

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20200306.001

零泊松比超材料设计的多评价点
功能基元拓扑优化方法

杨德庆, 钟山*

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 高新船舶与深海开发装备协同创新中心 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

摘 要: 提出基于多评价点约束的零泊松比超材料功能基元拓扑优化设计方法。在同一功能基元拓扑基结构中, 通过建立对于多个评价点的正、负泊松比约束, 实现胞元零泊松比效应。分别采用最小质量和最大柔度目标函数拓扑优化模型优化设计出与半内六角蜂窝相似的零泊松比功能基元最优拓扑构型。提取功能基元最优构型并周期性序构了零泊松比超材料试件, 通过有限元方法验证了该功能基元的零泊松比效应, 并分析超材料试件的静、动力学特性。计算结果表明, 最大柔度目标函数设计的功能基元构型的泊松比更接近于零, 且具有更好的承载与隔振性能。设计了零泊松比超材料环肋双层圆柱壳结构, 进行外壳静压和内部设备激振下壳体水下辐射噪声分析。研究表明, 零泊松比超材料环肋可将外壳压缩变形转换为内外壳间环肋旋转, 实现耐压壳内壳的保形, 且具有较好的降噪性能。

关键词: 超材料; 零泊松比; 功能基元; 拓扑优化; 双层圆柱壳; 降噪

中图分类号: TB330.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2020)12-3229-13

Functional element topology optimization method based on multiple evaluation
points for metamaterial design with zero Poisson's ratio

YANG Deqing, ZHONG Shan*

(State Key Laboratory of Ocean Engineering, Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-sea
Exploration, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai
Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The functional element topology optimization method based on multiple evaluation points was proposed to design metamaterial with zero Poisson's ratio. The zero Poisson's ratio effect of a cell was achieved through multiple evaluation points that defined positive and negative Poisson's ratio constraints in one topological ground structure. Topology optimization models were established by minimal mass and maximal compliance objective functions, and corresponding functional element configurations with zero Poisson's ratio were optimized and designed, which were similar to semi re-entrant hexagonal honeycomb. The optimal functional element configurations were extracted and periodic arranged as metamaterial structure with zero Poisson's ratio. The finite element method (FEM) was used to verify the Poisson's ratio of these functional elements. The static and dynamic characteristics of metamaterial structures were also analyzed through finite element models. The results show that the metamaterial structure based on maximal compliance objective has better in-plane specific stiffness and vibration isolation performance, and its Poisson's ratio is closer to zero compared with minimal mass objective model. The structures of double-layered cylindrical shells with conventional solid ring-rib and zero Poisson's ratio metamaterial ring-rib were designed, and the analysis under static pressure from outer shell and underwater radi-

收稿日期: 2020-01-07; 录用日期: 2020-02-27; 网络首发时间: 2020-03-06 14:01:45
网络首发地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20200306.001>
基金项目: 国家自然科学基金 (51479115); 海洋工程国家重点实验室课题 (GKZD010071); 高技术船舶科研计划项目 (科军评 [2014]148 号; 联装函 [2016]548 号)
通信作者: 钟山, 硕士研究生, 研究方向为结构减振降噪控制理论与方法、优化设计方法 E-mail: zhongshan9988@163.com
引用格式: 杨德庆, 钟山. 零泊松比超材料设计的多评价点功能基元拓扑优化方法 [J]. 复合材料学报, 2020, 37(12): 3229-3241.
YANG Deqing, ZHONG Shan. Functional element topology optimization method based on multiple evaluation points for metamaterial design with zero Poisson's ratio[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2020, 37(12): 3229-3241(in Chinese).

ation noise caused by internal equipment were conducted. By converting the compression deformation of the outer shell into the rotation of the inner shell, the zero Poisson’s ratio metamaterial ring-rib achieves shape conservation of the inner shell. The metamaterial ring-rib can also reduce the underwater radiation noise from cylindrical shell.

Keywords: metamaterial; zero Poisson’s ratio; functional element; topology optimization; double-layered cylindrical shell; noise reduction

自然界中大多数材料的泊松比介于 0.2~0.5 之间，泊松比为 0 或为负值的材料在自然界中较少，需要人为设计，这种具备常规材料没有的特殊物理特性的人工设计材料称为超材料。零泊松比 (Zero Poisson’s ratio, ZPR) 材料在受单向拉压时，不会出现横向变形，这种横向保形特性使之在对气动外形有严格要求的飞机机翼柔性蒙皮中得到应用^[1-2]。类似的保形特性在深海耐压结构设计中也有重要应用价值，如深海耐压圆柱壳和耐压球壳，以保持准确外形与恒定的浮力储备。鉴于胞元微结构对多孔超材料宏观泊松比效应和力学性能有重要影响^[3-6]，对 ZPR 多孔超材料的设计大多从胞元微结构入手。主要有两种设计思路：(1) 将正、负泊松比胞元结构混合，以获得具有 ZPR 效应的蜂窝胞元构型；(2) 直接设计新型 ZPR 胞元构型。

Olympio 等^[7]提出了图 1(a) 所示正、负泊松比胞元混合构型 (Hybrid cellular)，当其中一个周期微元受到 X 方向拉伸载荷时，具有相同特征角 θ 的正、负泊松比胞元分别收缩和膨胀相同的横向变形，从而使整个周期微元的等效横向变形为零，实现整体微元的 ZPR。鲁超等^[8]和李杰峰等^[9]对 Olympio 提出的蜂窝材料进行了弹性模量与剪切模量的计算分析。Grima 等^[10-11]提出图 1(b) 所示的半内六角形蜂窝胞元结构 (Semi re-entrant hexagonal cellular)，这种胞元的上下半部分别由特征角均为 θ 的正、负泊松比胞元壁组成，Grima 根据梁理论给出其受单向载荷 F 时，横向变形评价点 1 与 2 的位移解析式为

$$\delta_Y = \frac{F l^3 \sin \theta \cos \theta}{12 E I} \tag{1}$$

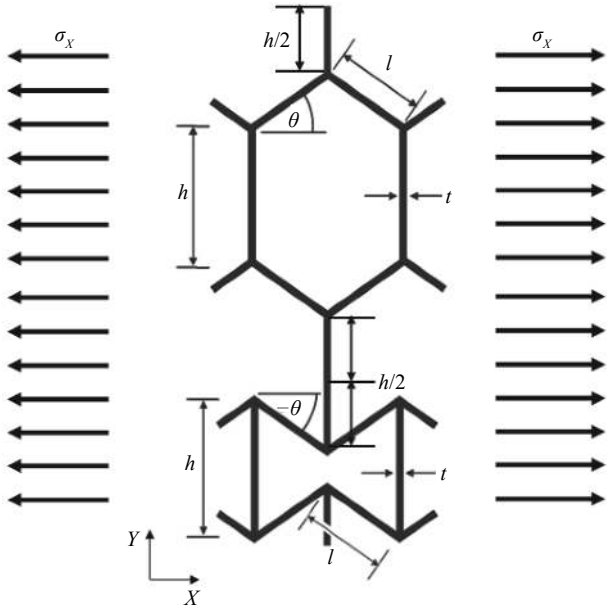
式中： E 为胞元壁材料的弹性模量； I 为胞元壁截面的惯性矩； l 为斜向胞元壁长度，参数意义详见图 1(b)。

当整个蜂窝胞元在 X 方向受拉 (压) 时，评价点 1 会向下 (上) 移动 δ_Y 的距离，而点 2 也会被向下 (上) 拉动 δ_Y 的距离，从而使整个胞元的横向变形为零。Attard 等^[12]采用多种模型对半内六角蜂窝进行了分析，进一步验证了其 ZPR 效应，Soman 等^[13]基于聚乙二醇在微观上将该胞元序构

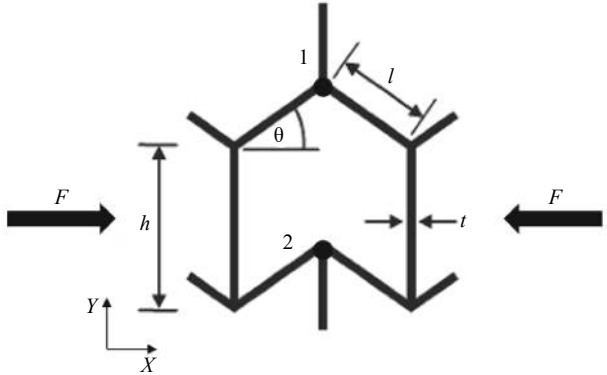
为 3D 生物材料，证明了其 ZPR 效应。

针对新型 ZPR 胞元构型的设计也有广泛的研究。程文杰等^[2]根据胞元直臂类型进行胞元分类，提出一种十字型混合 ZPR 蜂窝胞元并进行了分析计算；Gong 等^[14]和 Huang 等^[15]也给出了各自的新型 ZPR 胞元构型，并基于等效弹性模量等指标推导验证了其 ZPR。

