

基于代理模型的指数型功能梯度板固有频率优化

魏星*, 陈莘莘, 张洪峰, 李舒祺, 姜天缘

(华东交通大学 土木与建筑工程学院, 南昌 330013)

摘要: 针对指数型功能梯度板的固有频率优化问题, 提出一种基于代理模型的优化方法。采用一种基于自然邻近插值的无网格数值方法——自然单元法, 建立功能梯度板的一阶剪切变形理论的自由振动分析格式。选取样本点, 用自然单元法计算相应固有频率, 然后基于此建立梯度指数-频率代理模型, 采用 Nelder-Mead 单纯形法优化梯度指数使板的固有频率达到预设值。通过算例验证算法的计算效率和精度。结果表明, 基于分段三次 Hermite 插值构造的代理模型具有较高的精度; 基于代理模型的优化结果避免了多次调用自然单元法计算频率, 提高了计算效率。

关键词: 无网格法; 功能梯度材料; 代理模型; 频率优化; 自然单元法

中图分类号: O343; TB34 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2019)08-1886-07

Frequency optimization of power-law functionally graded plates via surrogate model

WEI Xing*, CHEN Shenshen, ZHANG Hongfeng, LI Shuqi, JIANG Tianyuan

(College of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A surrogate based technique to address natural frequency optimization problems of a power-law functionally graded plate was proposed. The natural element method was employed to conduct the direct free vibration analysis based on the first order shear deformation plate theory, which is a kind of meshless method based on the natural neighbor interpolation. Initially, some sample data were selected to construct the gradient index-frequency surrogate model. Later, a nonlinear optimization problem of the fundamental frequency was formulated, and the optimum solution was obtained by using Nelder-Mead simplex method. Several numerical examples were given to validate the efficiency and feasibility of the proposed method. It is observed that the piecewise cubic Hermite interpolating polynomial produces the best surrogate model with few sample data. The surrogate-based method improves the numerical efficiency by eliminating repeated frequency calculations.

Keywords: meshless method; functionally graded plates; surrogate model; natural frequency optimization; natural element method

功能梯度材料(Functionally graded material, FGM)是一种新型复合材料^[1], 其组成成分在一维或多维方向上呈连续变化, 因而消除了复合材料中由于材料界面突变而引起的应力集中等问题。另外, 可以通过改变组分材料分布来改善功能梯度材料的力学性能。由于其优异的力学性能及可设计性, 其在生物医学、机械、航空航天、电磁工程等

多个领域都有巨大的应用潜力^[2-3]。作为工程结构中最基本的构件之一, 板的动力性能直接影响结构的动力特性, 因此研究板振动分析非常重要^[4-5]。尹硕辉等^[6]将几何有限元法用于功能梯度板的振动分析。徐坤等^[7]采用虚位移和 Navier 方法求解功能梯度板分析平板振动问题。陈莘莘等^[8]采用无网格方法分析中厚功能梯度板自

由振动问题。基于数值仿真和解析计算结果, 可以通过优化进一步探索功能梯度板的最优力学性能^[9-10]。Ashjari 等^[11]在应力和挠度约束下通过优化组分材料在厚度方向的分布减轻功能梯度板的质量。Taheri 等^[12]用几何曲面描述组分体积分数并通过遗传算法减小最大热应力。王莉华等^[13-14]通过采用无网格径向基函数配点法分析三维功能梯度材料的静动力学问题。

本文将研究指数型功能梯度板固有频率的优化问题, 采用自然单元法 (Natural element method, NEM) 计算指数型功能梯度板的固有频率。自然单元法^[8]是一种以自然邻近插值建立 Galerkin 格式的加权残量法为基础的无网格方法。在优化过程中, 通过迭代计算固有频率以寻找最优解, 故而多次调用自然单元法求解器^[15]。若要提高计算精度则需加密离散点, 同时带来更多计算量。本文引入代理模型减少计算量。传统方法采用线性回归方法构造代理模型^[9-10]。但是, 本文涉及问题的变量少, 传统的线性回归模型恐精度不足。

