

磁致伸缩层合悬臂梁式作动器的振动分析

徐燕, 尚新春*

(北京科技大学 数理学院 应用力学系, 北京 100083)

摘 要: 为了分析磁致伸缩薄膜型层合悬臂梁式作动器的振动问题, 应用磁致伸缩材料的非线性本构关系, 由哈密尔顿原理导出了双层悬臂梁的振动微分方程。采用分离变量方法和常微分方程组的解析解法对磁致伸缩薄膜型层合悬臂梁的自由振动和受迫振动进行了理论分析。数值算例表明本文计算结果与有限元结果吻合较好, 从而佐证了本文理论模型和求解方法的正确性, 并讨论了几何参数、材料参数对层合梁固有频率的影响。还分析了在周期输入磁场激励下悬臂梁的挠度响应, 且挠度响应呈现出倍频效应的动态特性。

关键词: 作动器; 磁致伸缩; 层合梁振动; 解析解; 倍频效应

中图分类号: TB34

文献标志码: A

文章编号: 1000-3851(2019)05-1319-08

Vibration analysis of magnetostrictive laminated cantilever actuator

XU Yan, SHANG Xinchun

(Department of Applied Mechanics, School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Differential equation to analyze the vibration problem of a magnetostrictive laminated cantilever with thin-film actuator was derived by Hamilton's variational principle, using the nonlinear constitutive relation of magnetostrictive material. The free vibration and forced vibration of magnetostrictive laminated cantilever with thin-film were analyzed by means of the methods of separation variables and the analytic solution of ordinary differential equations. The numerical example shows that the calculation results of this paper are in good agreement with finite element results, which evidences validity of the theoretical model and solution method, and the effect of the geometric parameters and material parameters on natural frequency of the laminated beam was discussed. The deflection response of beam excited by a periodic input magnetic field was also analyzed, which present the dynamic characteristic of frequency multiplying effect. The deflection response of the cantilever beam excited by a periodic input magnetic field was also analyzed, which presented the double frequency effect of dynamic characteristics.

Keywords: actuator; magnetostrictive; laminated vibration; analytic solution; frequency multiplying effect

磁致伸缩材料在机电系统的主动振动控制和能量捕获等方面发挥着功能性和智能型的重要作用。由于磁致伸缩材料在外加磁场的作用下具有良好的机电性能, 被越来越多地应用在基于振动形式微作动器和传感器的设计与制造^[1-4]。磁致伸缩微作动器主要有杆式和梁式两种结构形式, 对于杆式作动器的纵向振动分析, 相关实验、理论分析和数值模拟已有较多的研究工作^[4-6]。

磁致伸缩材料以薄膜的形式沉积在非磁性硅、

玻璃等基片上组成智能结构, 利用外磁场变化使薄膜伸长或缩短从而带动基片产生弯曲变形。这种薄膜型层合悬臂梁式的磁致伸缩作动器具有输出位移大、输出力大、驱动方法简单及易于实现微型化和集成化等特点, 在微机械和微系统等工程领域中已得到应用。例如, 1993 年日本的 Honda 等^[7]研制了双金属片式磁致伸缩悬臂梁作动器。1994 年德国的 Quandt 等^[8]研究设计了双层薄膜型悬臂梁式磁致伸缩执行器, 并通过实验获得了挠度与磁场强

收稿日期: 2018-05-04; 录用日期: 2018-07-14; 网络出版时间: 2018-08-29 09:45

网络出版地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180827.003>

通讯作者: 尚新春, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为工程材料与结构的非线性力学 E-mail: shangxc@ustb.edu.cn

引用格式: 徐燕, 尚新春. 磁致伸缩层合悬臂梁式作动器的振动分析[J]. 复合材料学报, 2019, 36(5): 1319-1326.

XU Yan, SHANG Xinchun. Vibration analysis of magnetostrictive laminated cantilever actuator[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(5): 1319-1326 (in Chinese).