秦浩星等^[16-18]提出了设计任意泊松比超材料的功能基元拓扑优化 (Functional element topology



(a) Periodic element of hybrid cellular honeycomb



(b) Configuration of semi re-entrant hexagonal honeycomb

图 1 不同混合型零泊松比 (ZPR) 蜂窝及其周期微元
Fig. 1 Different periodic elements of hybrid honeycombs with zero Poisson’s ratio (ZPR)

optimization, FETO) 方法。该方法以功能基元为优化对象, 将胞元的泊松比作为约束条件建立拓扑优化模型, 优化出具有指定泊松比的功能基元最优构型, 再将其周期排列序构, 最终得到相应的超材料和结构。与以往的微观-宏观尺度一体化设计方法^[19-22]及能量均匀化方法^[23]相比, FETO 方法可任意设计需要的正、负泊松比超材料, 且功能基元属于介观/宏观尺度结构, 微观尺度上仍由常规材料构成, 拓扑优化设计的计算规模小, 计算效率高, 序构的超材料是由常规材料组成的周期性结构, 便于工程应用。

本文提出基于多评价点约束的 ZPR 超材料设计的 FETO 法, 解决原有 FETO 方法用于 ZPR 超材料优化设计中构型模糊的问题, 在同一功能基元拓扑基结构中通过建立对于多个评价点的正、负泊松比约束, 实现胞元 ZPR 效应。并对优化设计的 ZPR 超材料进行力学性能分析, 探讨其应用价值。最后设计了 ZPR 超材料环肋双层圆柱耐压壳结构, 研究其保形和降噪性能。

1 ZPR 超材料设计的多评价点约束 FETO 法

1.1 指定泊松比超材料的 FETO 法

FETO 法的基本原理是: 首先将宏观尺度结构离散为一系列周期排布的子结构, 也称功能基元拓扑基结构(属于介观/宏观尺度); 再针对功能基元拓扑基结构, 施加载荷与边界条件, 设置泊松比评价点, 按照预先设定的泊松比及目标函数(轻量化、承载、减振和吸能等)建立超材料拓扑

优化模型; 之后进行拓扑优化获得功能基元的最佳构型; 最后, 周期序构优化后的功能基元得到超材料或超材料结构。具体流程如图 2 所示。

基于 FETO 方法, 采用矩形功能基元拓扑基结构设计任意正、负泊松比超材料时, 泊松比约束的评价点选取方法如图 3 所示, 通常为 2 个评价点, 并根据下式计算功能基元的泊松比:

$$\nu_{XY} = -\frac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Y} = -\frac{L}{B} \cdot \frac{X_2}{Y_1}$$
 (2)

式中: B 和 L 为拓扑基结构的基本尺寸; Y_1 和 X_2 分别表示功能基元在力 F 作用下评价点 1 的 Y 方向位移和评价点 2 的 X 方向位移。

基于这种拓扑基结构可以设计出具有指定泊松比的常规内/外六角功能基元构型^[16-17], 即图 1(a) 所示两种典型的正、负泊松比胞元结构。但当设计 ZPR 超材料时, 采用该优化模型难以得到清晰的优化设计结果。

1.2 ZPR 超材料设计的多评价点约束 FETO 优化模型

为设计 ZPR 效应超材料, 提出图 4 所示的矩形功能基元拓扑基结构和相应评价点, 在同一个拓扑基结构中定义正、负两种指定泊松比约束, 增加功能基元拓扑基结构中评价点的数目, 从而建立 ZPR 超材料设计的多评价点约束 FETO 优化模型。

功能基元拓扑基结构的上半部分设计正泊松比结构, 下半部分设计负泊松比结构, 通过下式计算功能基元不同部分的泊松比:

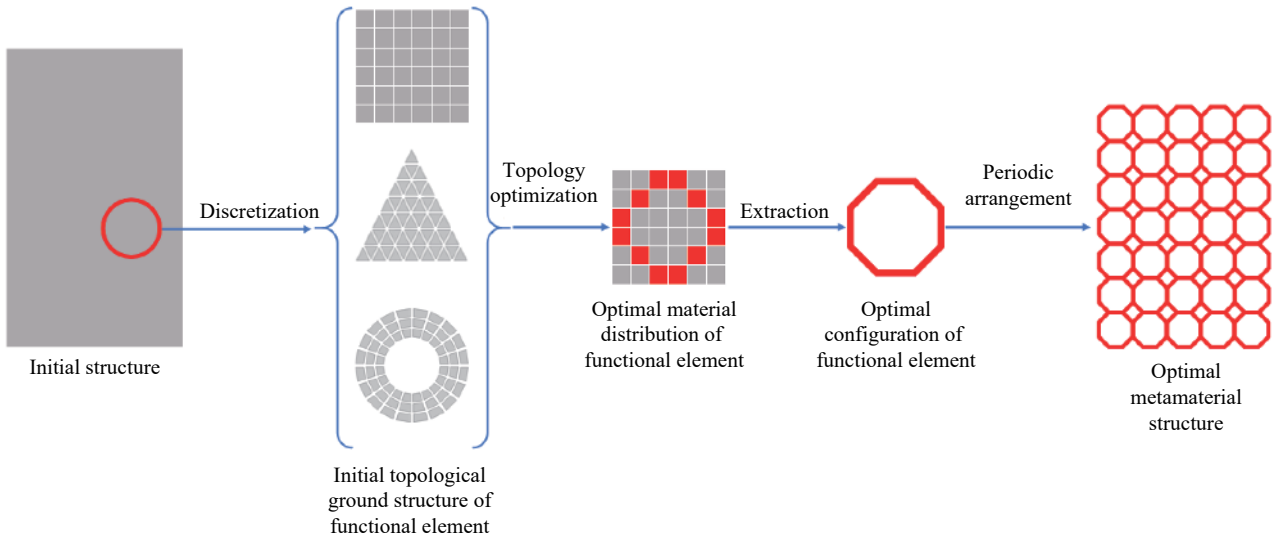


图 2 超材料设计的功能基元拓扑优化 (FETO) 法示意图

Fig. 2 Schematic of the functional element topology optimization (FETO) method of metamaterial design

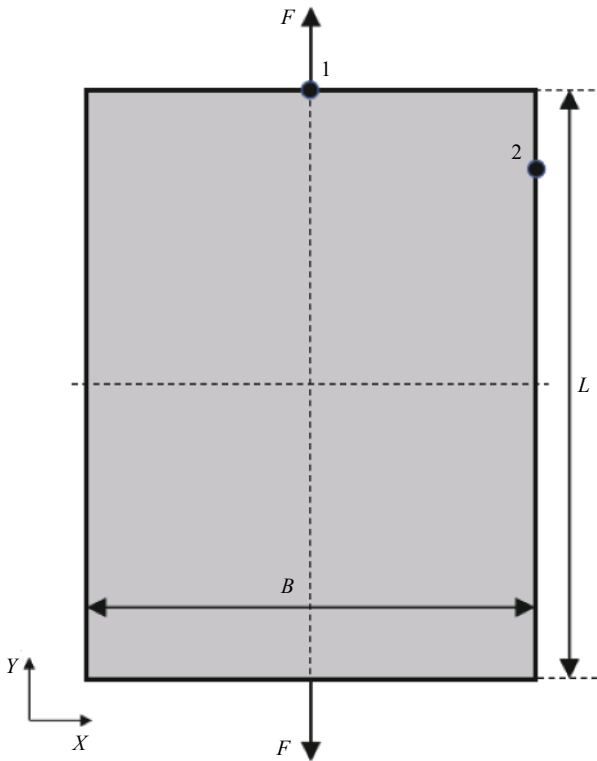


图3 任意正/负泊松比超材料设计的矩形拓扑基结构

Fig. 3 Rectangular topological ground structure of metamaterial with arbitrary positive/negative Poisson's ratio

$$\begin{cases} v^+ = -\frac{L}{B} \cdot \frac{X_{2-1}}{Y_1} \\ v^- = -\frac{L}{B} \cdot \frac{X_{2-2}}{-Y_3} = \frac{L}{B} \cdot \frac{X_{2-2}}{Y_3} \end{cases} \quad (3)$$

