

正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的无网格法计算模型及应用

张建平*, 王树森, 龚曙光, 申欣, 胡慧瑶

(湘潭大学 机械工程学院, 湘潭 411105)

摘要: 利用无网格伽辽金法(Element-free Galerkin, EFG)建立了正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的计算模型,并推导了正交各向异性材料结构热弹性问题的 EFG 法离散控制方程。选择复合材料冷却栅管算例验证了计算模型和程序的正确性,利用该计算模型分析了具有不同材料方向角及热导率因子、热膨胀系数因子和主次泊松比因子的汽轮机叶轮,得到了其热变形总位移和 Mises 应力,讨论了材料方向角和上述正交各向异性材料因子对其热变形总位移和 Mises 应力的影响规律,给出了这些参数的合理取值范围,并选取一组参数与各向同性材料结构进行了热变形和热应力对比分析。结果表明,基于 EFG 法的热变形总位移和 Mises 应力的计算精度比有限元法高,材料方向角同时影响热变形总位移和 Mises 应力的方向和大小,而正交各向异性材料因子只影响热变形总位移和 Mises 应力的方向,不影响其大小。在复合材料结构设计过程中,合理选取材料方向角和正交各向异性材料因子可有效减小结构热变形和热应力。

关键词: 正交各向异性材料; 无网格法; 热变形; 热应力; 材料方向角

中图分类号: TB330.1; TH114

文献标志码: A

文章编号: 1000-3851(2019)06-1558-10

Meshless model and application for thermal deformation and thermal stress analysis of orthotropic material

ZHANG Jianping*, WANG Shusen, GONG Shuguang, SHEN Xin, HU Huiyao

(School of Mechanical Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: A calculation model for thermal deformation and thermal stress of orthotropic material was established using Element-free Galerkin method (EFG) and the discretized governing equation for the thermoelastic problem of orthotropic material based on EFG method was deduced. The reliability of present model and programs have been verified through a numerical example of composite cooling grid. The total thermal deformation displacement and Mises stress of orthotropic materials turbine impeller with different off-angles, thermal conductivity factors, thermal expansion coefficient factors and primary and secondary Poisson's ratio factors were analyzed using the calculation model. The effects of off-angle and the above orthotropic material factors on total thermal deformation displacement and Mises stress were discussed, and the reasonable ranges of these parameters were provided. A group of parameters were selected to analyze the thermal deformation and thermal stress of orthotropic material by using the proposed calculation model and compared with isotropic materials. The results show that the calculation accuracy of total thermal deformation displacement and Mises stress based on EFG method is higher than the finite element method. The off-angle affects both magnitude and direction of total thermal deformation displacement and Mises stress, while orthotropic factors only affect the magnitude of total thermal deformation displacement and the Mises stress without affecting direction. Reasonable selection of off-angle and orthotropic material factors can effectively reduce the thermal deformation and thermal stress.

收稿日期: 2018-06-19; **录用日期:** 2018-08-15; **网络出版时间:** 2018-09-03 15:29

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20180830.1151.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金(51405415); 湖南省自然科学基金(2016JJ3120); 湖南省教育厅一般项目(18C0087)

通讯作者: 张建平, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为无网格法热结构分析和优化设计 E-mail: zhangjp@xtu.edu.cn

引用格式: 张建平, 王树森, 龚曙光, 等. 正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的无网格法计算模型及应用[J]. 复合材料学报, 2019, 36(6): 1558-1567.

ZHANG Jianping, WANG Shusen, GONG Shuguang, et al. Meshless model and application for thermal deformation and thermal stress analysis of orthotropic material[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(6): 1558-1567 (in Chinese).

tion and thermal stress during the design of composite materials.

Keywords: orthotropic material; element-free Galerkin method; thermal deformation; thermal stress; off-angle

复合材料结构具有优良的抗热应力破坏性, 在动力机械与热工设备中得到广泛应用, 对复合材料结构进行热变形和热应力分析有重要的理论和实际意义^[1]。目前热应力分析主要的计算方法是有限单元法^[2-3](Finite element method, FEM)、有限体积法^[4](Finite volume method, FVM)和边界元法^[5](Boundary element method, BEM)等, Giunta 等^[6]采用有限元法研究了三维各向同性悬臂梁和简支梁的热应力问题; Bressan 等^[7]基于有限体积法计算了冷却板的瞬态温度和瞬态热应力; Mohammadi 等^[8]提出了分析非均匀热源的热弹性问题的边界元法。但 FEM 和 FVM 都是依赖于网格的算法, 网格质量对计算精度影响很大, 而 BEM 虽然只要边界分布就能得到较好的计算精度, 但它仅适用于纯边界积分域分析。无网格法只需节点信息, 摆脱了繁琐的单元网格生成过程, 可减少因网格扭曲或畸变^[9]带来的困难, 有望解决上述问题。王峰等^[10]基于滑动 Kriging 插值的无网格局部 Petro-Galerkin (MLPG) 法求解了简单方板的非耦合热应力问题; 刘宜军等^[11]采用单元基光滑点插值法对高温管道进行了热应力分析; Sladek 等^[12]基于 MLPG 法分析了方板和圆柱的耦合热应力问题。目前无网格伽辽金法 (Element-free Galerkin, EFG) 是无网格法中最成熟的一种, 已得到广泛应用^[13]。Hostos 等^[14]用 EFG 法进行了连铸过程中的热机械耦合分析; Pathak 等^[15]采用 FE-EFG 耦合方法研究了六面体在热负荷环境中的裂纹问题; Bobaru 等^[16]基于 EFG 法研究了线性热弹性体的形状优化问题。但上述研究大都局限于简单结构或各向同性材料结构热应力计算, 没有涉及具有复杂几何形状的正交各向异性材料结构的热变形和热应力分析。张建平^[17-18]利用 EFG 法求解了正交各向异性材料复杂结构的温度场, 但尚未进一步研究正交各向异性材料结构的热变形和热应力问题。

本文利用 EFG 法建立正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的计算模型, 并编写程序将其应用到具有复杂几何结构的汽轮机叶轮热应力问题中, 为正交各向异性材料结构的热弹性分析提供一种高效数值计算方法。

1 无网格 EFG 法基本理论

无网格伽辽金法利用移动最小二乘 (Moving least squares, MLS) 近似逼近未知量场函数 $u(x)$, 其定义在 x 处 $u(x)$ 的 MLS 近似表达式为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = p^T(x) a(x) \quad (1)$$

