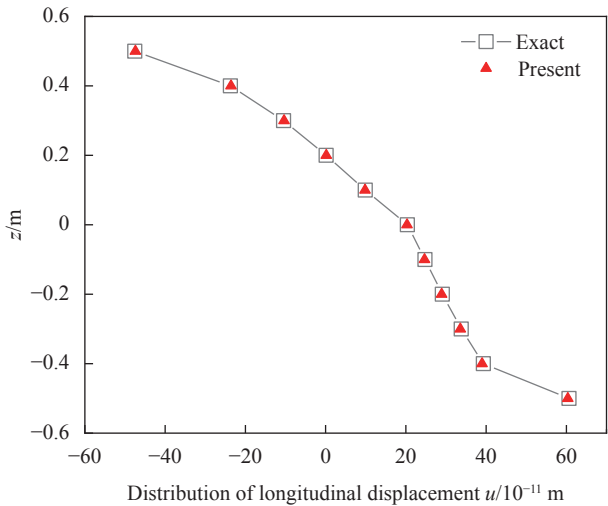


图 3 PZT-4 压电层合板纵向位移 u 沿 z 轴的分布

Fig. 3 Distribution of longitudinal displacement u of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

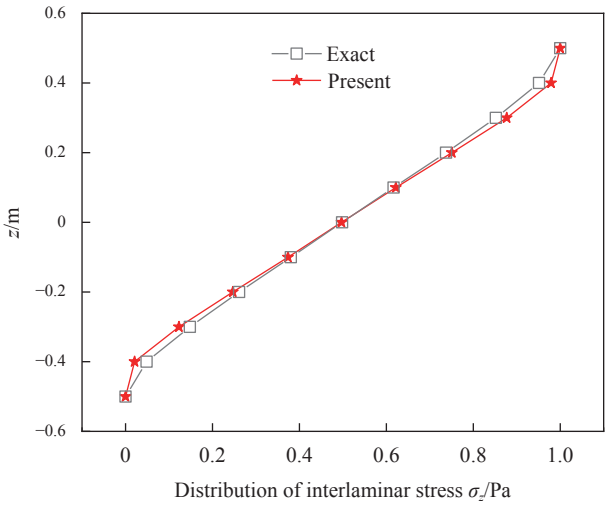


图 5 PZT-4 压电层合板层间应力 σ_z 沿 z 轴的分布

Fig. 5 Distribution of interlaminar stress σ_z in PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

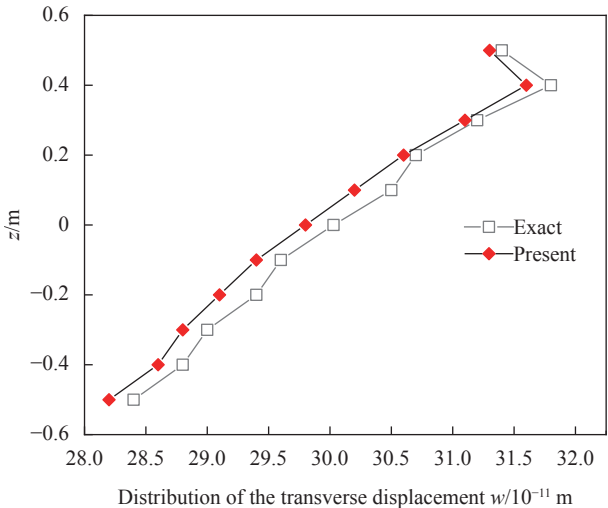


图 4 PZT-4 压电层合板横向位移 w 沿 z 轴的分布

Fig. 4 Distribution of the transverse displacement w of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

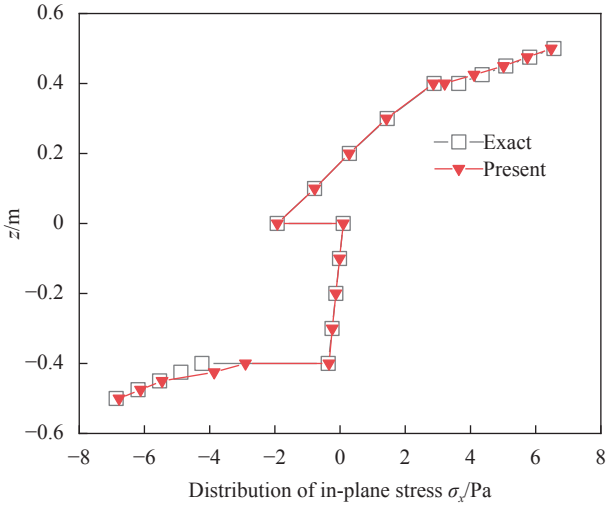


图 6 PZT-4 压电层合板平面内应力 σ_x 沿 z 轴的分布

Fig. 6 Distribution of in-plane stress σ_x of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