式中： Y_1 和 Y_3 分别表示评价点1和3的Y方向位移； X_{2-1} 和 X_{2-2} 分别表示评价点2-1和2-2的X方向位移； a 和 b 分别决定评价点2-1和2-2的具体位置，上述位移参数在运算时均带符号。

采用质量最小(轻量化)和柔度最大(吸能)两种目标函数的优化模型，对FETO法设计的ZPR超材料进行对比研究。优化模型表达式如下：

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \\ \min M(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N \rho x_i V_i \\ \text{或} \max C(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N x_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i \\ \text{s.t. } f_{\min} \leq \frac{V(\mathbf{X})}{V_0} \leq f_{\max} \\ \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ |v^+ - v_0^+| \leq \varepsilon \\ |v^- - v_0^-| \leq \varepsilon \\ 0 < x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

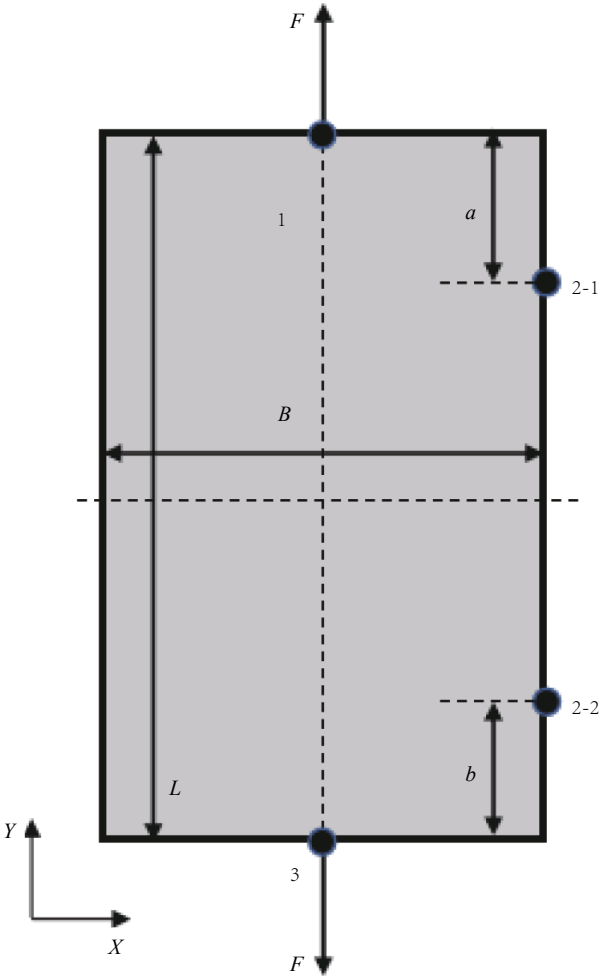


图4 ZPR超材料设计的拓扑基结构

Fig. 4 Topological ground structure of metamaterial with ZPR

式中： $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 为拓扑基结构有限元单元相对密度所组成的向量，即设计变量； x_i 为第*i*个有限元单元的相对密度($i = 1, 2, \dots, N, N$ 为有限元网格数目)； $M(\mathbf{X})$ 和 $C(\mathbf{X})$ 分别为结构总质量和结构柔顺度； ρ 为材料密度； V_i 为第*i*个有限元单元的体积； p 为惩罚因子； $\mathbf{u}_i$ 为第*i*个有限元单元的位移向量； $\mathbf{k}_0$ 为初始单元刚度阵； $\mathbf{F}$ 为载荷矩阵； $\mathbf{U}$ 为位移矩阵； $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵； $V(\mathbf{X})$ 为优化过程中的结构有效体积； V_0 为在拓扑设计变量取相对密度为1状态下的结构有效体积； $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$ 分别为材料用量百分比的上下限，对超材料的轻量化性能加以约束，并保证优化结果的拓扑清晰度； $x_{\max}$ 、 $x_{\min}$ 为相对密度设计变量的上、下限(为避免优化奇异常取为非0值)； ε 为一小量，本文取0.04； v^+ 和 v^- 分别为拓扑基结构上下部分的泊松比，通过式(3)计算； v_0^+ 和 v_0^- 分别为指定的正、

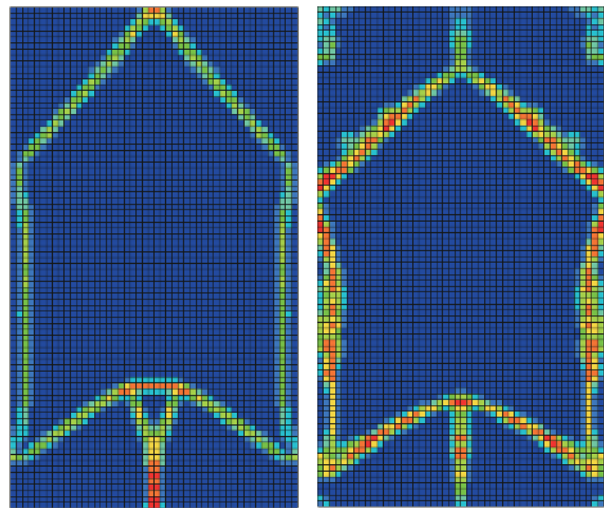
负泊松比约束值。由于 FETO 优化模型中的泊松比与位移直接相关联，为实现半内六角蜂窝中点 1 和点 2 产生相同比移的效果， v_0^+ 和 v_0^- 互为相反数。除已给出的约束外，两种 FETO 优化模型都加入了关于拓扑基结构 Y 轴的对称约束及拓扑优化的最小成员尺寸约束。

2 优化设计结果与构型的提取验证

2.1 基于多评价点约束 FETO 方法的 ZPR 功能基元设计结果

在图 4 所示的拓扑基结构中，取 $L = 42\text{ mm}$ 、 $B = 24\text{ mm}$ ；施加的载荷幅值为 $F = 1\text{ N}$ ；结构母材为低碳钢，弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5\text{ MPa}$ ，材料的泊松比 $\nu_m = 0.3$ ，密度 $\rho = 7\,850\text{ kg/m}^3$ ；优化模型中的材料用量百分比上下限分别为 $f_{\max} = 0.5$ 和 $f_{\min} = 0.05$ 。

质量最小目标函数的 FETO 优化模型中评价点的位置参数为 $a = 13\text{ mm}$ 、 $b = 3.5\text{ mm}$ 。设定评价点的位移比值约束为 $X_{2-1}/Y_1 = X_{2-2}/Y_3 = -0.5$ ，则据式 (3) 可知指定泊松比约束为 ± 0.875 。经拓扑优化计算其最优功能基元构型如图 5(a) 所示。



(a) Minimal mass (b) Maximal compliance

图 5 不同目标函数下 ZPR 功能基元构型

Fig. 5 Configurations of functional element with ZPR in different objective functions

柔度最大目标函数的 FETO 优化模型中评价点的位置参数为 $a = 16\text{ mm}$ 、 $b = 2.5\text{ mm}$ 。设定评价点的位移比值约束为 $X_{2-1}/Y_1 = X_{2-2}/Y_3 = -0.5$ ，则据式 (3) 可知指定泊松比约束为 ± 0.875 。经拓扑优化计算其最优功能基元构型如图 5(b) 所示。

需要说明两点，首先，评价点位置原则上可

任意选取，具体到 ZPR 超材料设计，因各评价点相互间的位置限制，在图 4 所示的拓扑基结构中，如要设计与半内六角蜂窝胞元类似的构型，位置参数的取值范围为 $0 < b < a < 21\text{ mm}$ (但若 $a \leq b$ 也能设计其它新构型)。其次，本文为说明 FETO 方法设计 ZPR 超材料的可行性，只给出了一种指定泊松比约束下的拓扑构型，事实上设定为其它数值也能得到不同的拓扑构型。

故基于多评价点的 FETO 法可设计与半内六角形 ZPR 蜂窝类似的超材料功能基元构型。

2.2 ZPR 超材料功能基元构型的提取

对图 5 所示拓扑结果进行提取。其中，拓扑优化结果云图中红色表示单元“相对密度”接近 1，蓝色则接近 0。采用 FETO 方法设计时并不关注单元相对密度的具体数值，而是着眼于总体传力路径，在后续提取中位于传力路径上的单元均会被提取。此外，为了使得到的构型便于加工并符合制造工艺，在保证主传力路径总体不变的基础上，提取构型时还需进行一些细微的修正。

