

复合材料夹芯圆柱壳水下振动和声辐射的 三维弹性解

仝博, 李永清*, 朱锡, 张焱冰

(海军工程大学 舰船与海洋学院, 武汉 430033)

摘 要: 为获得复合材料夹芯圆柱壳的振动声辐射准确解, 在厚度方向将壳体分成若干薄层, 基于三维弹性理论和状态空间技术, 对每一薄层建立状态空间方程, 并结合位移和应力连续条件, 建立横向位移和应力的传递矩阵。外表面的流体载荷和内表面的点激励通过傅里叶级数展开, 并代入状态空间方程, 获得了复合材料圆柱壳水下振动和声辐射的弹性准确解。应用具体算例, 与有限元仿真和文献计算结果对比。结果表明, 本文的三维弹性理论相较于近似的二维壳体理论更加准确。进一步研究了铺层角、表层和芯材厚度分布及材料损耗因子对振动声辐射的影响。计算结果表明, 在环频率以下的频段, 声功率峰值点数目随铺层角度增加呈“抛物线”型变化趋势; 在环频率以上的高频段, 随着铺层角度增加, 声功率峰值点数目呈先增加后趋于平缓然后继续增加的趋势。随着芯材损耗因子的增加, 声功率峰值逐步降低, 但下降幅度减小。

关键词: 三维弹性理论; 状态空间法; 复合材料夹芯圆柱壳; 水下; 振动声辐射

中图分类号: TB330.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2019)05-1159-10

Three-dimensional elastic solutions for underwater vibration and sound radiation of composite sandwich cylindrical shells

TONG Bo, LI Yongqing*, ZHU Xi, ZHANG Yanbing

(College of Naval Architecture and Ocean Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: In order to obtain the exact solution for the vibration and sound radiation of composite sandwich cylindrical shell, the shell was divided into several thin layers in the thickness direction, the state space equation was established for each thin layer based on three-dimensional elastic theory and state space technique and the transfer matrix of transversal displacement and stress was built considering the continuous condition of displacement and stress. The fluid load on the outer surface and the point excitation on the inner surface were expanded by Fourier series and introduced into the state space equation, the exact elastic solution of underwater vibration and sound radiation of composite sandwich shell was obtained. In contrast to the results by finite element simulation and that from the previous literature, present theoretical model is more accurate than the approximate two-dimensional shell theories. The effect of ply angle, thickness distribution of face and core and loss factor on vibration and sound radiation were further investigated. The results show that in the frequency range below the ring frequency the peak's number of sound power changes as the parabolic curve, and in the middle and high frequency bands above the ring frequency the peak's number of sound power increases first and tends to be gentle, and then continues to increase. With the increasing of core's loss factor, the peak value of sound radiation power gradually decreases, as well as the extent of decline.

Keywords: three-dimensional elastic theory; state space method; composite sandwich shell; underwater; vibration and sound radiation

收稿日期: 2018-05-17; 录用日期: 2018-07-18; 网络出版时间: 2018-09-13 17:33

网络出版地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180911.005>

基金项目: 国家自然科学基金(50979110)

通讯作者: 李永清, 博士, 副教授, 研究方向为船用新材料及其应用 E-mail: liyongqing@126.com

引用格式: 仝博, 李永清, 朱锡, 等. 复合材料夹芯圆柱壳水下振动和声辐射的三维弹性解[J]. 复合材料学报, 2019, 36(5): 1159-1168.
TONG Bo, LI Yongqing, ZHU Xi, et al. Three-dimensional elastic solutions for underwater vibration and sound radiation of composite sandwich cylindrical shells[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(5): 1159-1168 (in Chinese).

复合材料的比刚度大、比强度高,利用这一特点可制造轻质高强的结构件,但对于潜艇结构还要注重其声学性能,夹芯结构形式可以很好满足以上两个方面。表层采用模量较高的纤维增强树脂基复合材料,芯材采用阻尼材料,这样使整体结构既具有较高的承载能力,也具有较好的阻尼减振性能^[1]。圆柱壳作为潜艇的主要结构形式,很多学者已将夹芯材料应用于圆柱壳结构并进行了大量的动力学研究。其中二维的板壳理论是研究夹芯板壳振动特性最常见的方法。李永强等^[2]采用经典层合板理论推导了固支蜂窝夹层板的自由振动方程。王目凯等^[3]基于经典壳体理论采用哈密尔顿原理推导了敷设约束阻尼层薄壁圆柱壳的自由振动求解公式,并研究了几何参数和材料参数对阻尼性能的影响。Zhai等^[4]基于一阶剪切变形理论和哈密尔顿原理推导了复合材料夹芯圆柱壳的自由振动控制方程,由于考虑了转动惯量和剪切变形,该方法可用于中厚度夹芯壳的振动求解。Daneshjou等^[5]基于一阶剪切变形理论分析了多孔芯材粘接功能梯度多层圆柱壳声传递特性。Chandra等^[6]基于简化的一阶剪切理论计算了功能梯度夹芯板的振动声辐射。Rakesh等^[7]基于高阶剪切理论求解了层合三明治圆柱壳的自由振动,该理论既考虑到了(横向正(剪)应变也考虑了横向正(剪)应力,方程中未知数有11个,数值计算结果与文献对比验证了该方法的正确性。刘明^[8]采用高阶夹层板理论研究了多种新型功能梯度材料夹芯夹层板壳的自由振动。邸旭等^[9]将铝基蜂窝芯材等效为正交各向异性材料,基于Reddy三阶剪切板理论,推导了超椭圆蜂窝夹芯板的自由振动方程,与有限元对比验证了该方法的准确性。

由于上述理论均是在厚度方向对位移场、应力场或应变场作了假设,因此经典壳理论、一阶剪切变形理论和高阶剪切变形理论均称之为等效单层壳理论(ESLT)^[10]。锯齿(Zig-Zag)理论和分层理论(LWT)的提出改良了上述理论的不足。这两种理论对层与层间的位移场进行了假定,锯齿理论假定层与层位移呈锯齿形变化,通常将锯齿理论与有限元法结合起来进行振动声辐射的求解。Kulkarni等^[11]基于三阶锯齿理论采用四节点的四边形单元离散复合材料夹芯板,固有频率计算结果与三维弹性解对比得到了验证。任晓辉等^[12]将锯齿理论进行精化,构造了六节点三角形壳单元,推导了夹芯