式中: $p(x)$ 为二维空间坐标的 $x^T = [x, y]$ 的基函数, 为确保基函数 $p(x)$ 的最小完备性, 通常取 Pascal 三角形所决定的单项式, 本文采用单纯的多项式基; m 是单项式或多项式基的项数; $a(x)$ 为一系列系数向量, 是 x 的函数, 通过对泛函 J 求驻点值 $\partial J / \partial a = 0$ 得到。

泛函 J 是未知场变量节点参数值和其近似值而构成的加权残量:

$$J = \sum_{i=1}^n \omega(x - x_i) [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (2)$$

式中: n 为包含在权函数 $\omega(x - x_i) \neq 0$ 的 x 支持域中的节点数, 其中 x 支持域半径为 $d_{\max} = \text{scale} \times s[k]$, scale 为大于 1 的乘子, 本文 scale 选取 1.5, $s[k]$ 表示节点 i 与距其最近的第 k 个节点之间的距离; u_i 为 u 在 $x = x_i$ 处的场函数节点参数。由于 MLS 近似式中的节点数 n 通常大于 m , 故近似函数 $u^h(x)$ 将不通过节点值。其中, 系数向量 $a(x)$ 为

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u_s \quad (3)$$

式中: u_s 为支持域中所有节点的场函数节点参数所形成的向量, 矩阵 A 、 B 定义为

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) p(x_i) p^T(x_i) \quad (4)$$

$$B(x) = [\omega_1(x) p(x_1) \omega_2(x) p(x_2) \cdots \omega_n(x) p(x_n)] \quad (5)$$

将式(3)代入式(1)可得到

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i = \Phi^T(x) u_s \quad (6)$$

式中: $\Phi^T(x)$ 为对应于点 x 的支持域中 n 个节点的 MLS 形函数, 定义为

$$\Phi^T(x) = \{\varphi_1(x) \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)\} = p^T(x) A^{-1} B(x) \quad (7)$$

其中, 节点 i 处形函数 $\varphi_i(x)$ 定义为

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} = p^T(x) (A^{-1} B)_i \quad (8)$$

有关无网格 EFG 法的详细理论参见文献[17, 19]。

2 正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的 EFG 法计算模型

2.1 正交各向异性材料结构的热弹性本构方程

在正交各向异性材料结构 EFG 法热应力分析过程中, 首先要得到其温度场, 然后计算热应变并结合机械力载荷进行应力分析。有关正交各向异性材料结构温度场的 EFG 求解方法可见课题组之前的研究工作^[17-18]。

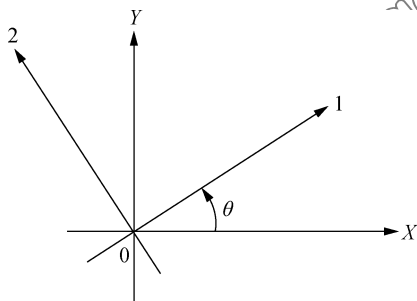


图1 材料主向坐标系与自然坐标系

Fig. 1 Material coordinate system and natural coordinate system

在正交各向异性弹性体内, 应力分量与应变分量之间的关系可由广义虎克定律导出:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$; $Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$; $Q_{33} = G_{12}$;

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

当材料的主向坐标系 1-2 与自然坐标系 X-Y 不一致时, 平面应力变换公式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T_s][Q]([T_s])^T \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - [T_s][Q] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T \quad (10)$$

其中: 坐标转换矩阵

$$T_s = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}, \alpha_1 \text{ 和}$$

α_2 分别为材料坐标系主轴 1, 2 方向的热膨胀系数; ΔT 为 EFG 法计算的温度与参考温度的差值。

2.2 正交各向异性材料结构热弹性问题的 EFG 法离散控制方程

假设正交各向异性材料弹性体的热膨胀系数和材料力学性能参数不受温度变化影响, 且弹性体内部的应力变化也不影响材料热学性能参数, 则热弹性问题的平衡方程及边界条件为

$$\sigma_{ij,i} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (11)$$

$$\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i = 0 \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上} \quad (12)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (13)$$

式中: Ω 为弹性体域; Γ_t 为给定的力边界; Γ_u 为给定的位移边界; $\bar{f}_i$ 为域 Ω 中给定的体力; $\bar{t}_i$ 为给定的面力; n_j 为边界 Γ_t 的外法线方向余弦; $\bar{u}_i$ 为给定的位移。定义在 x 处的热变形位移向量 $u(x)$ 的 MLS 近似表达式为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \hat{u}_i = N^T(x) \hat{u} \quad (14)$$

其中, 节点 i 处形函数 $N_i(x)$ 定义为

$$N_i(x) = \begin{bmatrix} N_i(x) & 0 \\ 0 & N_i(x) \end{bmatrix}$$

因此, 得到域 Ω 内任一点 x 处的应变为

$$\epsilon(x) = (\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy})^T = \sum_{i=1}^n B_i \hat{u}_i \quad (15)$$

式中,

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中, $N_{i,x}$ 和 $N_{i,y}$ 分别表示节点 i 处的形函数对 x 和 y 的导数。

域 Ω 内任一点 x 处的热应力表达式为

$$\sigma = \sum_{i=1}^n [T_s][Q]([T_s])^T B_i \hat{u}_i - [T_s][Q](\beta_T - \beta_0) [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 0]^T \quad (17)$$

其中: β_T 为 EFG 法计算的温度值; β_0 为参考温度。

引入罚函数 $W_u(u) = \alpha \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma$ 来处理热弹性问题的位移边界条件, 从而有变分式,

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i^T \bar{f}_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i (u_i - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (18)$$

其中, α 为罚因子。

将式(14)~(17)代入式(18)得到离散方程为

$$Kd = P \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{T}_s][\mathbf{Q}](\mathbf{T}_s)^T \mathbf{B}_j d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_i^T \mathbf{S} \mathbf{N}_j d\Gamma$$

(20)

$$\mathbf{P}_i = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{T}_s][\mathbf{Q}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_i^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \bar{\mathbf{f}}_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_i^T \bar{\mathbf{S}}_i d\Gamma$$

(21)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

(22)

当 x 或 y 方向有位移约束时, 相应的 s_1 (或 s_2) 等于 1, 否则为 0。

方程(19)计算得到的热变形位移向量 $\mathbf{d}$ 代入方程(17), 便可求出热应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$, Mises 应力的计算公式为

$$\sigma_{\text{Mises}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

(23)