研究了上下表面带有非常薄的压电层的四边简支正交铺设压电层合板，边长为 L 。其核心为由

石墨/环氧树脂复合材料制成的正交铺设的 3 层 (0/90/0) 层合板，每层厚度为 3 mm，其材料特性

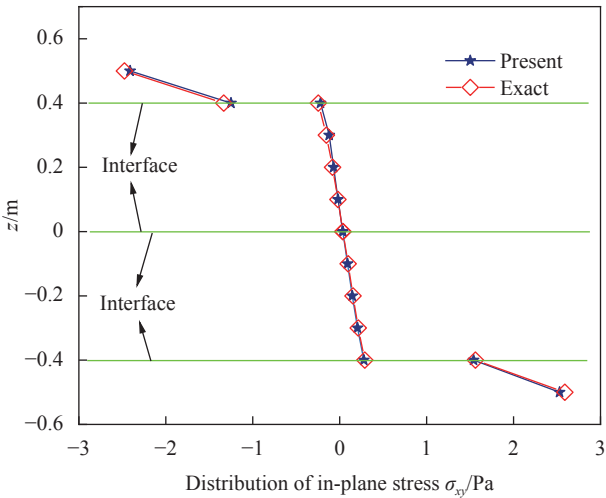


图 7 工况 1 下 PZT-4 压电层合板平面内应力 σ_{xy} 沿 z 轴的分布
Fig. 7 Distribution of in-plane stress σ_{xy} of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis under condition 1

如下： $E_1=25E_2$ ， $E_2=E_3=6.9\text{ GPa}$ ， $G_{23}=0.2E_2$ ， $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ ， $\mu_{12}=\mu_{13}=\mu_{23}=0.25$ ， $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0=\varepsilon_{22}/\varepsilon_0=\varepsilon_{33}/\varepsilon_0=1$ 。

位于结构顶部和底部表面的压电层 (聚偏氟乙烯, PVDF) 厚度为 $40\text{ }\mu\text{m}$ ，其材料特性如下： $E=2\text{ GPa}$ ，

$\mu=0.29$ ， $e_{31}=e_{32}=0.0046\text{ C/m}^2$ ， $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0=\varepsilon_{22}/\varepsilon_0=\varepsilon_{33}/\varepsilon_0=12$ ， $e_{33}=e_{24}=e_{15}=0$ 。

在板上表面作用的机械载荷 p 或电压 ϕ 都是双正弦分布， p_0 和 V_0 分别为峰值： $p=p_0\sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$ ， $\phi=V_0\sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$ 。

电势边界条件为 $x,y=0,L$ 处， $\phi=0$ ； $z=\pm h/2$ 处， $\phi=0$ ； $z=H/2$ 处， $\phi=V_0\sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$ ；其中， h 和 H 分别为弹性核心和整个结构的厚度。计算结果采用以下无量纲化的值： $\tilde{w}=100E_2w/(q_0S^4h)$ ， $S=L/H$ ， $(\tilde{\sigma}_x,\tilde{\sigma}_y,\tilde{\tau}_{xy})=(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})/(q_0S^4)$ ， $(\tilde{\tau}_{xz},\tilde{\tau}_{yz})=(\tau_{xz},\tau_{yz})/(q_0S)$ 。

选取板的 1/4 进行分析，网格划分为 $8\times8\times11$ ，板的几何模型和网格划分模型如图 11、图 12 所示。

板的顶层压电层和底层压电层分别作为分布式致动器和传感器。表 3 为该压电层合板在两种载荷条件下的计算结果：(1) $p_0=1.0$ 且 $V_0=0.0\text{ V}$ ；(2) $p_0=1.0$ 且 $V_0=100.0\text{ V}$ 。可以看到，本文所采用的方法计算的大部分应力的结果与 Ray 等^[25]的结果一致，此外，还值得特别指出的是，在相同的网格划分下，本文所采用的 8 节点非协调单元广

表 2 工况 2 下 PZT-4 压电层合板的各个物理参数值

Table 2 Each physical parameter value of PZT-4 piezoelectric laminates under working condition 2