根据提取后的几何模型建立两种构型的有限元模型。考虑以往的提取经验与后续的应用形式，对两种 ZPR 构型分别建立其梁单元和板单元有限元模型，如图 6 所示。

上述模型中梁单元截面形状为矩形，沿垂直于构型平面方向 (即厚度方向) 的尺寸为 2 mm ，构型平面内 (即构型路径宽度方向) 的尺寸为 1 mm 。板单元模型中板厚 (即构型路径宽度方向) 同样为 1 mm ，板单元沿 Z 方向延伸 20 mm 。两种模型的材料均为低碳钢。

参照半内六角形蜂窝产生 ZPR 效应的载荷方向进行加载，为保证胞元均匀受力，通过多点约束 (Multi-point constraints, MPC) 单元施加单位均布力进行静力分析，验证泊松比。

2.3 ZPR 超材料功能基元构型的泊松比验证

以柔度最大目标设计的 ZPR 功能基元构型为例，在静力分析时选取如图 7 所示评价点通过下式计算提取构型的不同方向的应变 (对质量最小目标得到的构型也是类似处理)：

$$\begin{cases} \epsilon_X = \frac{1}{2} \left(\frac{X_1 - X_2}{B} + \frac{X_3 - X_4}{B} \right) \\ \epsilon_Y = \frac{Y_a - Y_b}{L} \end{cases} \quad (5)$$

式中： X_i 表示评价点 $i(i=1,2,3,4)$ 在 X 方向的位移； Y_j 表示评价点 $j(j=a,b)$ 在 Y 方向的位移； $L = 42\text{ mm}$ 、

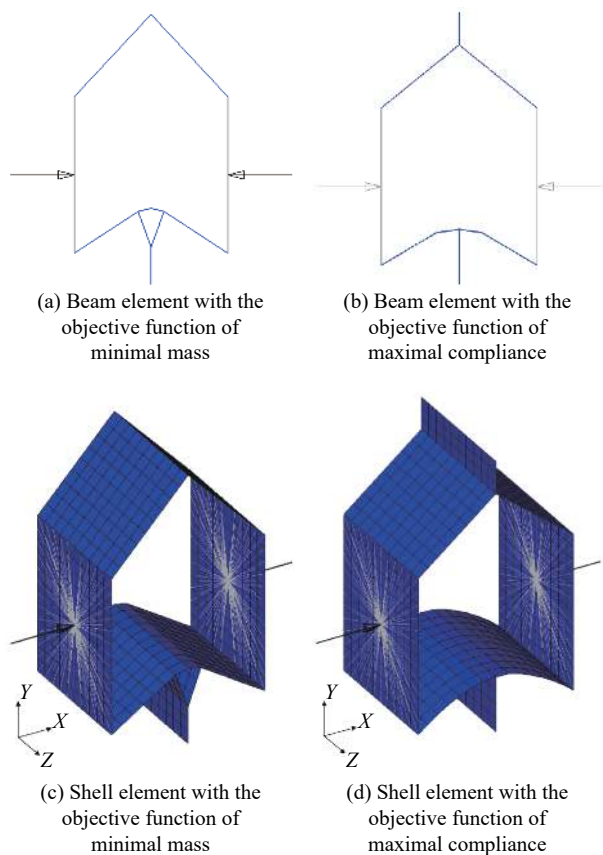


图6 ZPR 功能基元的有限元模型

Fig. 6 FEM models of functional element with ZPR

$B = 24\text{ mm}$ 分别为拓扑基结构的尺寸参数。

梁单元模型直接输出相应位置处的节点位移即可；板单元模型为排除边界效应，评价点位置的 X 、 Y 坐标不变， Z 坐标为 10 mm ，即位于 Z 方向延伸长度的中点处。

根据两个方向的应变计算泊松比，结果如表 1 所示。由于指定泊松比为零，因此各模型泊松比本身的数值就代表了其绝对误差。

可见优化设计的功能基元构型的泊松比绝对

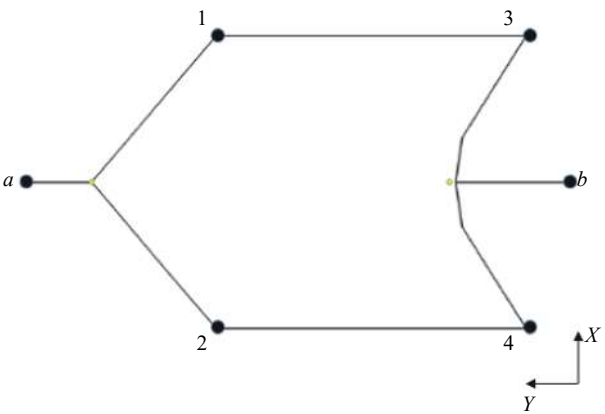


图7 泊松比验证的评价点位置

Fig. 7 Position of measuring points for Poisson's ratio validation

值均小于 0.1，其中柔度最大目标设计的功能基元构型泊松比更接近于零，提取构型时采用梁单元模型具有更好的 ZPR 效应。

3 ZPR 超材料的力学性能

将上述 ZPR 功能基元构型周期性序构为超材料结构试件，试件包含 7 行 5 列的 ZPR 功能基元构型，功能基元构型的尺寸和材料参数与 2.2 节中相同。试件上下端设置了厚度为 10 mm 的面板用于加载和固定。以柔度最大目标 FETO 模型优化设计的板单元 ZPR 超材料为例，其结构形式和轮廓尺寸参数见图 8。

3.1 ZPR 超材料结构的面内刚度特性

ZPR 超材料结构的面内刚度特性主要通过宏观等效弹性模量和面内比模量描述。宏观等效弹性模量是将超材料结构等效为同样轮廓尺寸实心结构时的弹性模量，即宏观等效应力与等效应变的比值。当图 8 所示结构受到沿 X 方向大小为 P 的压力时， X 方向的变形量为 ΔX ，因上下面板的厚度远大于超材料壁厚可视为刚体，故结构的变

表 1 ZPR 功能基元的验证
Table 1 Verification of functional element with ZPR

FEM model	Objective function	Orientation	Strain	Poisson's ratio
Beam element	Minimal mass	X	-1.17×10^{-4}	0.091
		Y	1.06×10^{-5}	
	Maximal compliance	X	-7.84×10^{-5}	-0.0091
		Y	-7.14×10^{-7}	
Shell element	Minimal mass	X	-1.07×10^{-5}	0.095
		Y	1.01×10^{-6}	
	Maximal compliance	X	-6.95×10^{-6}	-0.012
		Y	-8.53×10^{-8}	

Note: FEM—Finite element model.

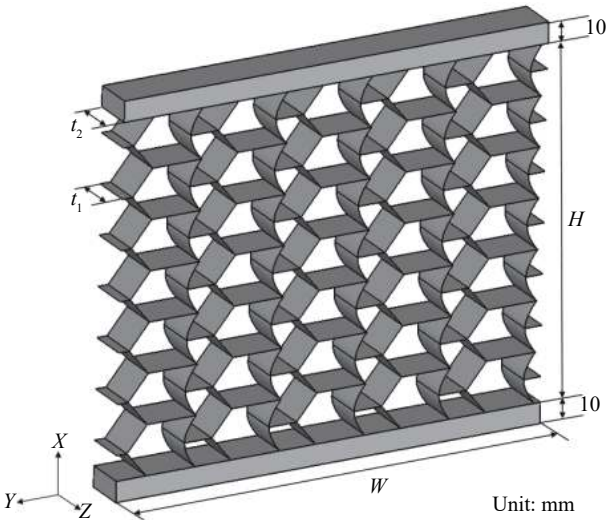


图 8 ZPR 超材料结构轮廓尺寸参数
Fig. 8 Dimension parameters of metamaterial structure with ZPR

形全部由超材料芯层产生。该超材料结构的宏观等效弹性模量计算公式为

$$E_e = \frac{PH}{\Delta X A} \tag{6}$$

式中， A 为与载荷垂直平面中图 8 所示的超材料部分的轮廓截面积，定义为

$$A = W t_1 \tag{7}$$

比模量定义为单位密度下的弹性模量^[24]。具体到本文的多孔超材料结构中，弹性模量指超材料结构的宏观等效弹性模量 E_e ；密度为超材料结构的相对密度 ρ_e ：

$$\rho_e = \frac{M}{H W t_1} \tag{8}$$

其中， M 为超材料序构部分的质量，其它轮廓尺寸参数详见图 8。

通过下式计算超材料结构的比模量：

$$K_s = \frac{E_e}{\rho_e} \tag{9}$$

在上面板中间一排有限元节点沿图 8 的 X 方向施加均布载荷，载荷总大小为 P ；下面板采用固定约束。取上面板各加载点 X 方向位移的平均值作为整体变形量 ΔX ，计算各 ZPR 超材料结构的宏观等效弹性模量和比模量，相关结果详见表 2。