其中: σ_x 为 x 方向的热应力; σ_y 为 y 方向的热应力; τ_{xy} 为剪切应力。

影响热变形和热应力的主要因素是材料方向角 θ 、两个方向的热导率 λ_1 和 λ_2 、热膨胀系数 α_1 和 α_2 及主次泊松比 ν_{12} 和 ν_{21} , 为探讨这些材料参数对正交各向异性材料结构热变形和热应力的影响, 定义 $H_t = \lambda_1/\lambda_2$ 为热导率因子, $P_t = \alpha_1/\alpha_2$ 为热膨胀系数因子, $B_t = \nu_{12}/\nu_{21}$ 为主次泊松比因子。

3 模型验证与工程算例

3.1 EFG 法计算模型的验证

选择复合材料冷却栅管来验证本文所建立的正交各向异性材料结构热弹性问题的 EFG 法计算模型的正确性, 其轴对称结构示意图如图 2 所示, 其中管内热流体温度为 200℃, 压力为 10 MPa, 对流

系数为 110 W/(m²·℃); 管外为空气, 温度为 25℃, 对流系数为 30 W/(m²·℃)。管上下表面施加 y 方向的约束, 管内表面施加全约束。 x 方向热导率和热膨胀系数分别为 $\lambda_1 = 30$ W/(m·℃) 和 $\alpha_1 = 1.5 \times 10^{-5}$, 材料主弹性模量为 $E_1 = 200$ GPa, 主泊松比 $\nu_{12} = 0.2$, 剪切模量为 $G_{12} = 150$ GPa。

采用有限元法并定义一个参考解 (Reference solution, Ref, 极细密节点分布下的有限元解收敛于真实解^[20]) 对 EFG 法模型进行验证, 在复合材料冷却栅管 FEM 热变形和热应力分析中采用四节点四边形单元, 网格数和节点数分别为 1 608 和 1 754; 加密后的参考解单元类型与 FEM 相同, 网格数和节点数分别为 130 248 和 131 554。为进行有效对比, 复合材料冷却栅管的 EFG 积分背景网格为 1 608 个四边形, 计算域用 1 754 个节点进行离散, 令 $\theta = 0^\circ$, $H_t = 0.1$, $P_t = 1/3$, $B_t = 2$ 。在模型上定义如图 2(a)所示的 AB 路径, 从图 3 所示的热变形总位移和 Mises 应力分布云图中发现, EFG 热变形总位移场与 Mises 应力场与 FEM 的计算结果吻合得很好, 图 4 为 EFG 和 FEM 热变形总位移场和 Mises 应力场沿 AB 路径计算值与参考解对比。表明, EFG 解和 FEM 解与参考解基本吻合, 但 EFG 解比 FEM 解更逼近参考解, 从而验证了本文所建立的正交各向异性材料结构热变形和热应力分析的 EFG 法计算模型和计算程序是正确可行的。

在表 1 所示的计算机上对比分析了 EFG 法和 FEM 求解不同热导率因子的复合材料冷却栅管的热应力 CPU 计算时间。可以看出, EFG 法的 CPU 计算时间大约为 FEM 的 2.6 倍, 虽然 EFG 法的计算效率相对偏低, 但在相同的节点配置下 EFG 法可取得比 FEM 更高的计算精度。

表 1 计算机性能配置

Table 1 Performance configuration of computer

Configuration	Parameter
Processor	Intel(R) Core(TM) i5-8600K
Frequency	3.6 GHz
RAM	8.00 GB
Operating system	64 bit

3.2 正交各向异性材料汽轮机叶轮的 EFG 法热变形和热应力

考虑汽轮机叶轮结构及边界条件的对称性, 将其简化为平面问题进行求解, 如图 5 所示。汽轮机叶轮的孔内表面温度为 100℃, y 方向施加位

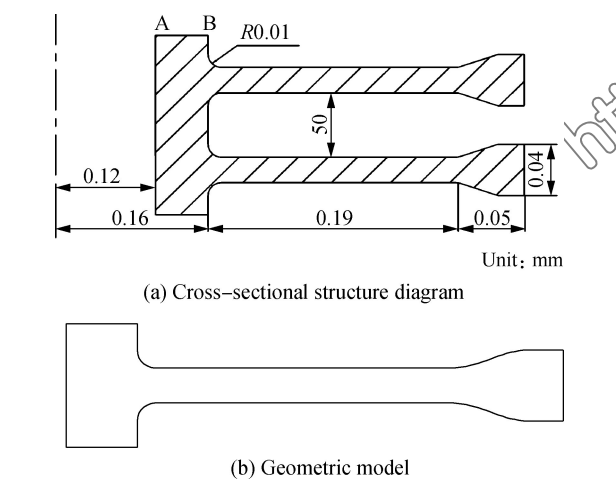


图 2 冷却栅管尺寸和结构示意图

Fig. 2 Size and structure diagram of Cooling grid

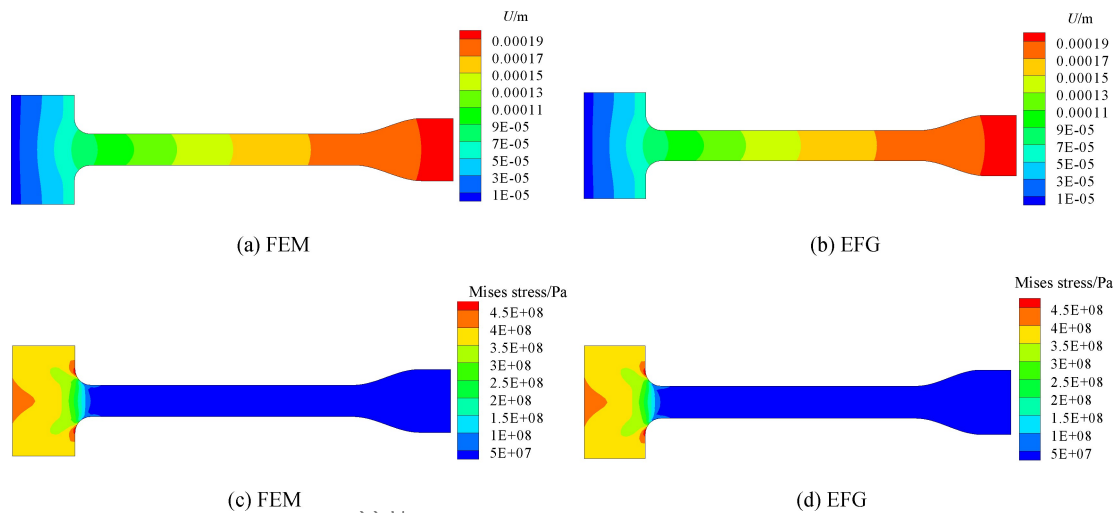


图 3 采用有限单元法(FEM)和无网格伽辽金法(EFG)方法计算研究冷却栅管的热变形总位移场和 Mises 应力场对比
Fig. 3 Comparison of total thermal deformation displacement field and Mises stress field of cooling grid by finite element method(FEM) and Element-free Galerkin(EFG) method