本文通过研究指数型功能梯度板的梯度指数和固有频率的关系特性, 采用分段三次 Hermite 插值构造梯度指数和固有频率关系的代理模型, 然后采用 Nelder-Mead 单纯形法^[18]优化功能梯度板指数。在迭代过程中不断更新代理模型, 提高模型精度。

1 指数型功能梯度板

功能梯度板如图 1 所示。从一种材料 A (陶瓷) 连续过渡到另一种材料 B (金属)。指数型功能梯度板组分材料 A 的体积分数是一个关于厚度方向坐标 z 的幂函数:

$$V_A = (1/2 + z/h)^n, V_B = 1 - V_A \quad (n \geq 0) \quad (1)$$

其中: V_A 和 V_B 分别为材料 A 和材料 B 的体积分数; h 为板厚; n 为梯度指数。复合材料有效力学参数 $P(z)$ (弹性模量 E 、泊松比 ν 及材料密度 ρ) 可以

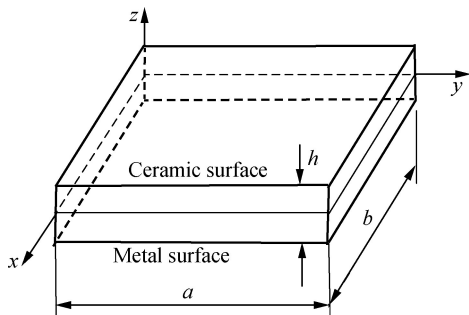


图 1 功能梯度板示意图

Fig. 1 Sketch of functionally graded plate

表示为材料 A 和材料 B 的力学参数 P_A 和 P_B 的线性组合:

$$P(z) = P_A V_A + P_B V_B \quad (2)$$

当 $n = 0$ 时, $P(z) = P_A$; 当 $n = \infty$ 时, $P(z) = P_B$.

2 一阶剪切变形板理论

在一阶剪切变形板理论^[19]中板内任意一点的位移 (u, v, w) 可以表示为

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (3)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

式中: u_0, v_0, w_0 分别为中面 ($z = 0$) 沿 x, y, z 轴方向的位移; θ_x 和 θ_y 分别为横向法线关于 y 和 x 轴方向的转角。由几何关系和本构关系可得应变和应力:

$$\sigma = E(z)(\epsilon^0 + z\kappa); \tau = G(z)\gamma \quad (4)$$

式中: $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$; $\tau = [\tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$; ϵ^0, κ 和 γ 分别表示中面面内应变、曲率和切应变, 弹性矩阵 $E(z)$ 和 $G(z)$ 分别为

$$E(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu(z)}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, $E(z)$ 和 $\nu(z)$ 分别是功能梯度板内任一点的有效弹性模量和泊松比。基于应力得到合力、合力矩、等效剪力为

$$\{N, M\}^T, D\epsilon, Q_s = D^s \gamma \quad (6)$$

其中:

$$(D^m, \bar{B}, D^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz \quad (7)$$

$$D = \begin{bmatrix} D^m & \bar{B} \\ \bar{B} & D^b \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$D^s = \alpha \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz \quad (9)$$

式中: D^m 为拉伸刚度矩阵; $\bar{B}$ 为耦合刚度矩阵; D^b 为弯曲刚度矩阵; D^s 为剪切刚度矩阵; α 为剪切修正因子, 文献[20-21]建议修正因子取 $\alpha = 5/6$ 。由虚位移原理可得到基于一阶剪切变形板理论的平衡方程弱形式为

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T D \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma^T D^s \gamma d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \ddot{m} u d\Omega = 0 \quad (10)$$

其中:

$$\overline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$
$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (11)$$