板自由振动有限元矩阵,数值计算表明相较于传统的锯齿理论精度更高。分层理论是在每一层运用壳理论(经典、一阶、高阶)进行位移场的假定。Liu等^[13]基于分层理论和微分求积有限元法,求解了功能梯度夹芯圆柱壳的自由振动问题。杨少红等^[14]应用混合分层理论求解了黏弹性层合圆柱壳的动力学方程,并指出采用环向加强的黏弹性材料将有效降低层间法向正应力的应力大小。为获得复合材料夹芯结构振动声辐射问题的精确解,一些学者采用无额外假设的三维弹性理论求解圆柱壳动力学特性。Alibeigloo等^[15]基于三维弹性理论,在厚度方向采用状态空间法建立状态方程,求解了功能梯度夹芯板的自由振动,与文献对比验证了方法的准确性。Shaban等^[16]同样基于三维弹性理论和状态空间法,推导了瓦楞夹芯板的弹性解。综上所述,目前针对复合材料夹芯板壳结构的动力学研究大多集中于空气中的自由振动及阻尼性能,对水下振动声辐射的研究较少,且多数采用近似的二维壳体理论,在计算厚壳的振声性能时显得力不从心。

本文将三维弹性理论、分层理论和状态空间法结合起来,利用其各自的优点,对复合材料夹芯圆柱壳的振动声辐射进行理论推导并求得水下振动声辐射的弹性解。并基于此理论模型研究了铺层角、芯材表层厚度比及损耗因子对固有频率和声功率的影响,本文研究可为复合材料夹芯壳的声学设计提供一定的理论指导。

1 理论推导

1.1 基本理论

本文的研究对象为复合材料夹芯圆柱壳,长度为 L ,中面半径为 R ,总厚度为 h ,内外表层为各向异性复合材料层,厚度均为 h_t ,由不同铺设方向的单层组成;芯材为各项同性材料,厚度为 h_c ,几何模型如图1所示。

本文基于三维弹性理论求解夹芯圆柱壳结构的振动声辐射特性,结合分层理论和状态空间法,首先把夹芯厚壳看作是一组柱面平行的“薄壳”理想粘接而成的壳体,对每一层“薄壳”建立三维的状态空间方程。由于各薄层之间理想粘接,不会出现“脱粘”现象,因此可在状态空间方程基础上建立位移和横向应力的传递矩阵,由此可得柱壳内外表面位移和横向应力的关系,再结合内外表面的边界条件(机械激励边界或声固耦合边界),可获得柱壳的运

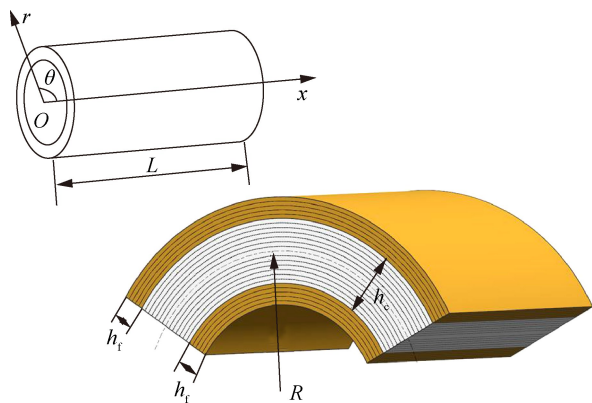


图1 复合材料夹芯圆柱壳三维模型

Fig. 1 3D model of composite and sandwich cylindrical shell

动方程。分层越多,对横向位移(应力)场的描述越准确。对于复合材料表层,可根据纤维铺设角的不同进行分层处理;对于厚度较大的芯层,可以等分成若干薄层(图1所示),分层数目可根据计算成本和计算精度来权衡。

各向异性材料满足广义的胡克定律,即

$$\langle \sigma \rangle = [C] \langle \epsilon \rangle \quad (1)$$

式中: σ 为三个方向的正应力与剪应力; ϵ 为三个方向的正应变与剪应变; $[C]$ 为6阶的刚度矩阵。对于任意角铺设的复合材料多层壳,其材料坐标系与圆柱壳的几何坐标系并不正交,因此其刚度矩阵有13个独立的弹性常数。柱坐标系下其关系式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_r \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: σ_i 和 τ_{ij} 分别为正应力分量和剪应力分量; ϵ_i 和 γ_{ij} 分别为正应变分量和剪应变分量; C_{ij} 为弹性系数,由每层的材料参数及铺层角决定,其具体表达式可见附录A。由于芯材为各项同性的阻尼材料,因此对于芯层内的薄层有 $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$ ^[17]。

根据弹性力学理论,柱坐标系下,应变-位移关系为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \gamma_{x\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (3)$$

式中, u 、 v 、 w 分别为轴向 x 、环向 θ 、径向 r 的位移分量。

在柱坐标体系下,每一薄层的运动平衡方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\tau_{xr}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

式中, ρ 为材料密度。

1.2 状态空间方程的建立

采用三维弹性理论求解板壳结构的动力学特性时,状态空间法是最具优势的处理方法。其最显著特点是状态方程的维度与层数无关,通过建立横向位移和应力的传递矩阵可以将三维问题转换到内外表面进行求解,大大简化了计算量,可用来求解厚度较大、层数较多的多层复合材料结构,同时不会造成计算量的激增^[18]。

首先运用 Galerkin 法建立位移和应力的近似表达式,该表达式既要满足边界条件又要使运动方程成立。传统的 Galerkin 法均采用分离变量法^[19],以径向位移为例,则

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W(r) \sin \lambda x \cos n\theta e^{i\omega t}$$

这种位移表达式将环向位移和轴向位移分离开,但是斜交铺设层合圆柱壳的轴向模态和环向模态存在耦合效应,该位移表达式只满足边界条件,代入运动方程并不能使方程成立。

本文借鉴了 Bert 等^[20]提出的螺旋模式位移表达式,并没有将轴向位移分量和环向位移分量分离,而是并入同一三角函数中,表达式如下:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U(r) \cos(\lambda x + n\theta) e^{i\omega t} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V(r) \cos(\lambda x + n\theta) e^{i\omega t} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W(r) \sin(\lambda x + n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)为单螺旋的位移形式,满足运动方程,但不满足边界条件,因此在式(5)的基础上变形成为双螺旋的位移形式:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [U_1(r) \cos(\lambda_1 x + n\theta) + U_2(r) \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [V_1(r) \cos(\lambda_1 x + n\theta) + V_2(r) \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [W_1(r) \sin(\lambda_1 x + n\theta) + W_2(r) \sin(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t} \quad (6)$$