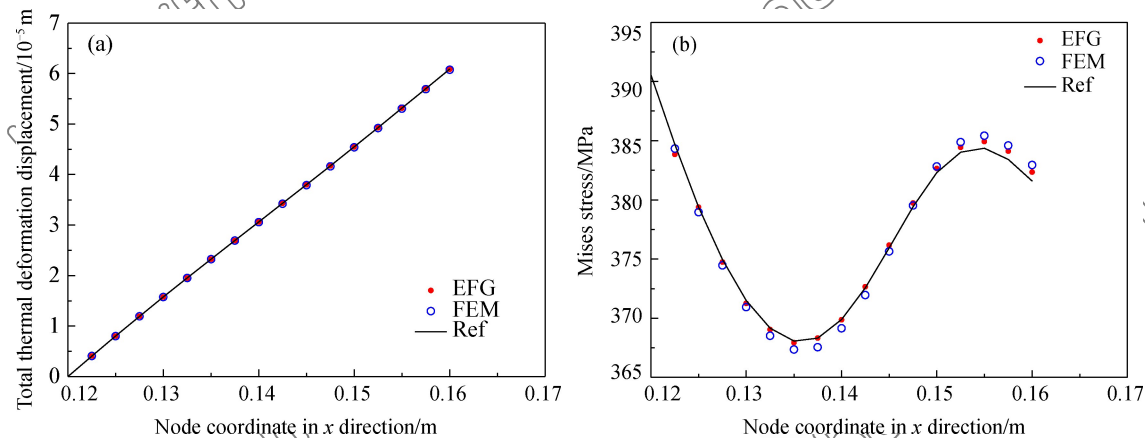


图 4 冷却栅管沿路径 AB(图 2)上热变形总位移值和 Mises 应力值对比

Fig. 4 Comparison of node total thermal deformation displacement and Mises stress by EFG, FEM and reference solutions along the path AB(Fig. 2) of cooling grid

表 2 基于 EFG 和 FEM 的栅管热应力 CPU 计算时间对比
Table 2 CPU time comparison for thermal stress of cooling grid between EFG and FEM

H_t	CPU time/s	
	FEM	EFG
0.1	4.1	11.8
1/3	4.4	11.7
3	4.4	11.8
10	4.5	11.8

Note: H_t — Thermal conductivity factors.

移约束; 规定轴截面为绝热边界, x 方向施加位移约束; 其余为热对流换热边界, 对流换热系数为 $60\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$, 环境介质温度为 300°C , 参考温度为 20°C 。汽轮机叶轮 x 方向热导率和热膨胀系数为 $\lambda_1=80\text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $\alpha_1=2\times 10^{-5}$, 主弹性模量为

$E=200\text{ GPa}$, 主泊松比 $\nu_{12}=0.2$, 剪切模量为 $G_{12}=150\text{ GPa}$ 。

在对比分析过程中, 复合材料汽轮机叶轮 FEM 热变形和热应力求解采用三节点三角形单元, 网格数和节点数分别为 790 和 455; 加密后的参考解采用与 FEM 相同的单元类型, 网格数和节点数分别为 63 990 和 32 527。为进行有效对比, 复合材料汽轮机叶轮的 EFG 积分背景网格为 790 个三角形, 计算域用 455 个节点进行离散, 在模型上定义如图 5(a)所示的 AB 路径。取参数 $H_t=0.1$ 、 $P_t=0.5$ 、 $B_t=2$, θ 分别取 0° 、 15° 、 30° 、 60° 、 75° ; $\theta=0^\circ$ 、 $P_t=0.5$ 、 $B_t=2$, H_t 分别取 0.1、0.2、5、10; $\theta=0^\circ$ 、 $H_t=0.1$ 、 $B_t=2$, P_t 分别取 0.2、0.5、

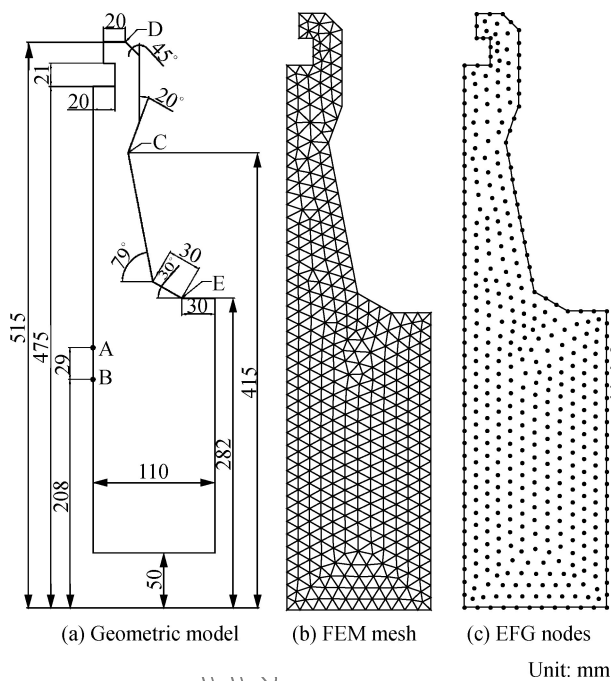


图5 汽轮机叶轮平面简化图

Fig. 5 Simplified plane graph of turbine impeller

2、5； $\theta=0^\circ$ 、 $H_t=0.1$ 、 $P_t=0.5$ ， B_t 分别取 0.4、0.5、2、2.5。分别用本文计算模型求解汽轮机叶轮的热变形总位移和 Mises 应力，得到对应的云图及沿路径 AB 的曲线。

图 6 分别比较了材料方向角 θ 从 0° 增大到 60° 的热变形总位移和 Mises 应力分布云图，图 6(a)~6(c)表明， θ 从 0° 增大到 60° ，汽轮机叶轮的热变形总位移也随着角度变化发生倾斜，倾斜的角度和幅度都与材料方向角基本一致；热变形总位移呈现出上部数值大而下部数值小的分布，因此材料方向角同时影响热变形总位移的方向和大小。图 6(d)~6(f)表明， θ 从 0° 增大到 60° ，Mises 应力场发生明显变化，但其变化与材料方向角的倾斜并不一致，主要是 Mises 应力的大小发生明显变化，因此材料方向角只影响 Mises 应力的大小。结合图 8(a)和图 9(a)的曲线，材料方向角较小时可减小结构的热变形和热应力，合理的取值范围为 $0^\circ\sim 15^\circ$ 。