Reference solution	$w\left(\frac{L}{2},\frac{L}{2},0\right)/10^{-11}\text{ m}$	$\phi\left(\frac{L}{2},\frac{L}{2},0\right)/10^{-2}\text{ V}$	$\sigma_{xz}\left(0,\frac{L}{2},0\right)/10^{-3}\text{ Pa}$	$\sigma_z\left(\frac{L}{2},\frac{L}{2},0\right)/10^{-3}\text{ Pa}$
Exact ^[23]	-1.471	0.4476	-23.87	-14.612
LW3 ^[24]	-1.4707	0.4477	-22.70	-13.541
Present	-1.493	0.4475	-24.5	-15.469
Error/%	1.47	0.7	0.64	5.6

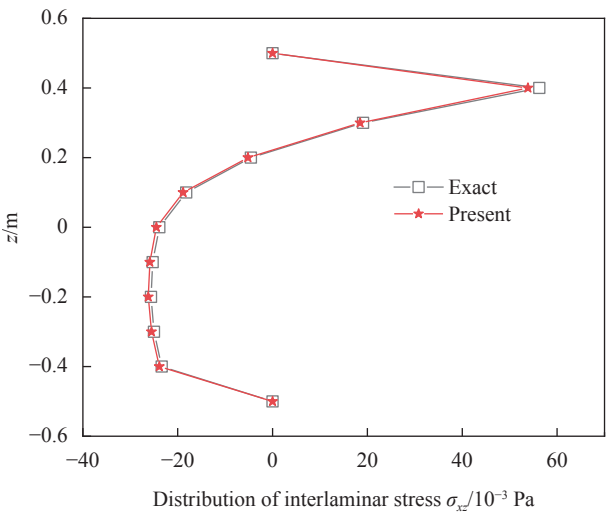


图 8 PZT-4 压电层合板层间应力 σ_{xz} 沿 z 轴的分布
Fig. 8 Distribution of interlaminar stress σ_{xz} of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

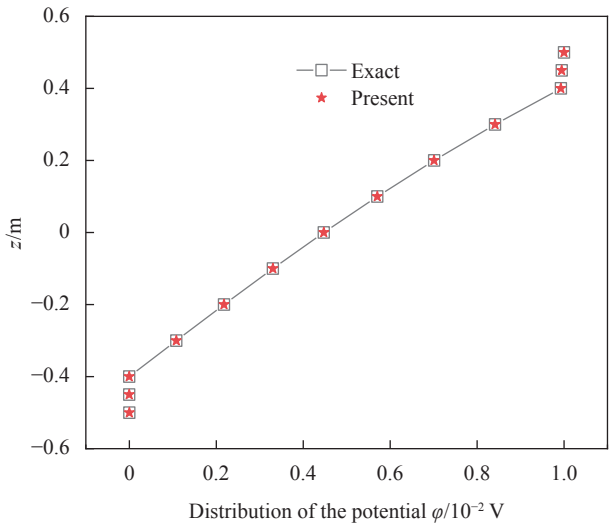


图 9 PZT-4 压电层合板电势 ϕ 沿 z 轴的分布
Fig. 9 Distribution of the potential ϕ of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis

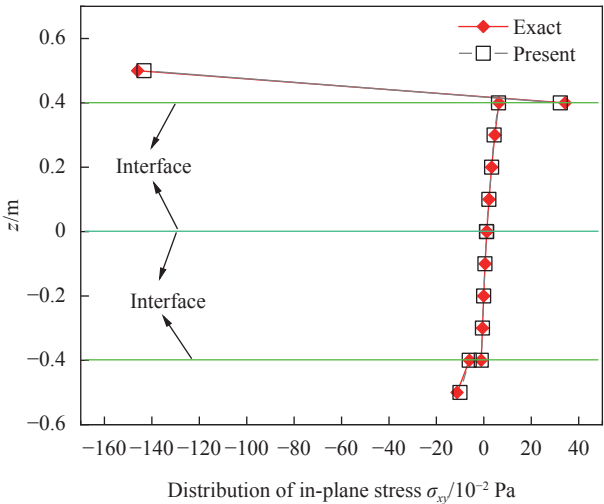


图 10 工况 2 下 PZT-4 压电层合板平面内应力 σ_{xy} 沿 z 轴的分布
Fig. 10 Distribution of in-plane stress σ_{xy} of PZT-4 piezoelectric laminates along the z axis under condition 2