结合简支边界条件: $v=w=0(x=0, x=L)$, 得

$$\begin{cases} V_1 = -V_2 \\ W_1 = W_2 \\ \cos(\lambda_1 L + n\theta) - \cos(\lambda_2 L - n\theta) = 0 \\ \sin(\lambda_1 L + n\theta) + \sin(\lambda_2 L - n\theta) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

整理式(7), 可得 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2m\pi}{L}$ 。

进一步得出位移和应力的具体表达式为

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [U_1(r) \cos(\lambda_1 x + n\theta) + U_2(r) \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V(r) [\cos(\lambda_1 x + n\theta) - \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W(r) [\sin(\lambda_1 x + n\theta) + \sin(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$\sigma_r = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z(r) [\sin(\lambda_1 x + n\theta) + \sin(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$\tau_{xr} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [X_1(r) \cos(\lambda_1 x + n\theta) + X_2(r) \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t}$$

$$\tau_{\theta r} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Y(r) [\cos(\lambda_1 x + n\theta) - \cos(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t} \quad (8)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$; U_1 、 U_2 、 V 、 W 、 Z 、 X_1 、 X_2 为只与半径 r 有关的系数。当 $U_1 = U_2$, $X_1 = X_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 式(8)就变成了基于分离变量法的位移场和应力场假定, 说明传统 Galerkin 法是双螺旋模式位移的特殊形式。

将式(8)代入式(2)~(4), 约掉方程两边的三角函数项和时间因子, 得到新的运动方程, 定义状态变量为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= [U_1 \quad V \quad W \quad Z \quad X_1 \quad Y]^T \\ \mathbf{F}_2 &= [U_2 \quad V \quad W \quad Z \quad X_2 \quad Y]^T \end{aligned} \quad (9)$$

整理运动方程及应力与位移的关系式, 可得到状态空间方程:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}_1}{dr} &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{F}_1 \\ \frac{d\mathbf{F}_2}{dr} &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

状态空间方程系数矩阵 $\mathbf{Q}_1$ 中将 n 的符号改成 $-n$, 就可得到 $\mathbf{Q}_2$ 表达式。 $\mathbf{Q}_1$ 矩阵中各非零元素为

$$\begin{aligned} Q_{13} &= -\lambda_1, Q_{15} = -C_{44} p_1, Q_{16} = C_{45} p_1, \\ Q_{22} &= \frac{1}{r}, Q_{23} = -\frac{n}{r}, Q_{25} = C_{45} p_1, Q_{26} = -C_{55} p_1, \\ Q_{31} &= \frac{C_{13}}{C_{33}} \lambda_1 + \frac{C_{36}}{C_{33}} \frac{n}{r}, Q_{32} = \frac{C_{23}}{C_{33}} \frac{n}{r} + \frac{C_{36}}{C_{33}} \lambda_1, \\ Q_{33} &= -\frac{1}{r} \frac{C_{23}}{C_{33}}, Q_{34} = \frac{1}{C_{33}}, Q_{41} = -\frac{p_2}{r} \lambda_1 - \frac{p_3}{r^2} n, \\ Q_{42} &= \frac{p_3}{r} \lambda_1 - \frac{p_4}{r^2} n, Q_{43} = \frac{p_4}{r^2} - \rho \omega^2, Q_{44} = \frac{p_5}{r}, \\ Q_{45} &= C_{44} p_1 \left[C_{45} \frac{n}{r} - C_{55} \lambda_1 \right], \\ Q_{46} &= C_{55} p_1 \left[C_{45} \lambda_1 - C_{44} \frac{n}{r} \right], \\ Q_{51} &= C_{66} \frac{n^2}{r^2} - p_6 \lambda_1^2 - p_7 \frac{n}{r} \lambda_1 - \rho \omega^2, \\ Q_{52} &= p_8 n \lambda_1 - p_7 \lambda_1^2, Q_{53} = -\frac{p_2}{r} \lambda_1, Q_{54} = -\frac{C_{13}}{C_{33}} \lambda_1, \\ Q_{55} &= -\frac{1}{r}, Q_{61} = \frac{p_6}{r^2} n + p_8 n \lambda_1, \\ Q_{62} &= C_{66} \lambda_1^2 - p_9 \frac{n}{r} \lambda_1 + p_4 \frac{n^2}{r^2} - \rho \omega^2, \\ Q_{63} &= p_4 \frac{n}{r^2}, Q_{64} = -\frac{C_{23}}{C_{33}} \frac{n}{r}, Q_{66} = -\frac{2}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $p_i (i=1, \dots, 11)$ 表达式为

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{C_{45}^2 - C_{44} C_{55}}, p_2 = \frac{C_{12} C_{33} - C_{13} C_{23}}{C_{33}}, \\ p_3 &= \frac{C_{26} C_{33} - C_{36} C_{23}}{C_{33}}, p_4 = \frac{C_{22} C_{33} - C_{23}^2}{C_{33}}, \\ p_5 &= \frac{C_{23} - C_{33}}{C_{33}}, p_6 = \frac{C_{13} - C_{11} C_{33}}{C_{33}}, \\ p_7 &= \frac{C_{13} C_{36}}{C_{33}}, p_8 = \frac{1}{r} (C_{12} + C_{66} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}}), \\ p_9 &= \frac{C_{23} C_{36}}{C_{33}}, p_{10} = C_{16} - \frac{C_{13} C_{36}}{C_{33}}, p_{11} = C_{66} - \frac{C_{36}^2}{C_{33}} \end{aligned} \quad (12)$$

状态方程式(10)是关于矩阵的一阶齐次线性微

分方程, 其通解为 $\mathbf{F} = e^{Q_j(r-r_0)} \mathbf{F}_0$ 。以夹芯圆柱壳的第 j 薄层为例, 上表面对应的状态变量定义为 $\mathbf{F}_j^+$, 下表面对应的状态变量定义为 $\mathbf{F}_j^-$, 则存在以下关系:

$$\mathbf{F}_j^+ = e^{Q_j h_j} \mathbf{F}_j^- \quad (13)$$

各薄层之间材料属性和铺层角不同, 其刚度矩阵也不尽相同, 因此各层变形情况不一样; 又由于圆柱壳各层理想粘接, 无缝隙, 无相对滑移, 因此层与层之间应力达到平衡才能确保面内剪切(产生剪应力)和法向变形(产生正应力)的协调。综上, 层间交界面处的位移和横向应力是连续的。以第 j 层和 $j+1$ 层的界面为例, 满足以下关系:

$$[u \ v \ w \ \sigma_r \ \tau_{xr}]_{j^+}^T = [u \ v \ w \ \sigma_r \ \tau_{xr}]_{(j+1)^-}^T \quad (14)$$