图 7 分别比较了热膨胀系数因子 P_t 从 0.5 增大到 5 的汽轮和叶轮热变形总位移和 Mises 应力分布云图，图 8 和图 9 分别为其沿路径 AB 的热变形总位移和应力值对比曲线。图 7(a)~7(c)表明，随着 P_t 的增大，汽轮机叶轮 y 方向的变形量逐渐减小，而 x 方向的变形量逐渐增加，因此，热膨胀系数因子影响热变形总位移的主变形方向，热膨胀系

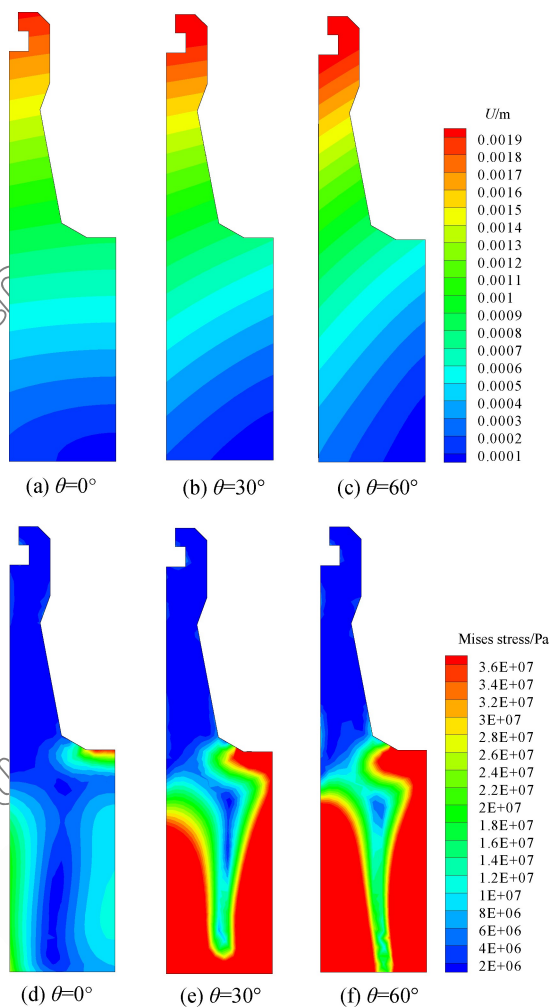


图 6 汽轮机叶轮热变形总位移场和 Mises 应力场对比

Fig. 6 Comparison of total thermal deformation displacement field and Mises stress field of turbine impeller

数因子较小时，热变形以 y 方向为主，反之，热变形以 x 方向为主。图 7(d)~7(f)表明，随着 P_t 的增大，汽轮机叶轮 x 和 y 方向的 Mises 应力都逐渐减少。对同一模型热膨胀系数因子影响热变形总位移和 Mises 应力的大小的变化趋势是相同的，如果热变形总位移随热膨胀系数因子的增大而增大，那么 Mises 应力也会随热膨胀系数因子的增大而增大；反之亦然。结合图 8(c)和图 9(c)的曲线，热膨胀系数因子较大时可减小结构的热变形和热应力，合理的取值范围为 2~5。

如图 8(b)和图 9(b)所示，汽轮机叶轮的热变形总位移和 Mises 应力都随着热导率因子的增大而增大。图 8(d)和图 9(d)表明，主次泊松比因子对热变形总位移影响很小，但 Mises 应力随着主次泊松比因子的增大而减小。因此，为减小结构的热变

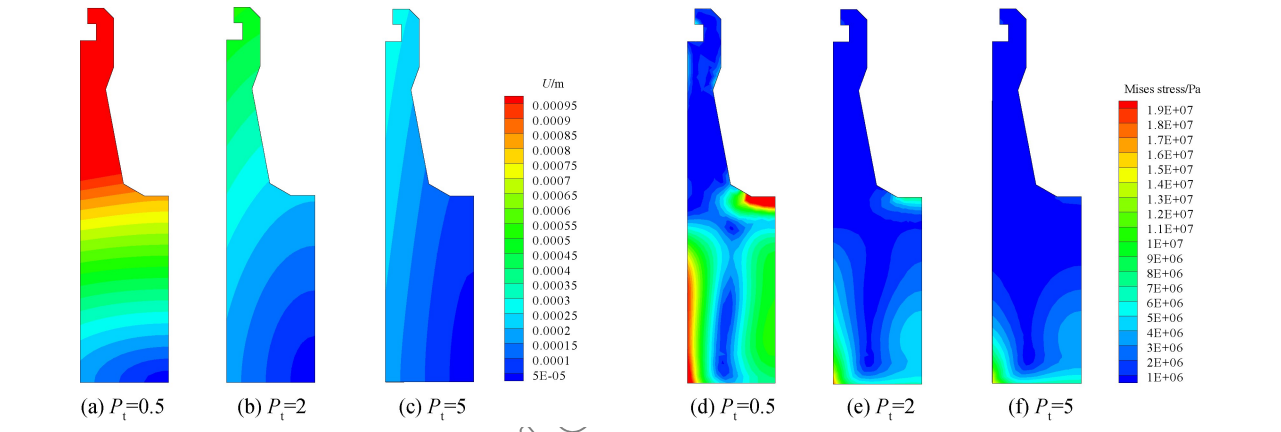


图 7 汽轮机叶轮热变形总位移场和 Mises 应力场对比

Fig. 7 Comparison of total thermal deformation displacement field and Mises stress field of turbine impeller