义混合法的性能比文献 [5] 和文献 [27] 的结果好。图 13 和图 14 表明了 在致动器表面上没有电势分布和具有电势分布的情况下弹性核心的平面内应力 σ_x 和 σ_y 沿板厚的分布情况。可以明显看出，致动器抵消了机械载荷。

由于基材中间层的纤维方向是沿着 y 轴的，因此中间层中 $\tilde{\sigma}_y$ 的分布受到显著影响。传感器和致动器层的厚度在商用范围 (9~0.5 mm) 内的变化对弹性解的影响可以忽略不计。从表 3 还可以看出，压电复合材料层合板致动器层在结构中引起

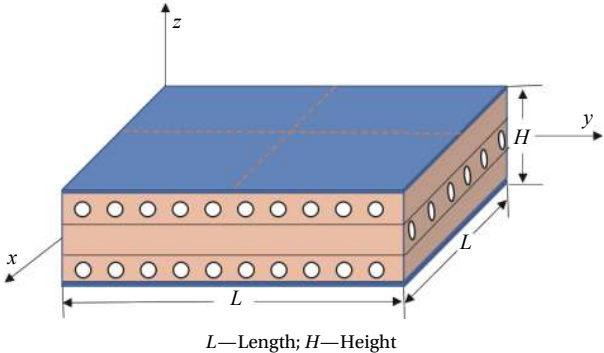


图 11 聚偏氟乙烯 (PVDF) 压电层合板几何模型
Fig. 11 Geometric model of polyvinylidene fluoride (PVDF) piezoelectric laminates

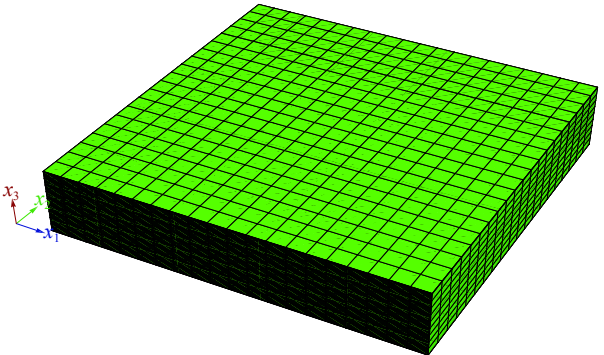


图 12 PVDF 压电层合板模型网格划分
Fig. 12 Model meshing of PVDF piezoelectric laminates

诱导应变致动的有效性随着板的跨厚比 S 的减小而显著增加。

表 3 PVDF 压电层合板的挠度和应力
Table 3 Deflection and stress of PVDF piezoelectric laminates

Load	L/H	Reference solution	$\tilde{w}\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0\right)$	$\tilde{\sigma}_x\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\tilde{\sigma}_y\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{6}\right)$	$\tilde{\tau}_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$	$\tilde{\tau}_{xz}\left(0, \frac{L}{2}, 0\right)$	$\tilde{\tau}_{yz}\left(\frac{L}{2}, 0, 0\right)$
$p_0 = 1.0$ $V_0 = 1.0$	10	Present	0.766	0.589	0.285	-0.0277	0.359	0.113
		Literature ^[27]	0.764	0.502	0.290	-0.0269	0.371	0.137
		Literature ^[5]	0.668	0.520	—	—	—	—
		Literature ^[25]	0.774	0.589	0.284	-0.0287	0.358	0.123
	100	Present	0.445	0.540	0.180	-0.020	0.395	0.076
		Literature ^[27]	0.434	0.539	0.181	-0.0212	0.390	0.076
		Literature ^[5]	0.433	0.545	—	—	—	—
		Literature ^[25]	0.471	0.538	0.181	-0.021	0.394	0.083
$p_0 = 1.0$ $V_0 = 100$	10	Present	-2.0	-2.94	-2.16	0.210	-0.593	0.348
		Literature ^[27]	-2.0	-2.73	-2.45	0.149	-0.710	0.450
		Literature ^[5]	-1.91	-2.78	—	—	—	—
		Literature ^[25]	-2.35	-3.12	-2.34	0.181	-0.683	0.336
	100	Present	0.424	0.489	0.084	-0.0192	0.384	0.081
		Literature ^[27]	0.412	0.505	0.159	-0.0198	0.378	0.080
		Literature ^[5]	0.411	0.510	—	—	—	—
		Literature ^[25]	0.447	0.504	-0.158	-0.019	0.382	0.086

Notes: $\tilde{w}$ —Dimensionless transverse displacement; $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$, $\tilde{\tau}_{xy}$ —Dimensionless in-plane stress; $\tilde{\tau}_{xz}$, $\tilde{\tau}_{yz}$ —Dimensionless interlaminar stress; p_0 —Peak mechanical load; V_0 —Peak electric potential.