将式(8)代入式(14), 便可得到第 j 层上表面与第 $j+1$ 层下表面的状态变量间的关系:

$$\begin{aligned} [U_1 \ V \ W \ Z \ X_1 \ Y]_{j^+}^T &= [U_1 \ V \ W \ Z \ X_1 \ Y]_{(j+1)^-}^T \\ [U_2 \ V \ W \ Z \ X_2 \ Y]_{j^+}^T &= [U_2 \ V \ W \ Z \ X_2 \ Y]_{(j+1)^-}^T \end{aligned} \quad (15)$$

根据上述关系式, 依此类推, 不难得出整壳的外表面与内表面之间状态变量的关系:

$$\mathbf{F}_{\text{top}} = \prod_{j=1}^p e^{Q_j h_j} \mathbf{F}_{\text{bottom}} \quad (16)$$

式中: Q_j 为第 j 薄层对应的系数矩阵; h_j 为第 j 层的厚度; p 为总分层数; top 为外表面; bottom 为内表面。

1.3 流体载荷和点力的表达

圆柱壳置于水中, 假定水不可压缩, 且水在壳体表面只产生法向压力, 则有

$$\sigma_r \left[x, \theta, R + \frac{h}{2} \right] = -p_r \quad (17)$$

激励点位于壳体内壁面, 且垂直于壳表面, 因此有

$$\sigma_r \left[x, \theta, R - \frac{h}{2} \right] = F_r \quad (18)$$

式中: p_r 为表面声压; F_r 为表面激励力。则内外表面边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_r \left[x, \theta, R - \frac{h}{2} \right] &= F_r, \sigma_r \left[x, \theta, R + \frac{h}{2} \right] = -p_r, \\ \tau_{xr} \left[x, \theta, R - \frac{h}{2} \right] &= 0, \tau_{xr} \left[x, \theta, R + \frac{h}{2} \right] = 0, \\ \tau_{r\theta} \left[x, \theta, R - \frac{h}{2} \right] &= 0, \tau_{r\theta} \left[x, \theta, R + \frac{h}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

表面声压和内部激励力可用三角函数展开为

$$\begin{aligned} p_r &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{nm} [\sin(\lambda_1 x + n\theta) + \sin(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t} \\ F_r &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{nm} [\sin(\lambda_1 x + n\theta) + \sin(\lambda_2 x - n\theta)] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (20)$$

流体与柱壳的交界面上, 流体径向速度与结构的法向速度一致, 即

$$\frac{\partial p_r}{\partial r} = -i\omega\rho_0 w \Big|_{r=R+h/2} \quad (21)$$

根据势流理论, 柱坐标系下的 Helmholtz 方程^[21]为

$$\frac{\partial^2 p_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p_r}{\partial x^2} + k^2 p_r = 0 \quad (22)$$

结合式(20)~(22), 可得到一个贝塞尔方程, 并求得

$$P_{nm} = -i\omega W Z_{nm}^s \quad (23)$$

式中: W 是壳体表面法向位移; Z_{nm}^s 是声辐射阻抗, 其表达式为

$$\begin{aligned} Z_{nm}^s &= -\frac{8i\rho_0 \lambda_1^2 \omega}{\pi L} \int_0^k \frac{(\cos 0.5\lambda L)^2}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)^2} \\ &\quad \frac{H_n^{(1)}(n, \sqrt{k^2 - \lambda^2} R)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2} H_n^{(1)'}(n, \sqrt{k^2 - \lambda^2} R)} d\lambda \\ &\quad \frac{8i\rho_0 \lambda_1^2 \omega}{\pi L} \int_k^\infty \frac{(\cos 0.5\lambda L)^2}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)^2} \\ &\quad \frac{K_n(n, \sqrt{\lambda^2 - k^2} R)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} K_n'(n, \sqrt{\lambda^2 - k^2} R)} d\lambda \end{aligned} \quad (24)$$

式中: ρ_0 为流体密度; k 为流体中的声波数 ω/c ; $H_n^{(1)}$ 为第一类汉克尔函数; K_n 为第二类修正的贝塞尔函数。

内部激励为点力, 作用点位于 (x_0, θ_0) , 则 F_r 可表示为

$$F_r = \frac{F_0}{R - h/2} \delta(x - x_0) \delta(\theta - \theta_0) \quad (25)$$

式中, F_0 为力的幅值。 $\delta(x - x_0)$ 和 $\delta(\theta - \theta_0)$ 为狄拉克函数。根据傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} F_{nm} &= \frac{2\epsilon_n}{\pi L(R - h/2)} F_0 [\sin(\lambda_1 x_0 + n\theta_0) + \sin(\lambda_2 x_0 - n\theta_0)] \\ \epsilon_n &= \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

1.4 状态方程的求解

将边界条件方程式(19)代入式(16), 可获得水

中圆柱壳在强迫振动情况下内外表面状态变量的关系式：

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V \\ W \\ F_{nm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{bottom}} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} U_i \\ V \\ W \\ P_{nm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{top}} \tag{27}$$

式中， $\boldsymbol{T} = \prod_{j=1}^p \text{e}^{-\boldsymbol{Q}_j h_j}$ 为传递矩阵。将圆柱壳表面声压方程式(23)代入式(27)变形，可得：

$$\begin{bmatrix} T_{41} & T_{42} & T_{43} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{44} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{54} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V \\ W \end{bmatrix}_{\text{top}} = \begin{bmatrix} T_{nm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