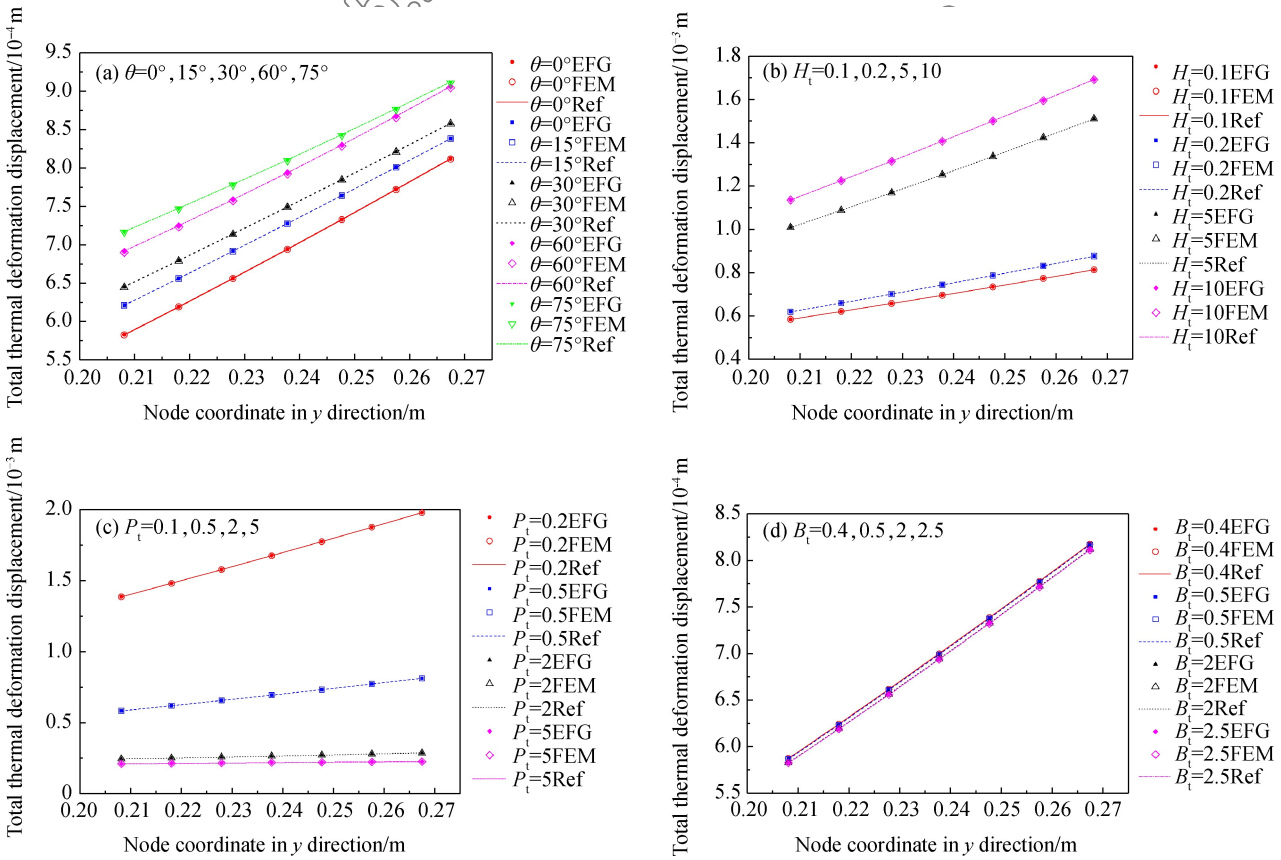


图 8 汽轮机叶轮沿路径 AB(图 2)热变形总位移值对比曲线

Fig. 8 Comparison of total thermal deformation displacement by EFG, FEM and reference solutions at nodes along the path AB(Fig. 2) of turbine impeller

形和热应力，热导率因子的合理取值范围为 0.1～0.2，主次泊松比因子的合理取值范围为 2.0～2.5。

表 3 对比了 EFG 法和 FEM 求解不同热膨胀系数因子的复合材料汽轮机叶轮的热应力 CPU 计算时间。可以看出，EFG 法的计算效率比 FEM 稍微偏低。但是，从图 8 和图 9 可以看出，在不同的

材料方向角和正交各向异性材料因子下，热变形总位移和 Mises 应力的 EFG 解都比 FEM 解更靠近参考解，具有更高的计算精度。这不仅验证了本文所建立的热变形和热应力分析 EFG 法计算模型适用于复杂几何形状的工程问题，也充分显示了无网格 EFG 法的优势。

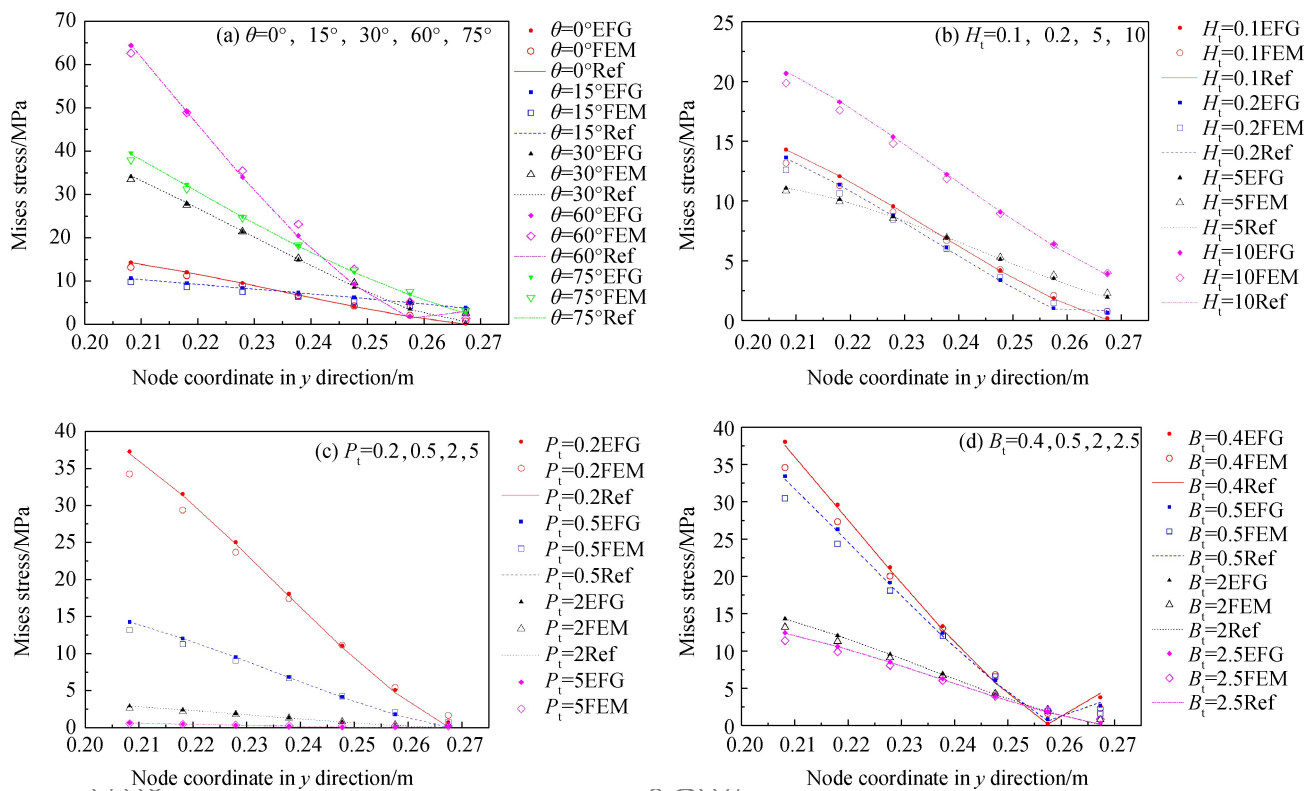


图9 汽轮机叶轮沿路径 AB Mises 应力值对比曲线

Fig. 9 Comparison of Mises stress by EFG, FEM and reference solutions at nodes along the path AB of turbine impeller