可见，最大柔度目标 FETO 模型设计的超材料结构具有更好的面内抗变形能力，板模型较梁模型能一定程度上提高超材料结构的宏观等效弹性模量和比模量。

3.2 ZPR 超材料结构的动力学特性

将面内刚度计算模型中的静力载荷修改为 10~600 Hz 的动载荷，载荷幅值及其它边界条件不变，采用 4% 的结构阻尼系数进行 ZPR 超材料结构的频响分析。通过直接法输出各个 ZPR 超材料结构在图 9 所示评价点 A、B、C、D 的加速度响应，并绘制相应的频响曲线，如图 10 所示。图 10 结果表明，在 10~600 Hz 内四种 ZPR 超材料结构均存在两个频率较接近的共振峰，且一阶共振峰的频率与超材料结构的面内刚度成正相关。

探讨 ZPR 超材料结构的隔振性能，通过下式计算评价点 i 与评价点 j 之间在频率点 f 处的加速度振级落差 (Vibration level difference, VLD)：

$$L_{i-j}^f = 20 \lg \left(\frac{a_i^f}{a_j^f} \right) \tag{10}$$

式中， a_i^f 表示评价点 i 在频率点 f 处的加速度频率响应。对应超材料结构加速度振级落差曲线如图 11 所示。

表 2 ZPR 超材料结构宏观等效弹性模量和面内比模量

Table 2 Macroscopic equivalent elastic modulus and in-plane specific stiffness of metamaterial structures with ZPR									
FEM model	Objective function	P/N	$\Delta X/mm$	H/mm	W/mm	t_1/mm	A/mm^2	E_e/MPa	$K_s/(m^2 \cdot s^{-2})$
Beam element	Minimal mass	106	0.37	168	210	2	420	115.53	146 117.42
	Maximal compliance	106	0.27	168	210	2	420	158.21	220 660.68
Shell element	Minimal mass	105	0.033	168	210	20	4 200	126.13	159 517.11
	Maximal compliance	106	0.024	168	210	20	4 200	178.90	249 129.51

Notes: P —Load amplitude; ΔX —Overall deformation of metamaterial structure; H —Height of metamaterial structure; W —Width of metamaterial structure; t_1 —Thickness of metamaterial structure; A —Area of the plane perpendicular to the load in metamaterial structure; E_e and K_s —Macroscopic equivalent elastic modulus and in-plane specific stiffness of metamaterial structures.

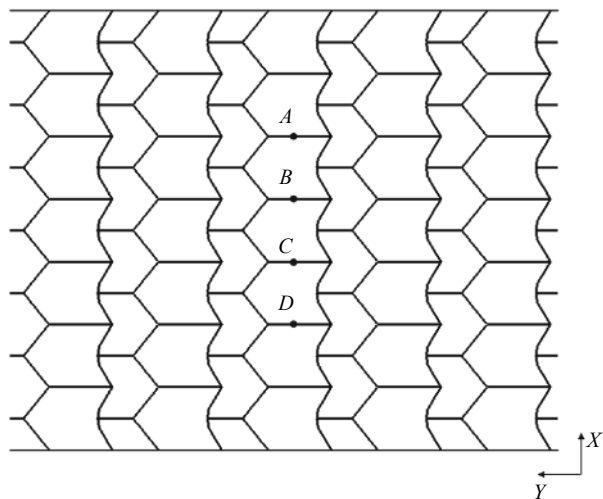


图9 ZPR 超材料结构振动评价点位置

Fig. 9 Position of evaluation points for calculating vibration of metamaterial structure with ZPR

将该频段内各评价点的加速度响应叠加，再根据式 (10) 计算各超材料结构的总加速度振级落

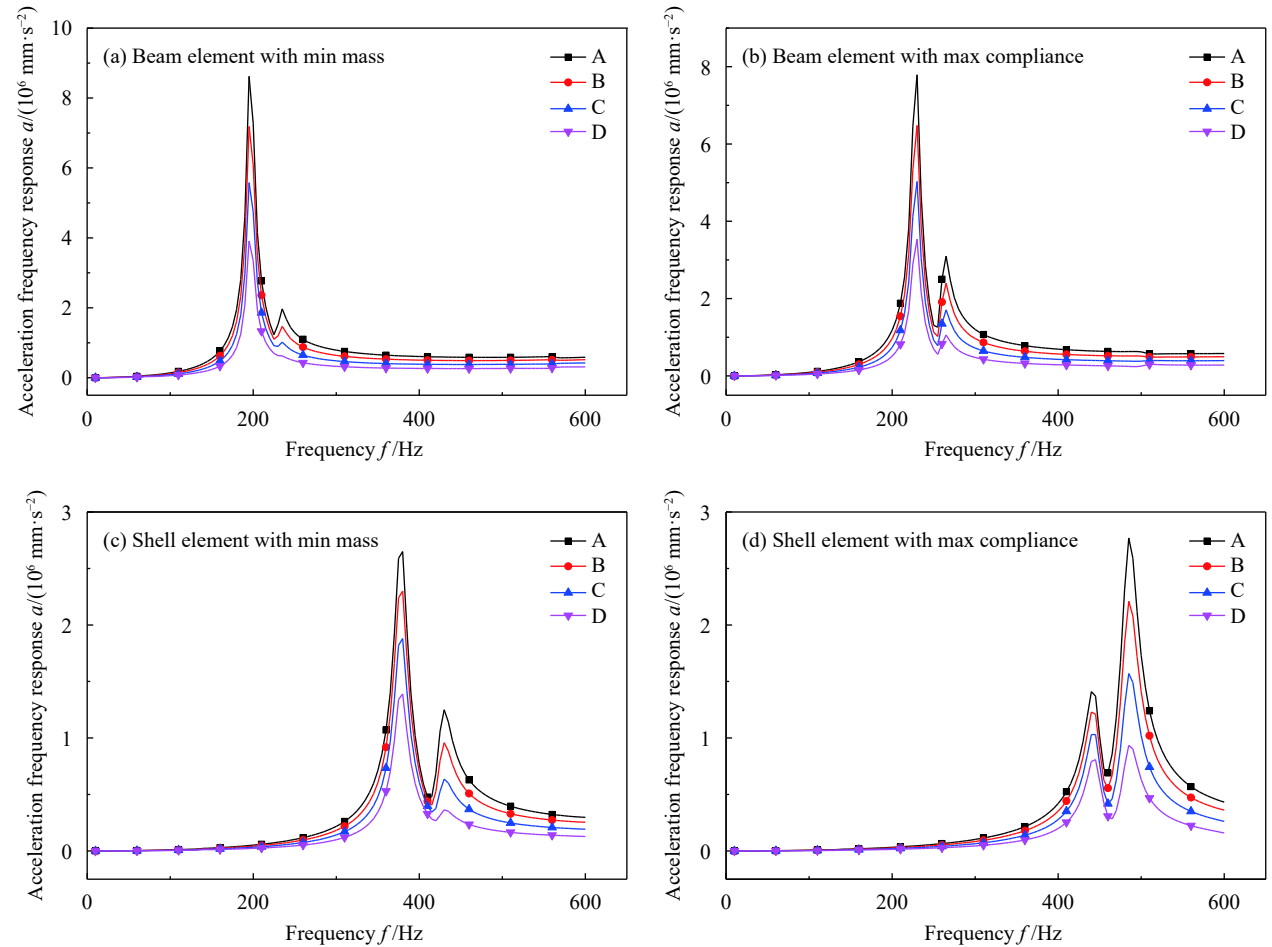


图10 不同 ZPR 超材料结构的频响曲线

Fig. 10 Frequency response curves of metamaterial structure with ZPR in different finite element models

差如表 3 所示。
图 11 和表 3 的结果表明，最大柔度目标 FETO 模型设计的超材料具有相对较好的隔振性能；板模型与梁模型的减振效果差别不大；各 ZPR 超材料结构在低频段和一阶共振频率点下存在较大的振级落差峰值。

4 ZPR 超材料环肋双层圆柱壳的性能

ZPR 超材料的保形特性在海洋工程领域应用极少。双层圆柱耐压壳是潜艇、深潜器的典型结构，本文将 ZPR 超材料用于上述结构中的环肋，探索 ZPR 超材料在耐压壳保形和承载能力方面的应用。

4.1 双层圆柱壳的 ZPR 环肋设计

设计总长 $L=4.95\text{ m}$ 、内壳半径 $r=3.5\text{ m}$ 、外壳半径 $R=4.26\text{ m}$ 的双层圆柱壳进行研究。鉴于最大柔度目标 FETO 模型设计的 ZPR 超材料具有较好的面内刚度和减振特性，故利用该功能基元构型的板单元模型在圆柱壳中序构三层环肋结构，周