式中， T_{ij} 为传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 第 i 行第 j 列的元素。若 $F_{nm}=0$ ，上式就变成了水下圆柱壳的自由振动方程。由于状态变量有两组分别为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ ，因此求解固有频率的方程组也有两组，对于多层圆柱壳，其实固有频率满足以下近似关系：

$$\omega(m,n) \approx \frac{\omega_1(m,n) + \omega_1(m,-n)}{2} \tag{29}$$

当 $F_{nm} \neq 0$ 时，该方程组为非齐次线性方程组，在特定的模态 (m,n) 下，柱壳表面位移的解是唯一的，则系数矩阵行列式不为 0。令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= \begin{bmatrix} T_{41} & T_{42} & T_{43} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{44} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{54} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} - \text{i}\omega Z_{nm}^s T_{64} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{A}_2 &= \begin{bmatrix} T_{41} & T_{42} & F_{nm} \\ T_{51} & T_{52} & 0 \\ T_{61} & T_{62} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

根据克莱姆法则，得到壳体表面法向位移的唯一解：

$$W_{\text{top}} = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|} \tag{31}$$

因此可得圆柱壳表面均方振速：

$$\langle \dot{w}(x,\theta) \dot{w}^*(x,\theta) \rangle = \frac{1}{4} \sum_{nm} \frac{\omega^2}{\epsilon_n} \boldsymbol{W} \boldsymbol{W}^* \tag{32}$$

均方振速级为

$$L_W = 10 \lg \frac{\langle \dot{w}(x,\theta) \dot{w}^*(x,\theta) \rangle}{v_0^2} \tag{33}$$

其中，基准速度 $v_0 = 5 \times 10^{-8} \text{ m/s}$ 。

采用模态叠加法计算辐射声功率：

$$P_W = \frac{S}{4} \text{Re} \left\{ \sum_{nm} \frac{\omega^2}{\epsilon_n} \boldsymbol{W} \boldsymbol{W}^* Z_{nm}^s \right\} \tag{34}$$

声功率级为

$$S_{\text{IL}} = 10 \lg \frac{P_W}{P_{\text{ref}}} \tag{35}$$

其中，参考声功率 $P_{\text{ref}} = 6.7 \times 10^{-19} \text{ W/m}^2$ 。

2 数值计算与验证

本节采用 Mathematica 数学软件对上述理论模型编程计算。对比算例取自文献或有限元计算结果。分别对固有频率、均方振速和声功率进行对比，以验证本文方法的正确性。

2.1 自由振动计算验证

固有频率是圆柱壳水下振动的一个重要参数。首先基于有限元(FEM)计算平台 ABAQUS，对夹芯圆柱壳进行水下自由振动计算。其中，表层较薄，采用 8 节点的连续壳单元(SC8R)，芯材采用具有 20 个节点的二次实体单元(C3D20R)。圆柱壳几何参数为：长度 $L=1 \text{ m}$ ，半径 $R=0.4 \text{ m}$ ，厚度 $h=0.016 \text{ m}$ ，芯层和表层厚度比 $h_c/h_f=2$ ，上下表层等厚度。表层纤维材料参数为：表层密度 $\rho_f=1600 \text{ kg/m}^3$ ，三方向弹性模量为 $E_1=20 \text{ GPa}$ ， $E_2=E_3=1 \text{ GPa}$ ，三方向剪切模量为 $G_{12}=G_{13}=0.65 \text{ GPa}$ ， $G_{23}=0.5 \text{ GPa}$ ，泊松比为 $\mu_2=\mu_{13}=0.25$ ， $\mu_{23}=0.5$ 。芯材为均质材料，材料参数为：芯材密度 $\rho_c=300 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量 $E=5 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\mu=0.35$ ，剪切模量 $G=1.85 \text{ MPa}$ 。铺层方式为 $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/\text{Core}/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ 。固有频率理论计算结果与有限元对比情况如表 1 所示，计算了前 5 阶轴向和环向模态，共 20 个模态振型。可知，本文的三维弹性理论求解的夹芯壳固有频率与有限元计算吻合较好，最大误差不超过 5%，说明了本文理论方法的准确性。

第二个算例为黏弹性夹芯圆柱壳，取自文献[22]，该文采用一阶剪切变形理论分析了黏弹性夹芯圆柱壳的振动和阻尼特性。几何参数为： $L/R=4$ ， $h/R=0.06$ ， $h_c/h_f=1$ 。内外表层材料参数为： $\rho_f=1460 \text{ kg/m}^3$ ， $E_1=76 \text{ GPa}$ ， $E_2=E_3=5.5 \text{ GPa}$ ， $G_{12}=G_{13}=G_{23}=2.3 \text{ GPa}$ ， $\mu_{12}=\mu_{13}=\mu_{23}=0.34$ 。芯材的材料参数为： $\rho_c=1340 \text{ kg/m}^3$ ，复模量 $E=(23+7.82i) \text{ MPa}$ ， $\mu=0.34$ 。两种铺层方式分别为 $0^\circ/\text{Core}/0^\circ$ 和 $90^\circ/\text{Core}/90^\circ$ 。无量纲频率为 $\Omega = \frac{\omega L}{h} \sqrt{\rho_f/E_2}$ 。表 2 为夹芯壳在这两种铺层方式下的无量纲固有频率弹性理论解和文献对比情

表 1 夹芯壳水中固有频率三维弹性解与有限元(FEM)对比

Mode		Frequency/Hz		
<i>m</i>	<i>n</i>	FEM	Present	Error/%
1	2	58.011	60.398	4.110
	3	32.733	33.240	1.550
	4	33.276	33.212	-0.190
	5	44.042	43.057	-2.240
2	2	171.510	173.928	1.410
	3	134.600	136.748	1.590
	4	88.820	88.787	-0.037
	5	73.941	74.384	0.600
3	2	184.450	189.774	2.880
	3	210.890	212.725	0.870
	4	194.670	189.912	-2.440
	5	152.410	156.989	3.000
4	2	196.820	210.975	4.750
	3	222.020	236.286	3.720
	4	247.480	249.336	0.750
	5	245.890	234.246	-4.730
5	2	209.160	216.220	3.370
	3	230.740	236.912	2.670
	4	266.570	260.882	-2.130
	5	285.260	282.445	-0.980

Notes: *m*—Axial half wave number; *n*—Ring to wave numbers

况, 轴向模态 *m* 均等于 1。为了更好地验证本文方法的准确性, 采用成熟的有限元软件 ABAQUS 对该壳体进行了固有频率计算。由于文献采用一阶剪切理论, 假定横向位移场成线性分布, 且对横向位移可能出现的不连续性进行了修正。本文的三维弹性理论未对横向位移和变形做任何假设, 且层间位移和应力按照连续性条件处理, 相比一阶剪切理论更符合实际, 不会由于额外的假设和修正出现较大误差。表 2 的对比结果正反映了这个推论, 文献计