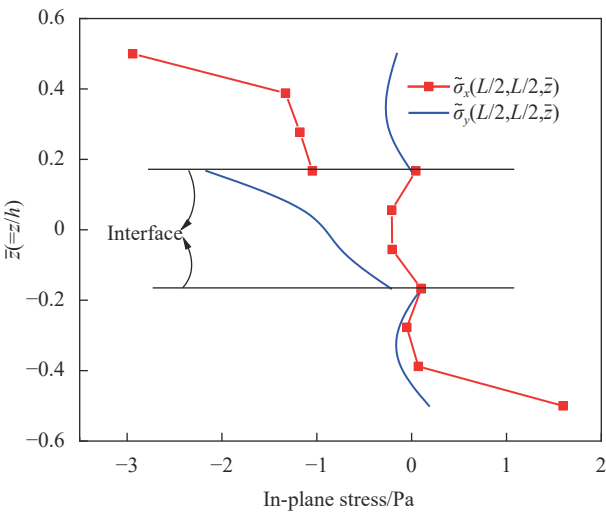


图 13 $S=10$ 、 $V_0=100$ PVDF 压电层合板
平面内应力 $\tilde{\sigma}_x$ 、 $\tilde{\sigma}_y$ 沿 z 轴的分布

Fig. 13 Distribution of in-plane stress $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$ of PVDF piezoelectric laminates along the z axis when $S=10$, $V_0=100$

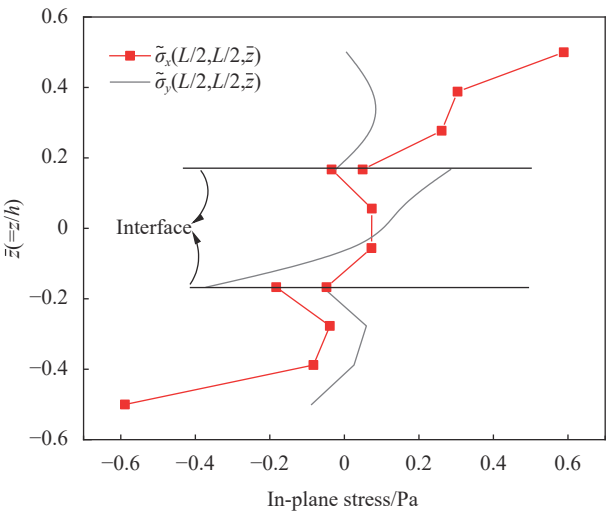


图 14 $S=10$ 、 $V_0=0$ PVDF 压电层合板平面内应力 $\tilde{\sigma}_x$ 、 $\tilde{\sigma}_y$ 沿 z 轴的分布

Fig. 14 Distribution of in-plane stress $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$ of PVDF piezoelectric laminates along the z axis when $S=10$, $V_0=0$

3 结论

发展了纯弹性体的广义混合有限元法并成功地将其用来描述薄/中厚智能复合材料层合板的机电耦合响应。

(1) 基于 H-R 混合变分原理推导出了广义混合有限元，并采用了非协调模式。

(2) 通过分析嵌入压电蒙皮的复合材料叠层板，并与文献中的精确解和数值解进行比较，对所提出的方法进行了广泛的评估。结果表明，与其他方法相比，本文方法的计算精度更高。

此外，本文采用的广义混合有限元法还可以

推广应用于压电层合板的振动控制分析等方面，正在进行下一步研究。

参考文献：

[1] QING G H, MAO J, LIU Y. Generalized mixed finite element method for 3D elasticity problems[J]. Acta Mechanica Sinica, 2018, 34(2): 1-10.

[2] BENJEDDOU A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: A survey[J]. Computers & Structures, 2000, 76(1-3): 347-363.

[3] REDDY J N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators[J]. Engineering Structures, 1999, 21(7): 568-593.

[4] DETWILER D T, SHEN M H H, VENKAYYA V B. Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensors[J]. Finite Elements in Analysis & Design, 1995, 20(2): 87-100.

[5] SHEIKH A H, TOPDAR P, HALDER S. An appropriate FE model for through thickness variation of displacement and potential in thin moderately thick smart laminates[J]. Composite Structures, 2001, 51: 401-409.