表3 基于 EFG 和 FEM 的叶轮热应力 CPU 计算时间对比

Table 3 CPU time comparison for thermal stress of turbine impeller between EFG and FEM

P_t	CPU time/s	
	FEM	EFG
0.2	1.7	3.4
0.5	1.6	3.4
2	1.7	3.5
5	2.1	3.4

Note: P_t — Thermal expansion coefficient factors.

表4 是不同材料方向角下汽轮机叶轮 C、D、E 三点(图 5(a)中)的热变形总位移和 Mises 应力的 EFG 解、FEM 解和参考解对比。可以看出,不同材料方向角下 C、D、E 三点处的热变形总位移的 EFG 解、FEM 解与参考解吻合得很好, EFG 解更接近参考解; C、D、E 三点处的 Mises 应力的 EFG 解、FEM 解与参考解的误差均较大,但 EFG 解更接近参考解。说明在相同节点数下,基于 EFG 法的热变形总位移和 Mises 应力的计算精度比有限元法高。

3.3 正交各向异性材料和各向同性材料汽轮机叶轮的对比

当 $H_t = 1$ 、 $P_t = 1$ 、 $B_t = 1$ 和 $\theta = 0^\circ$, 即为各向

同性材料; 根据参数的合理取值范围, 取 $H_t = 0.1$ 、 $P_t = 5$ 、 $B_t = 2.5$ 和 $\theta = 0^\circ$ 的各向异性材料和各向同性材料的汽轮机叶轮, 利用本文计算模型进行热变形和热应力分析, 如图 10 所示。表明, 各向异性材料汽轮机叶轮的热变形总位移和 Mises 应力比各向同性材料的降低很多, 因此合理选取材料方向角和正交各向材料异性因子, 可有效减小热变形总位移和 Mises 应力。

4 结 论

(1) 利用无网格伽辽金法(Element-free Galerkin, EFG)法建立了正交各向异性材料结构的热变形和热应力计算模型, 推导了正交各向异性材料结构热弹性问题的 EFG 法离散控制方程, 并编程完成了具有不同材料方向角和正交各向异性材料因子的汽轮机叶轮的无网格法热变形和热应力分析, 结果表明, EFG 法热变形总位移和 Mises 应力与有限元结果吻合得较好, 且在相同节点布置下 EFG 法的计算精度比有限元法高。

(2) 材料方向角同时影响热变形总位移和 Mises 应力的大小和方向, 而正交各向异性材料因子只影响热变形总位移和 Mises 应力的大小, 不影响

表 4 不同材料方向角下汽轮机叶轮 C、D、E 三点(图 5(a))的热变形总位移和 Mises 应力的 EFG 解、FEM 解和参考解对比

Table 4 Comparison of EFG solutions, FEM solutions and reference solutions of total thermal deformation displacement and Mises stress of turbine impeller C, D and E points(Fig. 5(a)) under different off-angles							
Off-angles $\theta/(^{\circ})$	Contrastive items	Total Thermal Deformation displacement/mm			Mises stress/MPa		
		C	D	E	C	D	E
0	EFG	1.4253	1.9201	0.82530	2.2623	2.1204	28.3124
	FEM	1.4256	1.9192	0.82575	0.5240	1.2165	21.4531
	Ref	1.4253	1.9206	0.82507	2.9940	0.7868	39.6957
15	EFG	1.4274	1.9407	0.79628	2.5776	1.8708	15.8436
	FEM	1.4246	1.9330	0.79602	1.7024	0.2396	11.9260
	Ref	1.4276	1.9417	0.79625	3.8097	0.5203	22.4415
30	EFG	1.4955	2.1150	0.76558	0.5834	1.1633	69.8705
	FEM	1.4858	2.0899	0.76414	1.8164	0.2708	56.9044
	Ref	1.4964	2.1188	0.76604	1.0581	0.2538	94.7827
60	EFG	1.5240	2.1772	0.69104	1.3660	0.5330	76.6056
	FEM	1.5161	2.1604	0.68954	0.8230	0.5932	72.1756
	Ref	1.5247	2.1781	0.69186	2.6856	0.1154	97.3934
75	EFG	1.4067	1.9585	0.65131	1.5569	0.2209	41.7893
	FEM	1.4044	1.9549	0.65058	0.9067	0.5418	35.8302
	Ref	1.4068	1.9586	0.65158	2.7183	0.1872	53.3952