3 自然单元法离散控制方程

求解域内任意一点 $\mathbf{x}$ 处的位移和转角 $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, \omega_0, \theta_x, \theta_y\}^T$ 可以由相邻节点插值得到:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (12)$$

式中, $u_I (I = 1, 2, \cdots, n)$ 是点 $\mathbf{x}$ 周围自然邻节点 I 的位移, 即

$$\mathbf{u}_I = \{u_{0I}, v_{0I}, \omega_{0I}, \theta_{xI}, \theta_{yI}\} \quad (13)$$

$\varphi_I(\mathbf{x})$ 采用基于邻接点的 Sibson 插值^[22], 基于一次和二次 Voronoi 结构, 点 $\mathbf{x}$ 的形函数及其导数可以写为

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = A_I(\mathbf{x})/A(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$\varphi_{I,j}(\mathbf{x}) = \frac{A_{I,j}(\mathbf{x}) - \varphi_I(\mathbf{x})A_{,j}(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \quad (15)$$

式中, $A_I(\mathbf{x})$ 、 $A(\mathbf{x})$ 分别表示点 $\mathbf{x}$ 的二次和一次 Voronoi 结构的面积. 如在图 2 中, $A(\mathbf{x}) = A_{abcd}$, $A_1(\mathbf{x}) = A_{abfe}$, 此时节点 1 的形函数可写为 $\varphi_1(\mathbf{x}) = A_{abfe}/A_{abcd}$.

基于形函数和几何关系可得应变:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I^m \mathbf{u}_I, \boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I^b \mathbf{u}_I, \boldsymbol{\gamma} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I^s \mathbf{u}_I \quad (16)$$

式中:

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} \varphi_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{I,y} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

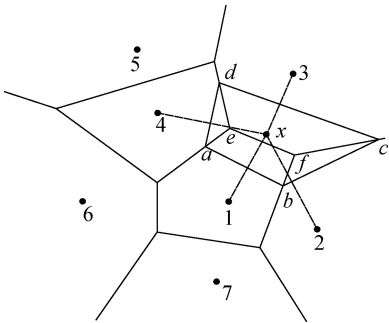


图 2 点 $\mathbf{x}$ 的一次和二次 Voronoi 结构

Fig. 2 First-order and second-order Voronoi cell of point $\mathbf{x}$

$$\mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varphi_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_{I,x} & \varphi_I & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{I,y} & 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \quad (17)$$

将式(16)和式(12)代入式(10), 同时假设振动为简谐振动, 可得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = 0 \quad (18)$$

令 $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ 得到固有频率 ω . 其中: $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为整体刚度矩阵和质量矩阵; ω 为固有频率.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}_J^m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{bT} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{B}_J^m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{mT} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{B}_J^m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}_J^b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}_J^s d\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_I^T \mathbf{m} \mathbf{G}_J d\Omega \quad (20)$$

其中,

$$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \quad (21)$$

4 基于代理模型的基频优化模型

通过优化材料的分布即梯度指数, 实现功能梯度板的固有频率优化. 优化问题的数学模型表达式为

$$\min f(n) = [1 - \omega_1(n)/\omega_{pr}]^2 \quad (22)$$

s. t. $n \geq 0$

其中, ω_{pr} 即为目标一阶固有频率值.

一般解决此问题的思路为: 先用自然单元法计算指定梯度指数的一阶固有频率, 再采用优化算法求解上述问题. 若要提高优化结果的计算精度, 可加密自然单元法的离散点数, 但是过密的离散点又会带来更大的计算量. 整个优化过程中需多次调用自然单元法计算功能梯度板的固有频率. 如果迭代次数过多, 计算效率将会受影响. 鉴于此问题, 本文采用代理模型提高计算效率. 具体计算过程如下: (1) 取出少量样本梯度指数, 并计算对应的固有频率; (2) 基于样本点采用分段三次 Hermite 插值, 建立代理模型; (3) 基于代理模型, 采用 Nelder-Mead 单纯形法求解问题, 并得到参数 n^* ;