算的固有频率与有限元对比最大误差为 7.64%, 本文方法与有限元对比最大误差为 2.57%。说明了本文三维弹性理论相较于近似的二维壳体理论更加准确。

2.2 振动声辐射计算验证

文献[23]基于 Flugge 理论描述柱壳振动响应, 通过建立辐射阻抗矩阵获得了障柱圆柱壳声辐射功率解析解。圆柱壳几何参数为: $L = 1\text{ m}$, $R = 0.24\text{ m}$, $h = 0.006\text{ m}$, 壳体材质为钢, 激励点坐标为 $(0.19, 0^\circ)$ 。在环频率以下, 采用经典壳理论可以得到较为准确的振动声辐射结果, 因此基于三维弹性理论对该壳体进行振动声辐射求解, 并与文献[23]经典壳理论解进行对比。同时, 基于 Virtual Lab 声学软件采用间接边界元法 (IBEM) 计算该壳体声辐射, 三者对比情况如图 2 所示。

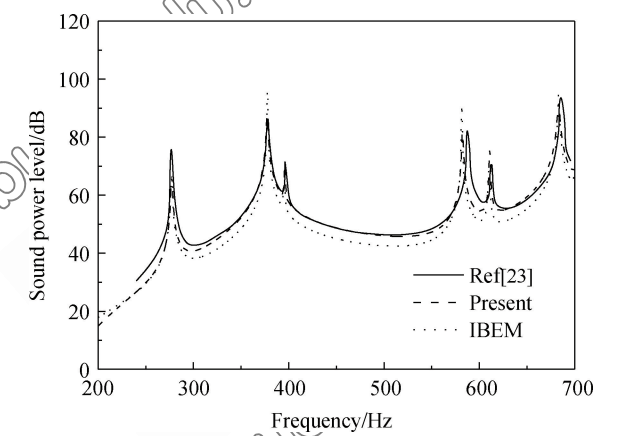


图 2 夹芯圆柱壳声功率级对比
Fig. 2 Acoustic power level comparison of sandwich cylindrical shell (IBEM—Indirect boundary element method)

可以看出, 本文计算的圆柱壳声功率三维弹性解与文献[23]基于二维理论的计算结果一致性很高, 各个共振峰值都能完整捕捉到, 且幅值近似。

表 2 夹芯壳水中无量纲固有频率弹性解与文献对比
Table 2 Comparison of 3D elastic solution for dimensionless natural frequencies of sandwich shell with reference

	<i>n</i>	FEM	Ref[22]	Error/%	Present	Error/%
0°/Core/0°	2	47.37	47.190	-0.36	48.021	1.38
	3	40.17	39.250	-2.30	40.680	1.26
	4	48.32	45.781	-5.26	48.720	0.81
	5	63.77	59.380	-6.88	63.820	0.08
	6	82.65	76.340	-7.64	82.160	-0.60
90°/Core/90°	2	32.69	32.470	-0.67	33.110	1.29
	3	49.29	47.630	-3.37	48.490	-1.61
	4	82.83	80.150	-3.24	84.090	1.52
	5	125.79	122.200	-2.83	128.270	1.97
	6	177.47	172.800	-2.62	182.030	2.57

边界元法计算结果与两种理论的计算结果也能很好地吻合,充分验证了本文方法的正确性。

3 声辐射影响因素

复合材料夹芯壳的表层纤维铺设角度、芯材与表层厚度比、芯材损耗因子这三个参数均会影响整个壳体结构的刚度、质量分布和阻尼,进而影响到壳体的力学性能和声学性能。本节对夹芯壳的强迫振动进行计算,激励点均位于壳体内表面,坐标为(0.5L, 0°)。

3.1 纤维铺层角对声辐射的影响

计算对象与第一个验证算例几何参数和材料参数相同,对称铺层:Φ/−Φ/Φ/−Φ/Core/−Φ/Φ/−Φ/Φ,Φ分别取15°、30°、45°、60°、75°。该壳体环频率为 $f_r=314\text{ Hz}$,将环频率以下定义为低频段,1倍的环频率(f_r)到2倍的环频率($2f_r$)之间定义为中频段,2倍的环频率以上定义为高频段。声辐射功率计算结果如图3所示。可以看出,铺层角不同时,声功率曲线有明显差异。铺层角为30°时,声功率级的峰值最大,将近180 dB。铺层角为15°时,只在低频段出现了两个峰值,中频段和高频段均没有明显峰值点出现。这是由于铺层角度增大,纤维主方向逐渐偏离柱壳轴向,圆柱壳轴向的刚度逐渐降低,固有频率也降低,相同的频率区间内,被激起的模态个数也越多。因此,在铺层角度较小时,峰值点总个数最少。但在不同频段,声功率峰值出现的个数不同。对三个频率区间的声功率峰值数目进行统计,结果见图4。可知,不同频段,声功率级峰值点数目随铺层角的变化规律不同。在中

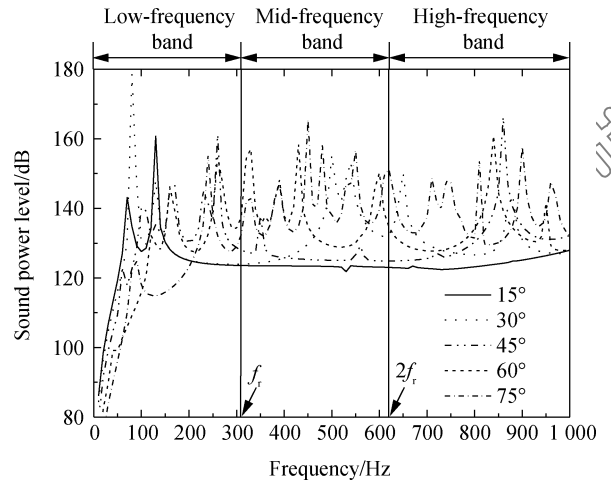


图3 不同铺层角的夹芯圆柱壳声功率级对比

Fig. 3 Acoustic power level comparison of sandwich cylindrical shell with different layer angles