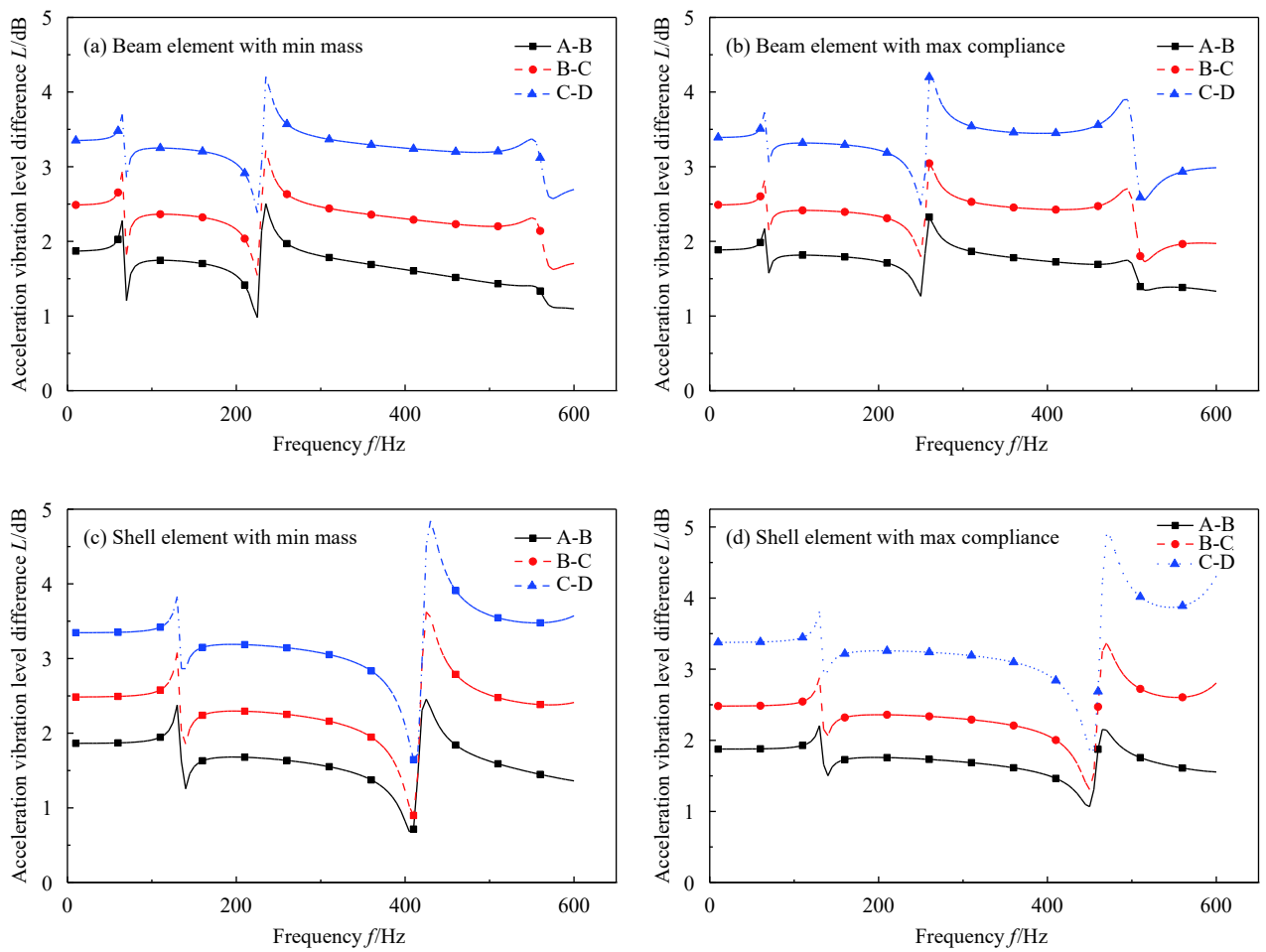


图 11 不同 ZPR 超材料结构的加速度振级落差

Fig. 11 Acceleration vibration level difference of metamaterial structure with ZPR in different finite element models

表 3 ZPR 超材料结构的总加速度振级落差

FEM model	Objective function	Evaluation points	Acceleration VLD/dB
Beam element	Minimal mass	A-B	1.60
		B-C	2.21
		C-D	3.09
	Maximal compliance	A-B	1.70
		B-C	2.30
		C-D	3.18
Shell element	Minimal mass	A-B	1.42
		B-C	2.00
		C-D	2.85
	Maximal compliance	A-B	1.74
		B-C	2.60
		C-D	3.66

Note: VLD—Vibration level difference.

期旋转角为 6°，如图 12 所示。

建立该结构的有限元模型。其中内壳厚度 10 mm，

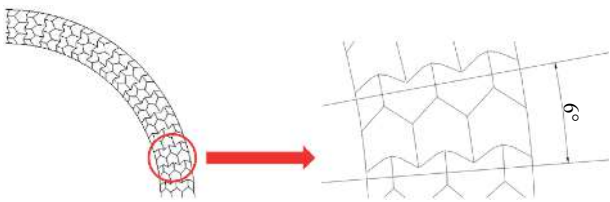


图 12 ZPR 超材料环肋圆柱壳

Fig. 12 Ring rib of metamaterial structure with ZPR in cylindrical shell

外壳厚度 30 mm，ZPR 超材料壁厚 10 mm，超材料环肋宽度 $d=150$ mm，环肋间距 $D=1$ m，详见图 13。

建立常规实肋板双层圆柱壳模型作为对比，其外廓几何尺寸不变，实肋板环肋厚度为 10 mm，肋板间距 $D=1$ m。两种双层圆柱耐压壳的有限元模型如图 14 所示。其中常规实肋板圆柱壳的质量为 4.702×10^4 kg，ZPR 超材料圆柱壳的质量为 4.945×10^4 kg。

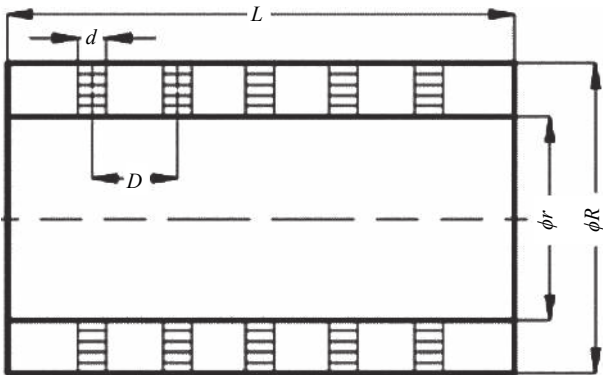


图 13 圆柱壳结构尺寸示意图

Fig. 13 Dimension parameters of cylindrical shell structure

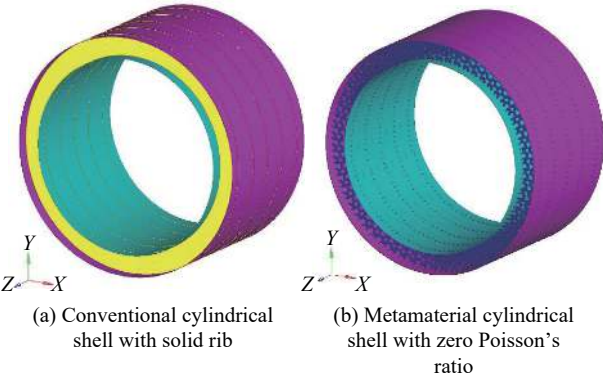


图 14 常规圆柱壳与 ZPR 超材料圆柱壳

Fig. 14 Conventional cylindrical shell and metamaterial cylindrical shell with ZPR

4.2 ZPR 超材料环肋双层圆柱壳的抗压性能

将 1 MPa 均布法向压力施加在两种圆柱壳的外壳上，并取各圆柱壳长度中点位置处的环肋内外壳上各 8 个评价点的径向收缩位移。评价点位置见图 15，结果如表 4 所示。