(4) 采用自然单元法计算 $\omega_1(n^*)$, 若 $\left| \frac{\omega_1(n^*) - \omega_{pr}}{\omega_{pr}} \right| < 10^{-3}$, 则终止迭代; 否则, 将 $(n^*, \omega_1(n^*))$ 作为数据点更新代理模型, 并重复步骤(2)~(4), 直至收敛。

5 数值算例

本文分析不同边界条件下 Al/Al₂O₃ 功能梯度中厚板的自由振动问题, 并根据预设的第一阶固有频率优化获得 Al₂O₃ 分布规律(梯度指数)。在这些数值算例中, 板结构的材料参数为: Al 的弹性模量 $E_m = 70$ GPa, 泊松比 $\nu_m = 0.3$, 质量密度 $\rho_m = 2707$ kg/m³; Al₂O₃ 的弹性模量 $E_c = 380$ GPa, 泊松比 $\nu_c = 0.3$, 质量密度 $\rho_c = 3800$ kg/m³。常见的边界条件:

简支边界 $\begin{cases} v_0 = w_0 = \theta = 0 & (x = 0, a) \\ u_0 = w_0 = \theta_x = 0 & (y = 0, b) \end{cases}$ (23)

夹支边界 $u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0$ (24)

5.1 算例1

取四边简支方板($a=b=1$)研究, 板的厚跨比为 $h/a=0.2$ 。功能梯度板频率采用无量纲固有频率 $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ 。待优化参数为梯度指数 n , 目标一阶无量纲固有频率 ω_{pr} 设定为 0.1803、0.1631、0.1397、0.1324^[23]。

在使用代理模型计算固有频率之前先测试代理模型的精确性。在 $[0.1, 12]$ 之间取 5~8 个对数等距的梯度指数 n 作为采样点, 分别采用分段三次样条插值、分段三次 Hermite 插值、拉格朗日插值三种方法^[24]构造代理模型, 然后在区间内取 50 个均匀梯度指数 n 作为测试点, 分别用代理模型和自然单元法计算测试点的一阶固有频率, 并计算测试点的平均平方误差列于表 1。平均平方误差的计算公式为

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^*)^2$$
 (25)

表 1 采用 3 种插值方法建立的 Al/Al₂O₃ 功能梯度板固有频率的代理模型误差

Table 1 Errors of surrogate models for natural frequency of Al/Al₂O₃ functionally graded material (FGM) plates based on different interpolation methods

Number of sample point	Interpolation method		
	Piecewise cubic spline interpolation	Langrange interpolation	Piecewise cubic Hermite interpolation
5	1.23×10^{-3}	2.99×10^{-2}	1.11×10^{-6}
6	8.99×10^{-5}	1.85×10^{-2}	5.15×10^{-7}
7	7.09×10^{-6}	1.19×10^{-1}	2.55×10^{-7}
8	7.10×10^{-7}	5.34	5.12×10^{-8}

其中: $\bar{\omega}_i$ 为代理模型计算的无量纲一阶固有频率; $\bar{\omega}_i^*$ 为自然单元法得到的无量纲一阶固有频率; N 是测试点数。平均平方差越接近 0, 则证明代理模型的精度越高。由表 1 可知, 分段三次 Hermite 插值得到的结果最优, 分段三次样条插值得到的计算结果略差于分段三次 Hermite 插值, 但两者计算结果都是稳定收敛的, 而当插值点数过多时拉格朗日插值出现了龙格现象导致计算结果急剧变差。因此在后面的计算中采用分段三次 Hermite 插值构造代理模型。