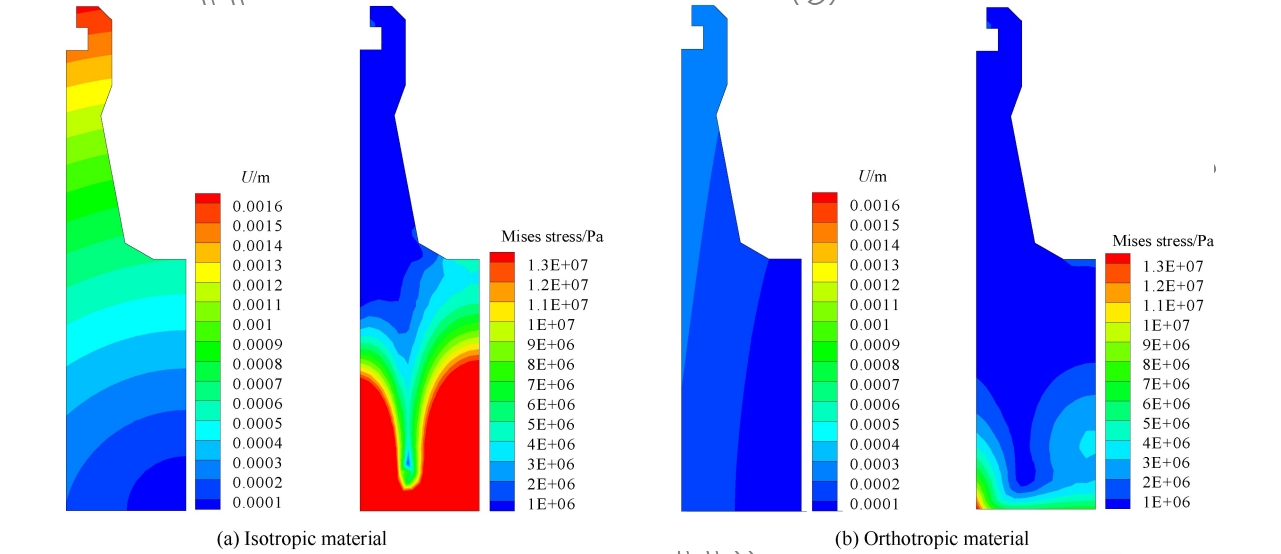


图 10 各向同性材料和各向异性材料汽轮机叶轮结果对比
Fig. 10 Comparison of total thermal deformation displacement field and Mises stress field of isotropic and orthotropic turbine impeller

其方向。热膨胀系数因子影响热变形总位移的主要变形方向,热膨胀系数因子小于 1 时,热变形以 y 方向为主,反之,热变形以 x 方向为主。

(3) 对于汽轮机叶轮,为减小结构的热变形和热应力,建议材料方向角的合理取值范围为 $0^{\circ}\sim 15^{\circ}$,热导率因子的取值范围为 $0.1\sim 0.2$,热膨胀系数因子的取值范围为 $2\sim 5$,主次泊松比因子的取值范围为 $2.0\sim 2.5$ 。在复合材料结构设计过程中合理控制材料方向角和上述正交各向异性材料因子,能有效改善其热变形和热应力分布。

参考文献:

[1] 张洪武,王鲲鹏. 弹塑性正交各向异性材料多尺度计算模型与算法研究[J]. 复合材料学报,2003,20(1): 60-66.
ZHANG Hongwu, WANG Kunpeng. Numerical model and algorithm for multi scale analysis of elastic plastic composite materials[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2003, 20 (1): 60-66 (in Chinese).

[2] BURLAYENKO V N, ALTENBACH H, SADOWSKI T, et al. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements

- [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 45: 422-438.
- [3] 杨东生, 张盛, 张洪武. 基于耦合扩展多尺度有限元方法的功能梯度材料热应力分析[J]. *复合材料学报*, 2015, 32(4): 1107-1117.
- YANG Dongsheng, ZHANG Sheng, ZHANG Hongwu, et al. Thermal stress analysis of functionally graded material based on coupling extended multiscale finite element method [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, 32(4): 1107-1117 (in Chinese).
- [4] KIM K M, PARK J S, DONG H L, et al. Analysis of conjugated heat transfer, stress and failure in a gas turbine blade with circular cooling passages[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2011, 18(4): 1212-1222.
- [5] HEMATIYAN M R, MOHAMMADI M, MARIN L, et al. Boundary element analysis of uncoupled transient thermo-elastic problems with time and space dependent heat sources [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(5): 1862-1882.
- [6] GIUNTA G, DE PIETRO G, NASSER H, et al. A thermal stress finite element analysis of beam structures by hierarchical modelling[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2016, 95 (11): 179-195.
- [7] BRESSAN J D, MARTINS M M, VAZ JR M. Stress evolution and thermal shock computation using the finite volume method[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2010, 33(6): 533-558.
- [8] MOHAMMADI M, HEMATIYAN M R, ALIABADI M H. Boundary element analysis of thermo-elastic problems with non-uniform heat sources[J]. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2010, 45(8): 1-23.
- [9] SHANG Y, OUYANG W G. 3-node unsymmetric quadrilateral membrane element with drilling DOFs insensitive to severe mesh-distortion[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 113(20): 1589-1606.
- [10] 王峰, 周宜红, 郑保敬, 等. 基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法求解结构非耦合热应力问题[J]. *应用数学和力学*, 2016, 37(11): 1217-1227.
- WANG Feng, ZHOU Yihong, ZHENG Baojing, et al. A meshless local Petrov-Galerkin method based on the moving kriging interpolation for structural uncoupled thermal stress analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37 (11): 1217-1227 (in Chinese).
- [11] 刘宜军, 鲁欢, 张桂勇, 等. 采用单元基光滑点插值法的高温管道热应力分析[J]. *浙江大学学报: 工学版*, 2016, 50 (11): 2113-2119.
- LIU Yijun, LU Huan, ZHANG Guiyong, et al. Thermal stress analysis of high temperature pipe using cell-based smoothed point interpolation method (CS-PIM)[J]. *Journal of Zhejiang University: Engineering Science*, 2016, 50(11): 2113-2119 (in Chinese).
- [12] SLADEK J, SLASWK V, ZHANG C H, et al. Meshless local Petro-Galerkin method for linear coupled thermoelastic analysis[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 16(1): 57-68.
- [13] JABERZADEH E, AZHARI M, BOROOMAND B. Thermal buckling of functionally graded skew and trapezoidal plates with different boundary conditions using the element-free Galerkin method[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2013, 42: 18-26.
- [14] HOSTOS J C, BENCOMO A D, PUCHI CABRERA E S. Simple iterative procedure for the thermal-mechanical analysis of continuous casting processes, using the element-free Galerkin method[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2017, 41(2): 160-181.
- [15] RATHAK H, SINGH A, SINGH I V. Simulation of 3-D thermo-elastic fracture problems using coupled FE-EFG approach[J]. *Procedia Materials Science*, 2014, 6: 1927-1935.
- [16] BOBARU F, MUKHERJEE S. Meshless approach to shape optimization of linear thermoelastic solids[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(4): 765-796.
- [17] ZHANG J P, ZHOU G Q, GONG S G, et al. Steady heat transfer analysis of anisotropic structure based on Element-Free Galerkin method[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2017, 121: 163-181.
- [18] ZHANG J P, ZHOU G Q, GONG S G, et al. Transient heat transfer analysis of anisotropic material by using Element-Free Galerkin method[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2017, 84: 134-143.
- [19] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256.
- [20] WU S C, LIU G R, CUI X Y, et al. An edge-based smoothed point interpolation method (ES-PIM) for heat transfer analysis of rapid manufacturing system[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(9-10): 1938-1950.