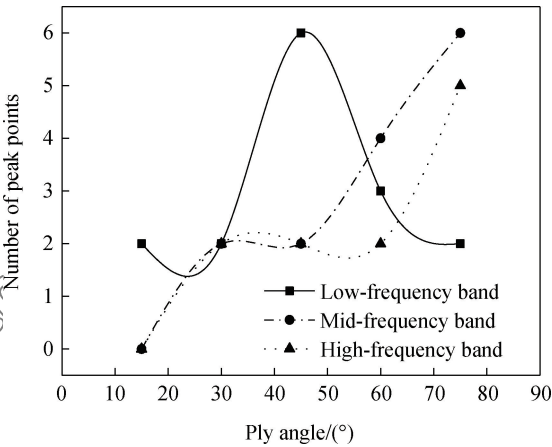


图4 夹芯圆柱壳不同频段内峰值点数目随铺层角的变化

Fig. 4 Variation of peak points number of sandwich cylindrical shell with layer angle in different frequency bands

频段和高频段,这种变化规律相似,随着铺层角度增加,峰值点数目先增加然后趋于平缓,接着随着铺层角度进一步增加而增加。在低频段,随着铺层角度增加,峰值点数目呈“抛物线”型变化趋势。

由以上分析可知,对复合材料多层结构进行声学设计时,铺层角是一个重要的设计变量。对于潜艇结构,主要关注其低频段的声学性能,在声学设计阶段,对壳体的铺层角度进行优化,可得到辐射噪声最低的铺层方式。

3.2 芯材损耗因子对声辐射的影响

为了起到减振降噪作用,夹芯壳的芯材通常采用阻尼材料,其损耗因子($\tan\delta$)明显大于表层纤维。芯材的损耗因子通过复模量体现: $E=5(1+\tan\delta)\text{ MPa}$ 。图5为不同的损耗因子时夹芯壳声辐射功率。可知,损耗因子从0增加到0.1,声功率峰值大幅下降,高频段下降更明显,随着损耗因子

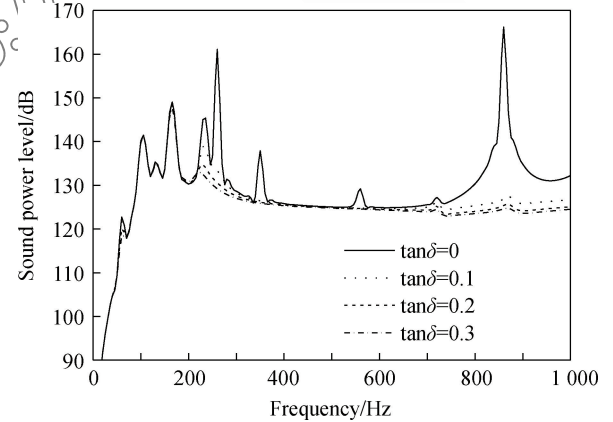


图5 夹芯圆柱壳损耗因子对辐射声功率的影响

Fig. 5 Influence of loss factor on sound power level of sandwich cylindrical shell

进一步增加, 声功率下降幅度减小, 低频段声功率最大降低了 13 dB, 高频段最大降低了 3 dB。

4 结 论

基于三维弹性理论, 采用状态空间技术和分层理论思想, 对复合材料夹芯圆柱壳的水下振动和声辐射进行求解, 并对相关参数进行了分析。

(1) 与有限元仿真和文献计算结果对比发现, 文中的三维弹性理论模型可以准确计算筒支复合材料夹芯圆柱壳的振动和声辐射。

(2) 相较于近似的二维壳体理论, 采用三维弹性理论直接避免了横向应力不连续的现象, 无需额外修正和假设, 理论上精度高于经典壳体理论、一阶剪切变形理论和高阶剪切变形理论等二维壳体理论, 与有限元结果和文献二维壳体理论解对比, 验证了上述观点。

(3) 在环频率以下的频段, 声功率峰值点数目随着铺层角度增加呈“抛物线”型变化趋势; 在环频率以上的中高频段, 随着铺层角度增加, 声功率峰值点数目先增加然后趋于平缓, 接着随着铺层角度进一步增加而增加。可见铺层角对多层复合材料圆柱壳振动声辐射有显著影响, 在声学设计时是一个重要参数。

(4) 随着损耗因子的增加, 声功率峰值下降, 但下降幅度逐步减小, 低频段声功率最大降低了 13 dB, 高频段最大降低了 3 dB。

附录 A

对于各向正交异性材料, 柱坐标系下材料本构为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^z & C_{12}^z & C_{13}^z & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^z & C_{22}^z & C_{23}^z & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^z & C_{23}^z & C_{33}^z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_r \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

其刚度矩阵有 9 个独立的弹性常数。每个弹性常数表达式为

$$\begin{aligned} C_{11}^z &= \frac{E_1(1-\mu_{23}\mu_{32})}{Q}, C_{12}^z = \frac{E_1(\mu_{21}+\mu_{23}\mu_{31})}{Q}, \\ C_{22}^z &= \frac{E_2(1-\mu_{13}\mu_{31})}{Q}, C_{13}^z = \frac{E_1(\mu_{31}+\mu_{21}\mu_{32})}{Q}, \\ C_{33}^z &= \frac{E_3(1-\mu_{12}\mu_{21})}{Q}, C_{23}^z = \frac{E_2(\mu_{32}+\mu_{12}\mu_{31})}{Q}, \end{aligned}$$

$$C_{44}^z = G_{23}, C_{55}^z = G_{31}, C_{66}^z = G_{12},$$

$$Q = 1 - \mu_{12}\mu_{21} - \mu_{23}\mu_{32} - \mu_{31}\mu_{13} - 2\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} \quad (\text{A-2})$$