下文基于代理模型优化梯度指数实现目标频率。初始值设为 $n=2.5$ 。表 2 中给出了目标一阶固有频率, 其对应的最优梯度指数 n 为 0.5、1、4 和 10, 并给出了直接优化和代理模型优化调用自然单元法的次数。在各代理模型中初始数据点数为 5 个, 随着迭代优化, 最终数据点数为 5~6 个, 即整个计算过程中仅需调用自然单元法 5~6 次。而直接优化需要调用自然单元法 26~36 次, 是前者的 4~6 倍。结果表明, 在计算结果相近的情况下, 通过代理模型优化调用自然单元法求解器的次数更少; 同时, 优化迭代过程中采用代理模型计算固有频率, 计算量远小于使用自然单元法直接求解。对于不同目标固有频率, 用代理模型得到的优化结果接近于最优值。随着离散点数变化, 代理模型的优化结果较之于直接优化的结果精度损失较小。综上所述可以看出, 通过代理模型优化可以在精度损失较小的情况下大幅降低计算量。随着离散点数增加, 代理模型的优势愈加明显。

5.2 算例2

取单位圆板($R=1$)作为研究, 全边界为夹支边, 离散点数为 1293 个, 如图 3 所示, 目标频率为无量纲一阶固有频率为 $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ 。根据文献^[20]可知, $\bar{\omega}$ 为 0.086787、厚度与半径之比为 $h/R=0.2$ 时, 最优梯度指数为 1。本例以 0.08679 为目标频率寻找最优梯度指数。

表 2 四边简支 Al/Al₂O₃ 功能梯度方板的优化结果
Table 2 Optimum results for the simply-supported Al/Al₂O₃ FGM square plate

Node distribution	Algorithms	Objective dimensionless frequency $\bar{\omega}_{pr}$							
		0.1805($n=0.5$)		0.1631($n=1$)		0.1397($n=4$)		0.1324($n=10$)	
		Result	Number of NEM evaluation	Result	Number of NEM evaluation	Result	Number of NEM evaluation	Result	Number of NEM evaluation
15×15	Direct	0.5332	28	1.0527	26	4.5070	28	10.8700	36
	Surrogate	0.5326	6	1.0512	6	4.5204	6	10.8171	6
19×19	Direct	0.5215	28	1.0322	26	4.2930	28	10.5100	36
	Surrogate	0.5206	6	1.0302	6	4.2340	5	10.4517	6
23×23	Direct	0.5156	28	1.0223	26	4.1900	28	10.3300	36
	Surrogate	0.5146	6	1.01746	6	4.1320	5	10.1649	6
27×27	Direct	0.5117	28	1.0166	26	4.1320	28	10.2300	36
	Surrogate	0.5112	6	1.0140	6	4.0969	5	10.1649	6
31×31	Direct	0.5098	28	1.0127	26	4.0960	28	10.1700	36
	Surrogate	0.5091	6	1.0104	6	4.0658	5	10.1074	6

Note: n —Gradient index.

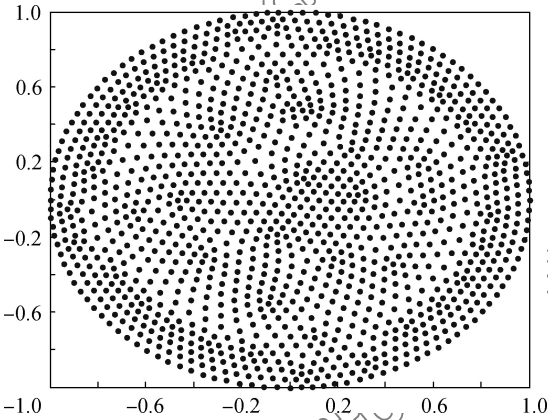


图 3 Al/Al₂O₃ 功能梯度圆板离散点
Fig. 3 Discrete point of the Al/Al₂O₃ FGM disk

表 3 列出了不同初始值下直接优化和基于代理模型优化的结果以及调用自然单元法的次数。结果表明,初值对优化结果无影响,但会影响优化迭代次数。在直接优化中,迭代次数即为调用自然单元法的次数;而在代理模型优化中,自然单元法的调