两种耐压壳的 Von Mises 应力分布如图 16 所示。其中常规实肋板耐压壳的最大应力为 172.1 MPa，

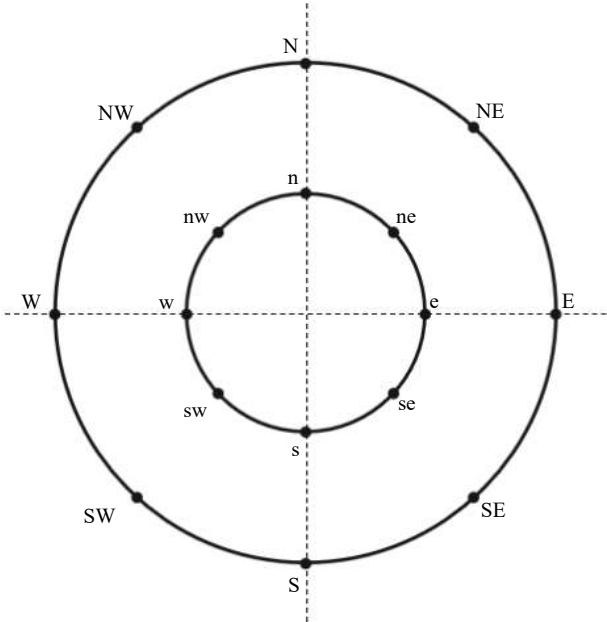


图 15 双层圆柱壳静力学评价点位置

Fig. 15 Position of evaluation points of double cylindrical shell in static analysis

位于内壳与实肋板连接处；ZPR 超材料耐压壳最大应力为 161.5 MPa，均匀分布于整个外壳上。

上述结果表明，在相同压力下，ZPR 超材料耐压壳虽然增重 5.17%，但内壳的整体变形量更小，能够更好地为内壳保形，而且内壳的应力水平整体上很低且分布均匀。

4.3 ZPR 超材料环肋圆柱壳的内壳保形机制

ZPR 超材料的横向不变形性主要体现在胞元受单向载荷时，横向两侧产生相同方向和大的位移。当其结构为圆环形式时就体现为整个横向胞元壁所在层的旋转，即部分压缩变形能转化成了内壳整体旋转能，从而降低内壳的压缩变形。

为验证这一推论，提取相同位置评价点的内

表 4 不同双层圆柱壳的径向位移

Table 4 Radial displacement of different double cylindrical shells

Evaluation point	Conventional cylindrical shell			Metamaterial cylindrical shell		
	Inner shell/mm	Outer shell/mm	In-out ratio	Inner shell/mm	Outer shell/mm	In-out ratio
N	1.58	1.73	0.913	0.885	2.69	0.329
NE	1.58	1.73	0.913	0.817	2.73	0.300
E	1.59	1.74	0.914	0.889	2.69	0.330
SE	1.56	1.71	0.913	0.740	2.69	0.275
S	1.57	1.72	0.908	0.841	2.65	0.318
SW	1.54	1.69	0.913	0.755	2.64	0.286
W	1.56	1.72	0.908	0.842	2.65	0.318
NW	1.56	1.70	0.913	0.782	2.69	0.291
Average	1.57	1.72	0.912	0.819	2.68	0.306

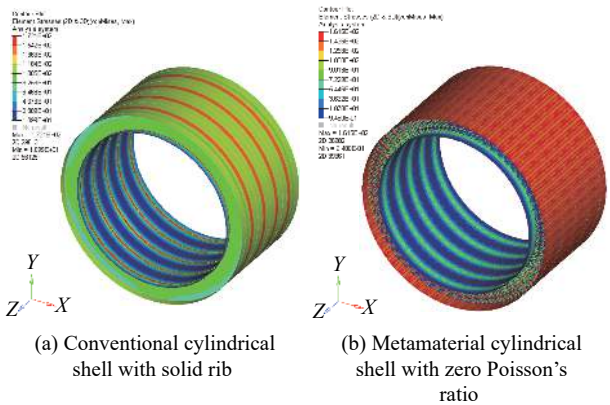


图 16 不同双层圆柱壳的应力分布

Fig. 16 Stress distribution of different double cylindrical shells

壳周向位移如表 5 所示，表中数值的正负分别表示沿周向逆时针和顺时针位移。

故在承受静水压力时，常规实肋板双层圆柱壳的内壳几乎没有旋转，能量全部转化为压缩变形能，压缩变形为内壳变形的形式；ZPR 超材料环肋双层圆柱壳则有较大的旋转位移，部分能量转化为内壳整体旋转的位能，除压缩变形外，旋转变形也是内壳变形的形式，其变形示意图如图 17 所示。

4.4 ZPR 超材料环肋圆柱壳的水下辐射噪声性能

为模拟潜艇、深潜器中设备对壳体的激振，在两类双层圆柱耐压壳中建立基座模型，并在其面板处施加 10~200 Hz 幅值为 10 N 的交变激励力，

表 5 不同双层圆柱壳的内壳周向位移

Table 5 Circumferential displacement of inner shell in different double cylindrical shells

Evaluation point	Conventional cylindrical shell/mm	Metamaterial cylindrical shell/mm
N	4.38×10^{-3}	-0.193
NE	4.26×10^{-3}	-0.218
E	2.64×10^{-3}	-0.241
SE	-1.12×10^{-3}	-0.253
S	-9.50×10^{-4}	-0.245
SW	-1.50×10^{-3}	-0.225
W	2.64×10^{-4}	-0.197
NW	4.69×10^{-3}	-0.187
Average	1.58×10^{-3}	-0.220
Ratio to radial displacement	1.01×10^{-3}	0.269

Note: Positive and negative values in the table mean counterclockwise and clockwise circumferential displacements respectively.

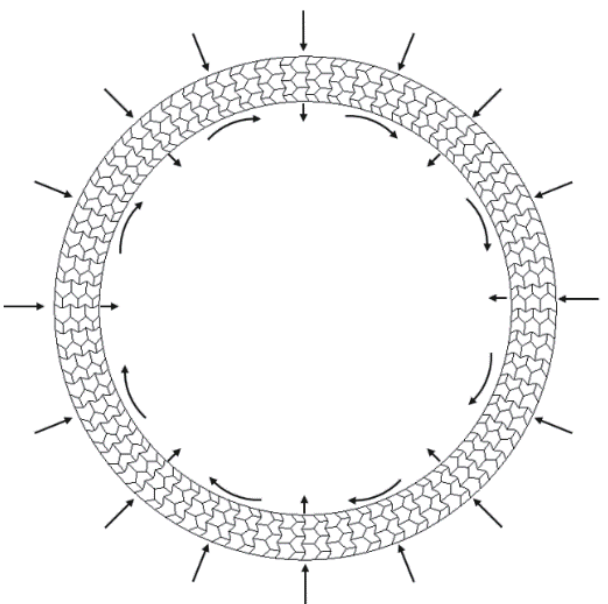


图 17 ZPR 超材料圆柱壳静压变形示意图

Fig. 17 Schematic of displacement in metamaterial cylindrical shell with ZPR under static pressure

如图 18 所示。

对两种圆柱壳模型两端施加简支约束。指定外壳为湿表面，设定海水密度与无穷大吃水深度，以模拟计算双层圆柱壳完全浸没在水下的振动响应。采用模态叠加法计算两种圆柱壳的振动速度响应后，将外壳的表面振速导入双层圆柱壳的水下辐射噪声边界元计算模型，计算其 10~200 Hz 的水下辐射声功率。