[6] CARRERA E, BOSCOLO M. Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 70(10): 1135-1181.

[7] CARRERA E, BUETTNER A, NALI P. Mixed elements for the analysis of anisotropic multilayered piezoelectric plates[J]. Journal of Intelligent Material Systems & Structures, 2010, 21(7): 701-717.

[8] VIDAL P, GALLIMARD L, POLIT O. Modeling of piezoelectric plates with variables separation for static analysis[J]. Smart Materials and Structures, 2016, 25(5): 055043.

[9] PLAGIANAKOS T S, PAPADOPOULOS E G. Higher-order 2-D/3-D layerwise mechanics and finite elements for composite and sandwich composite plates with piezoelectric layers[J]. Aerospace & Technology, 2015, 40: 150-163.

[10] KORAYEM M H, HOMAYOONI A. The size-dependent analysis of multilayer micro-cantilever plate with piezoelectric layer incorporated voltage effect based on a modified couple stress theory[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2017, 61: 59-72.

[11] KPEKY, FESSAL, ABED-MERAIM, et al. Linear and quadratic solid-shell finite elements SHB8PSE and SHB20E for the modeling of piezoelectric sandwich structures[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018, 25(1-8): 559-578.

[12] MOLEIRO F, SOARES C, SOARES C, et al. Layerwise mixed models for analysis of multilayered piezoelectric compo-

- site plates using least-squares formulation[J]. *Composite Structures*, 2015, 119: 134-149.
- [13] ZENKOUR A M, ALGHANMI R A. Stress analysis of a functionally graded plate integrated with piezoelectric faces via a four-unknown shear deformation theory[J]. *Results in Physics*, 2018, 12: 268-277.
- [14] RAMEGOWDA P C, D ISHIHARA, NIHO T, et al. A novel coupling algorithm for the electric field-structure interaction using a transformation method between solid and shell elements in a thin piezoelectric bimorph plate analysis[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2019, 159: 33-49.
- [15] LI W, SHEN H J. A layerwise finite element formulation of laminated composite cylindrical shells with piezoelectric layers[J]. *Journal of Mechanical Science & Technology*, 2018, 32(2): 731-741.
- [16] KAPURIA S, AHMED A. A coupled efficient layerwise finite element model for free vibration analysis of smart piezobonded laminated shells featuring delaminations and transducer debonding[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 194: 106195.
- [17] 刘艳红, 李锐. 含参数单元与热弹性复合材料层合板分析[J]. *复合材料学报*, 2019, 36(5): 1306-1312.
- LIU Yanhong, LI Rui. Parametered symplectic element and analysis of thermoelastic composite laminates[J]. *Acta Materiae Composita Sinica*, 2019, 36(5): 1306-1312(in Chinese).
- [18] 赵直钦. 三类弹性体非协调单元有限元的理论研究[D]. 天津: 中国民航大学, 2020.
- ZHAO Zhiqin. Theoretical study on noncompatible symplectic finite element of three elastomers[D]. Tianjin: Civil Aviation University of China, 2020(in Chinese).
- [19] PIAN T, WU C C. Hybrid and incompatible finite element methods[M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [20] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals[J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 2010, 5(2): 79-88.
- [21] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity: II. Hybrid functionals and the free formulation[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2010, 5(2): 89-98.
- [22] 沈观林, 胡更开, 刘彬. 复合材料力学[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- SHEN Guanlin, HU Gengkai, LIU Bin. Mechanics of composite materials[M]. 2th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013(in Chinese).
- [23] HEYLIGER P. Static behavior of laminated elastic/piezoelectric plates[J]. *AIAA Journal*, 1994, 32(12): 2481-2484.
- [24] CARRERA E, VALVANO S, KULIKOV G M. Multilayered plate elements with node-dependent kinematics for electro-mechanical problems[J]. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2018, 9(4): 279-317.
- [25] RAY M C, BHATTACHARYA R, SAMANTA B. Exact solutions for static analysis of intelligent structures[J]. *AIAA Journal*, 2012, 31(9): 1684-1691.
- [26] PAGANO N J, HATFIELD H J. Elastic behavior of multilayered bidirectional composites[J]. *AIAA Journal*, 1972, 10(7): 931-933.
- [27] CEN S, SOH A K, LONG Y Q, et al. A new 4-node quadrilateral FE model with variable electrical degrees of freedom for the analysis of piezoelectric laminated composite plates[J]. *Composite Structures*, 2002, 58(4): 583-599.