用次数仅与模型精度要求有关,与迭代次数无关。因此,基于代理模型的优化调用自然单元法远低于直接优化。

6 结 论

(1) 分别采用拉格朗日插值法、分段三次样条插值法、分段三次 Hermite 插值法 3 种常用的插值方法构造功能梯度版代理模型,在测试点处计算这三种方法的平均平方差以比较精度。结果表明,三次 Hermite 插值法优于另外两种插值方法。

(2) 在固有频率和离散点数不同的情况下,采用直接和基于代理模型两种方案分别优化梯度指数,基于代理模型优化得到的结果与直接优化结果相近,且随着离散点数加密,优化结果稳定收敛。

(3) 基于代理模型的优化效率高于直接优化。代理模型在整个计算过程中调用自然单元法的次数是直接计算的 1/6~1/4,有效减少了优化时间。

表 3 不同初始值下 Al/Al₂O₃ 功能梯度圆板的计算结果
Table 3 Optimum results of Al/Al₂O₃ FGM disk with different initial guesses

$\bar{\omega}_{pr} = 0.08679 (n=1)$				
Initial value n_0	Direct		Surrogate model	
	n	Number of NEM evaluations	n	Number of NEM evaluations
0.1	1.0069	34	1.0044	6
1.5	1.0066	24	1.0044	6
3	1.0066	30	1.0044	6
4.5	1.0063	32	1.0044	6
6	1.0066	34	1.0044	6
7.5	1.0063	34	1.0044	6
10	1.0069	34	1.0044	6

Note: NEW—Natural element method.

参考文献:

- [1] 韩杰才, 徐丽, 王保林, 等. 梯度功能材料的研究进展及展望[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(3): 207-215.
HAN Jiecai, XU Li, WANG Baolin, et al. Progress and prospects of functional gradient materials[J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2004, 27(3): 207-215 (in Chinese).
- [2] 凌云汉, 白新德, 李江涛, 等. W/Cu 功能梯度材料的热应力优化设计[J]. 稀有金属材料与工程, 2003, 32(12): 976-980.
LING Yunhan, BAI Xinde, LI Jiangtao, et al. Optimum design of W/Cu functionally graded material for thermal stress mitigation[J]. Rare Metal Materials and Engineering, 2003, 32(12): 976-980.
- [3] SLADEK J, SLADEK V, CUCHI et al. The FEM analysis of FGM piezoelectric semiconductor problems[J]. Composite Structures, 2017, 163: 13-20.
- [4] 王莉华, 仲政. 基于径向基函数配点法的梁板弯曲问题分析[J]. 固体力学学报, 2012, 33(4): 349-357.
WANG Lihua, ZHONG Zheng. Radial basis collocation method for bending problems of beam and plate[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(4): 349-357 (in Chinese).
- [5] SILVA G A L D, NICOLETTI R. Optimization of natural frequencies of a slender beam shaped in a linear combination of its mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 397: 92-107.
- [6] 尹硕辉, 余天堂, 刘鹏. 基于等几何有限元法的功能梯度板自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(24): 180-186.
YIN Shuohui, YU Tiantang, LIU Peng. Free vibration analysis of functionally graded plates using isogeometric finite element method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(24): 180-186 (in Chinese).
- [7] 徐坤, 陈美霞, 谢坤. 正交各向异性功能梯度材料平板振动分析[J]. 噪声与振动控制, 2016, 36(4): 14-20.
XU Kun, CHEN Meixia, XIE Kun. Vibration analysis of orthotropic functionally graded plates[J]. Noise and Vibration Control, 2016, 36(4): 14-20.
- [8] 陈莘莘, 童谷生, 魏星. 基于自然单元法的功能梯度中厚板自由振动分析[J]. 力学季刊, 2016, 37(2): 345-353.
CHEN Shenshen, TONG Gusheng, WEI Xing. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates using the natural element method[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2016, 37(2): 345-353 (in Chinese).
- [9] VO-DUY T, DUONG-GIA D, HO-HUU V, et al. Multi-objective optimization of laminated composite beam structures using NSGA-II algorithm[J]. Composite Structures, 2017, 168: 498-509.
- [10] SAYYAD A S, GHUGAL Y M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature[J]. Composite Structures, 2017, 171: 486-504.
- [11] ASHJARI M, KHOSHRAMAN M R. Mass optimization of functionally graded plate for mechanical loading in the presence of deflection and stress constraints[J]. Composite Structures, 2014, 110: 118-132.
- [12] TAHERI A H, HASSANI B, MOGHADDAM N Z. Thermo-elastic optimization of material distribution of functionally graded structures by an isogeometrical approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 2014, 51(2): 416-429.
- [13] 王莉华, 褚福运, 仲政. 径向基函数配点法分析三维功能梯度材料板的静力和动力问题[J]. 中国科技论文, 2014, 9(2): 201-206.
WANG Lihua, CHU Fuyun, ZHONG Zheng. Radial basis collocation method for the static and dynamic problems of three dimensional functionally graded plate[J]. China Sciencepaper, 2014, 9(2): 201-206 (in Chinese).
- [14] CHU F Y, WANG L H, ZHONG Z, et al. Hermite radial basis collocation method for vibration of functionally graded plates with in-plane material inhomogeneity[J]. Computers & Structures, 2014, 142: 79-89.
- [15] 魏星, 陈莘莘, 童谷生, 等. 基于自然单元法的功能梯度板固有频率优化[J]. 力学季刊, 2017, 38(1): 135-143.
WEI Xing, CHEN Shenshen, TONG Gusheng, et al. Optimum design of functionally graded plates via frequency optimization using natural element method[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2017, 38(1): 135-143 (in Chinese).
- [16] 谭飞, 韩旭. 基于代理模型的功能梯度梁的材料特性参数反求[J]. 复合材料学报, 2008, 25(5): 175-180.
TAN Fei, HAN Xu. Surrogate-based inverse technique for material characterization of functionally graded beam[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(5): 175-180 (in Chinese).
- [17] 许杨剑, 李翔宇, 王效贵. 基于遗传算法的功能梯度材料参数的反演分析[J]. 复合材料学报, 2013, 30(4): 170-176.
XU Yangjian, LI Xiangyu, WANG Xiaogui. Genetic algorithm based inverse analysis for functionally graded material parameters[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2013, 30

- (4): 170-176 (in Chinese).
- [18] 刘盛捷, 付翰初, 魏凯, 等. 基于 Nelder-Mead 单纯形法的逆合成孔径激光雷达联合补偿成像算法[J]. 光学学报, 2018, 38(7): 98-107.
- LIU Shengjie, FU Hanchu, WEI Kai, et al. Jointly compensated imaging algorithm of inverse synthetic aperture lidar based on nelder-mead simplex method[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(7): 98-107 (in Chinese).
- [19] REDDY J N. Analysis of functionally graded plates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 47(1-3): 663-684.
- [20] YIN S, HALE J S, YU T, et al. Isogeometric locking-free plate element: A simple first order shear deformation theory for functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2014, 118(1): 121-138.
- [21] HOSSEINI-HASHEMI S, FABAEE M, ATASHIPOUR S R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2011, 53(1): 11-22.
- [22] CUETO E, SUKUMAR N, CALVO B, et al. Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2003, 10(4): 307-384.
- [23] HOSSEINI-HASHEMI S, BEDROUD M, NAZEM-NEZHAD R. An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity[J]. Composite Structures, 2013, 103: 108-118.
- [24] 石辛民, 郝整清. 基于 MATLAB 的实用数值计算[M]. 北京: 北京交通大学出版社, 2006.
- SHI Xinmin, HAO Zhengqing. Practical numerical calculation based on MATLAB[M]. Beijing: Beijing Jiaotong University Press, 2006 (in Chinese).