式中, E_1 、 E_2 、 E_3 为三个方向的弹性模量; μ_{ij} 为泊松比。

对于单斜晶材料, 刚度矩阵有 13 个独立的弹性常数, 其表达式为

$$\begin{aligned} C_{11}^z &= C_{11}^z \cos^4 \varphi + 2(C_{12}^z + 2C_{66}^z) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{22}^z \sin^4 \varphi \\ C_{12}^z &= C_{12}^z (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + (C_{11}^z + C_{22}^z - 4C_{66}^z) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ C_{13}^z &= C_{13}^z \cos^2 \varphi + C_{23}^z \sin^2 \varphi \\ C_{16}^z &= (C_{12}^z + 2C_{66}^z - C_{22}^z) \cos \varphi \sin^3 \varphi + (C_{11}^z - C_{12}^z - 2C_{66}^z) \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ C_{22}^z &= C_{11}^z \sin^4 \varphi + 2(C_{12}^z + 2C_{66}^z) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{22}^z \cos^4 \varphi \\ C_{23}^z &= C_{23}^z \cos^2 \varphi + C_{13}^z \sin^2 \varphi \\ C_{33}^z &= C_{33}^z \\ C_{26}^z &= (C_{12}^z + 2C_{66}^z - C_{22}^z) \cos^3 \varphi \sin \varphi + (C_{11}^z - C_{12}^z - 2C_{66}^z) \cos \varphi \sin^3 \varphi \\ C_{36}^z &= (C_{13}^z - C_{23}^z) \cos \varphi \sin \varphi \\ C_{44}^z &= C_{44}^z \cos^2 \varphi + C_{55}^z \sin^2 \varphi \\ C_{45}^z &= (C_{55}^z - C_{44}^z) \cos \varphi \sin \varphi \\ C_{55}^z &= C_{55}^z \cos^2 \varphi + C_{44}^z \sin^2 \varphi \\ C_{66}^z &= (C_{11}^z + C_{22}^z - 2C_{66}^z) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{66}^z (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

式中, φ 为纤维铺设角。

注: 任意角铺设的复合材料多层壳属于单斜晶材料体系。

参考文献:

- [1] 邓安仲, 李丰恺. 夹芯复合材料阻尼性能的研究进展[J]. 材料导报, 2017, 31(5): 165-171.
DENG A Z, LI F K. Research progress on damping properties of sandwich composites[J]. Materials Review, 2017, 31(5): 165-171 (in Chinese).
- [2] 李永强, 李峰, 何永亮. 四边固支铝基蜂窝夹层板弯曲自由振动分析[J]. 复合材料学报, 2011, 28(3): 210-216.
LI Y Q, LI F, HE Y L. Flexural vibration analysis of honeycomb sandwich plate with completely clamped support[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2011, 28(3): 210-216 (in Chinese).
- [3] 王目凯, 陈照波, 焦映厚, 等. 敷设约束阻尼薄壁圆柱壳的振动特性[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(1): 72-79.

- WANG M K, CHEN Z B, JIAO Y H, et al. Vibration characteristics of thin cylindrical shell with constrained layer damping[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2017, 49(1): 72-79 (in Chinese).
- [4] ZHAI Y C, CHAI M J, SU J M, et al. Dynamics properties of composite sandwich open circular cylindrical shells[J]. *Composite Structures*, 2018, 189: 148-159.
- [5] DANESHJOU K, TALEBITOOTI R, KORNOGAR M. Vibroacoustic study on a multilayered functionally graded cylindrical shell with poroelastic core and bonded-unbonded configuration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 398: 157-175.
- [6] CHANDRA N, GOPALET K V N, RAJA S. Vibro-acoustic response of sandwich plates with functionally graded core[J]. *Acta Mechanica*, 2017, 228: 2775-2789.
- [7] RAKESH K, VIJAY R, AJAY K, et al. Higher-order closed-form solutions for thick laminated sandwich shells[J]. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2005, 7(4): 335-358.
- [8] 刘明. 功能梯度材料软夹芯夹层板壳自由振动解析分析方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2015.
- LIU M. Analytical method of free vibration of sandwich plates and shells with functionally graded flexible core[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2015 (in Chinese).
- [9] 邱旭, 茅献彪. 简支边界条件下超椭圆蜂窝夹芯板的自由振动[J]. *复合材料学报*, 2017, 34(8): 1817-1824.
- DI K, MAO X B. Free vibration analysis of simply supported super elliptical honeycomb panels[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2017, 34(8): 1817-1824 (in Chinese).
- [10] KHEZRI M, GHARIB M, BRADFORD M A, et al. A state space augmented generalised RKPM for three-dimensional analysis of thick and laminated composite plates[J]. *Computers and Structures*, 2015, 158: 225-239.
- [11] KULKARNI S D, KAPURIA S. Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory[J]. *Computational Mechanics*, 2008, 42(6): 803-82.
- [12] 任晓辉, 陈万吉. 复合材料夹层板振动分析的精细化锯齿理论和三角形板单元[J]. *工程力学*, 2012, 29(2): 34-38.
- REN X H, CHEN W J. Triangular plate element based on refined zig-zag theory for free vibration analysis of sandwich plates[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(2): 34-38 (in Chinese).
- [13] LIU B, FERREIRA A J M, XING Y F, et al. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layer wise theory and a differential quadrature finite element method[J]. *Composite Structures*, 2016, 136: 546-553.
- [14] 杨少红, 王安稳. 基于混合分层理论的粘弹层合圆柱壳的阻尼振动和层间应力研究[J]. *工程力学*, 2008, 25(3): 38-42.
- YANG S H, WANG A W. Damping vibration and inter laminar stresses study using mixed layerwise theories for viscoelastic laminated cylindrical shells[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(3): 38-42 (in Chinese).
- [15] ALIBEIGLOO A, ALIZADEH M. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2015, 54: 252-266.
- [16] SHABAN M, ALIBEIGLOO A. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with corrugated cores by using energy method[J]. *Thin-Walled Structures*, 2017, 119: 404-411.
- [17] YE J Q. *Laminated composite plates and shells*[M]. London: Springer, 2003.
- [18] 刘艳红, 王炳华, 卿光辉. 含分层的压电材料层合板的自由振动分析[J]. *工程力学*, 2012, 29(7): 347-352.
- LIU Y H, WANG B H, QING G H. Free vibration analysis of piezoelectric laminated plates with delamination[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(7): 347-352 (in Chinese).
- [19] YANG T L, HUANG Q B, LI S D. Three-dimensional elasticity solutions for sound radiation of functionally graded materials plates considering state space method[J]. *Shock and Vibration*, 2016, DOI: 10.1155/2016/1403856.
- [20] BERT C W, BAKER L, EGLE D M. Free vibrations of multilayer anisotropic cylindrical shells[J]. *Journal of Composite Materials*, 1969, 3(3): 480-499.
- [21] FATHY F, GARDONIO P. *Sound and structural vibration radiation, transmission and response*[M]. Oxford: Academic Press, 2007.
- [22] YANG C M, JIN G Y, LIU Z G, et al. Vibration and damping analysis of thick, cylindrical shells with a viscoelastic core under arbitrary boundary conditions[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 92: 162-177.
- [23] SUN Y, YANG T J, CHEN Y H. Sound radiation modes of cylindrical surfaces and their application to vibro-acoustics analysis of cylindrical shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 424: 64-77.