如图 19 所示，选取圆柱壳外壳为边界元网格，声功率计算流场为包裹整个圆柱壳的球面，以模拟潜艇或深潜器浸没在水下。

10~200 Hz 三分之一倍频程点的声功率级曲线如图 20 所示。其中常规实肋板双层圆柱壳 10~

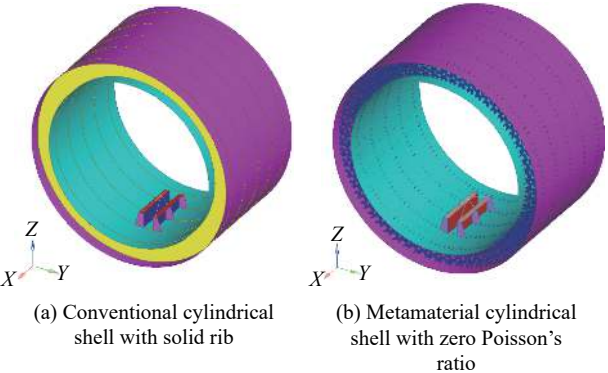


图 18 包含基座的双层圆柱壳 FEM 模型

Fig. 18 FEM model of double cylindrical shell with base structure

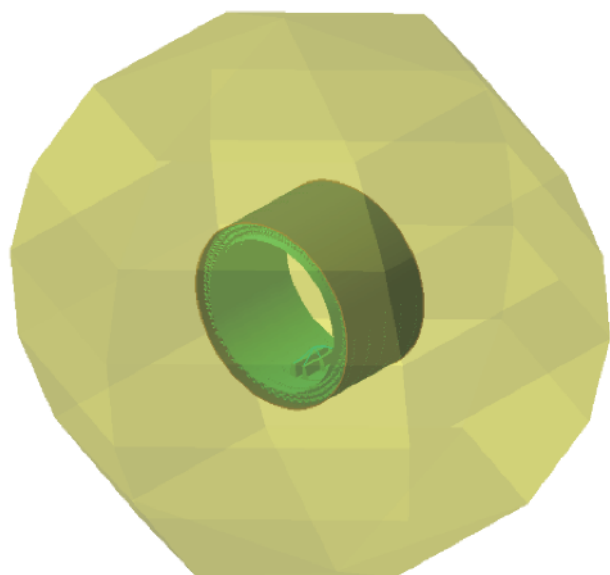


图 19 双层圆柱壳声学边界元模型

Fig. 19 Acoustic boundary element model of double cylindrical shell

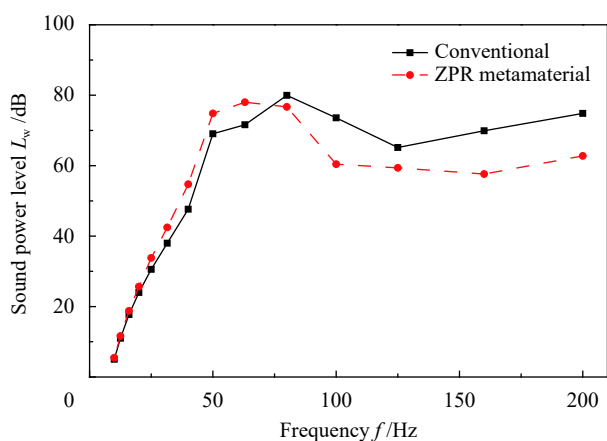


图 20 不同圆柱壳的水下辐射声功率级

Fig. 20 Underwater radiation noise power level of different cylindrical shells

200 Hz 的总声功率级为 82.75 dB, ZPR 超材料环肋圆柱壳的总声功率级为 81.62 dB, 且 ZPR 超材料环肋在 80 Hz 后能有效降低双层圆柱壳的水下辐射噪声。

5 结论

(1) 基于多评价点约束的功能基元拓扑优化 (FETO) 法可以设计零泊松比 (ZPR) 超材料, 其构型的泊松比经数值验证具有一定的精度。

(2) 在两种目标函数 FETO 优化模型中, 最大柔度较最小质量目标模型设计并序构的 ZPR 超材料结构具有更好的承载与减振特性。

(3) ZPR 超材料结构应用于双层圆柱壳环肋可

实现外壳受压时内壳的保形, 其将部分压缩变形能转化为内壳的旋转能, 减少了内壳的压缩变形量。

(4) ZPR 超材料环肋可以降低圆柱壳的水下辐射噪声。

参考文献:

- [1] 金忠谋. 材料力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2012.
JIN Zhongmou. Mechanics of materials[M]. Beijing: China Machine Press, 2012(in Chinese).
- [2] 程文杰, 周丽, 张平, 等. 零泊松比十字形混合蜂窝设计分析及其在柔性蒙皮中的应用[J]. 航空学报, 2015, 36(2): 680-690.
CHENG Wenjie, ZHOU Li, ZHANG Ping, et al. Design and analysis of a zero Poisson's ratio mixed cruciform honeycomb and its application in flexible skin[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(2): 680-690(in Chinese).
- [3] ALDERSON K L, ALDERSON A, SMART G, et al. Auxetic polypropylene fibres Part 1-Manufacture and characterisation[J]. *Plastics Rubber and Composites*, 2002, 31(8): 344-349.
- [4] EVANS K E, NKANSAH M A, HUTCHINSON I J, et al. Molecular network design[J]. *Nature*, 1991, 353(6340): 124.
- [5] GIBSON L J, ASHBY M F. Cellular solids: Structure and properties[M]. London: Cambridge University Press, 1997.
- [6] 卢子兴, 赵亚斌. 一种有负泊松比效应的二维多胞材料力学模型[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(5): 594-597.
LU Zixing, ZHAO Yabin. Mechanical model of two-dimensional cellular materials with negative Poisson's ratio[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2006, 32(5): 594-597(in Chinese).
- [7] OLYMPIO K R, GANDHI F. Zero Poisson's ratio cellular honeycombs for flex skins undergoing one-dimensional morphing[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2010, 21(17): 1737-1753.
- [8] 鲁超, 李永新, 董二宝, 等. 零泊松比蜂窝芯等效弹性模量研究[J]. 材料工程, 2013(12): 80-84.
LU Chao, LI Yongxin, DONG Erbao, et al. Equivalent elastic modulus of zero Poisson's ratio honeycomb core[J]. *Journal of Materials Engineering*, 2013(12): 80-84(in Chinese).
- [9] 李杰锋, 沈星, 陈金金. 零泊松比胞状结构的单胞面内等效模量分析及其影响因素[J]. 航空学报, 2015, 36(11): 3616-3629.
LI Jiefeng, SHEN Xing, CHEN Jinjin. Single cells' in-plane equivalent moduli analysis of zero Poisson's ratio cellular structure and their effects factor[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(11): 3616-3629(in Chinese).
- [10] GRIMA J N, OLIVERI L, ATTARD D, et al. Hexagonal honey-

- combs with zero Poisson's ratios and enhanced stiffness[J]. *Advanced Engineering Materials*, 2010, 12(9): 855-862.
- [11] GRIMA J N, ATTARD D. Molecular networks with a near zero Poisson's ratio[J]. *Physica Status Solidi B-Basic Solid State Physics*, 2011, 248(1): 111-116.
- [12] ATTARD D, GRIMA J N. Modelling of hexagonal honeycombs exhibiting zero Poisson's ratio[J]. *Physica Status Solidi B-Basic Solid State Physics*, 2011, 248(1): 52-59.
- [13] SOMAN P, FOZDAR D Y, LEE J W, et al. A three-dimensional polymer scaffolding material exhibiting a zero Poisson's ratio[J]. *Soft Matter*, 2012, 8(18): 4946-4951.
- [14] GONG X, HUANG J, SCARPA F, et al. Zero Poisson's ratio cellular structure for two-dimensional morphing applications[J]. *Composite Structures*, 2015, 134: 384-392.
- [15] HUANG J, GONG X, ZHANG Q, et al. In-plane mechanics of a novel zero Poisson's ratio honeycomb core[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2016, 89: 67-76.
- [16] QIN H, YANG D, REN C. Modelling theory of functional element design for metamaterials with arbitrary negative Poisson's ratio[J]. *Computational Materials Science*, 2018, 150: 121-133.
- [17] QIN H, YANG D, REN C. Design method of lightweight metamaterials with arbitrary Poisson's ratio[J]. *Materials*, 2018, 11(9): 1574.
- [18] 秦浩星, 杨德庆. 任意负泊松比超材料结构设计的功能基元拓扑优化法[J]. *复合材料学报*, 2018, 35(4): 1014-1023.
- QIN Haoxing, YANG Deqing. Functional element topology optimal method of metamaterial design with arbitrary negative Poisson's ratio[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2018, 35(4): 1014-1023(in Chinese).
- [19] NIU B, YAN J, CHENG G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(2): 115-132.
- [20] WANG B, CHENG G D. Design of cellular structures for optimum efficiency of heat dissipation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(6): 447-458.
- [21] 阎军, 邓佳东, 程耿东. 基于柔顺性与热变形双目标的多孔材料与结构几何多尺度优化设计[J]. *固体力学学报*, 2011, 32(2): 119-132.
- YAN Jun, DENG Jiadong, CHENG Gengdong. Multi geometrical scale optimization for porous structure and material with multi-objective of structural compliance and thermal deformation[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(2): 119-132(in Chinese).
- [22] 张卫红, 孙士平. 多孔材料/结构尺度关联的一体化拓扑优化技术[J]. *力学学报*, 2006, 38(4): 522-529.
- ZHANG Weihong, SUN Shiping. Integrated design of porous materials and structures with scale-coupled effect[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(4): 522-529(in Chinese).
- [23] XIA L, BREITKOPF P. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 52(6): 1229-1241.
- [24] 李洪泉. 关于比强度和比模量单位的使用辨析[J]. *宇航材料工艺*, 2012, 42(1): 112.
- LI Hongquan. Analysis on the use of specific strength and specific modulus units[J]. *Aerospace Materials & Technology*, 2012, 42(1): 112(in Chinese).