度关系曲线。Li 等^[9]通过实验获得了磁致伸缩悬臂梁传感器的动态特性,例如传感器的前两阶共振频率和模态形式。

对薄膜型层合悬臂梁式磁致伸缩作动器模型的建立有不同的方法。Klokhholm 等^[10]基于欧拉梁理论用能量法建立了一个简单模型,解决了磁致伸缩复合梁的静力弯曲变形,但在本构关系中没有考虑磁场强度对应变的影响。Guerrero 等^[11]基于 Gibbs 最小自由能理论建立了磁致伸缩薄膜在自由边界条件下的三维模型,并给出三维状态下的应力、应变和挠度的计算方法。Reddy 等^[12]基于 Hamilton 原理,考虑剪切效应获得了超磁致伸缩层合简支梁振动问题的解析解。Jia 等^[13]以应力和磁场作为控制变量,从热力学势能出发,推导出低磁场下磁致伸缩薄膜的非线性磁机耦合模型,得到的模型曲线与实验数据在给定的预应力下吻合较好。梁伟等^[14]推导了磁致伸缩材料和黏弹性阻尼层的层合结构的自由振动控制方程,并给出了简支边界条件下结构振动频率及损失因子的求解方法。Xu 等^[15]应用高阶剪切变形理论和线性耦合磁弹本构关系建立了磁致伸缩薄膜型复合悬臂梁式作动器的振动控制方程,分析了悬臂梁的几何、材料参数和激励频率对结构磁机耦合系数的影响。

对于薄膜型层合悬臂梁式磁致伸缩作动器的数值模拟大多采用有限元法进行分析。Watts 等^[16]将磁致伸缩应变等效为各向异性的热膨胀变形,应用有限元模型模拟了悬臂磁致伸缩薄膜的静态弯曲变形。Dean 等^[17]使用 FEMLAB 有限元多物理场模拟了磁致伸缩层合悬臂梁的弯曲和扭转振动,并给出了自然频率和振幅关系曲线。Si 等^[18]采用梁单元和平面单元建立了多层悬臂梁结构的有限元模型,并对多层磁致伸缩悬臂梁的弯曲进行了数值模拟。

近年来,胡渊等^[19]和曹鸿霞等^[20]对层状磁电

复合材料在机电谐振下的磁电耦合现象进行了理论和实验研究。此外,钟铁峰等^[21]建立了磁致伸缩复合材料的细观力学模型,利用有限元离散技术构建了模型的数值模拟。

器件的理论分析在设计中具有非常重要的指导作用,但是目前仍然缺乏有关层合悬臂梁式磁致伸缩作动器振动问题的研究工作,特别是解析求解方面的研究。本文目的是基于磁致伸缩材料的力-磁耦合本构关系,通过 Hamilton 变分原理,建立双层薄膜型 Euler 悬臂梁式作动器振动问题的数学模型。并采用分离变量方法和常微分方程组的解析解法进行求解。数值算例的计算结果与文献有限元结果进行了对比,讨论了几何参数、材料参数的变化对固有频率的影响。此外,计算分析了在周期磁场激励下梁的受迫振动问题,指出挠度响应会呈现出倍频效应。

1 理论模型

1.1 问题的位移假设和本构关系

考虑磁致伸缩薄膜层合悬臂梁在周期变化的磁场激励下的振动问题。图 1 为磁致伸缩层合悬臂梁的简化力学模型,采用直角坐标系 $O-xz$,将 x 轴取在磁致伸缩层和基底的界面上, z 轴为悬臂梁固定端的横向方向。梁长为 L ,宽为 b ,厚度为 h ,其中 E_i 、 G_i 、 ν_i 、 h_i 、 A_i 、 I_i ($i=1,2$) 分别为层合悬臂梁上下层的第 i 层弹性模量、剪切弹性模量、泊松比、厚度、横截面面积和惯性矩($i=1$ 表示磁致伸缩层, $i=2$ 表示基底层)。

根据 Euler-Bernoulli 梁理论,假设位移为如下形式,

$$u^{(i)}(x,z,t) = u(x,t) + z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$
$$u_z^{(i)}(x,z,t) = w(x,t) \quad (i=1,2) \quad (1)$$

式中, $u(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 分别为界面($z=0$)处的轴向位移和挠度。

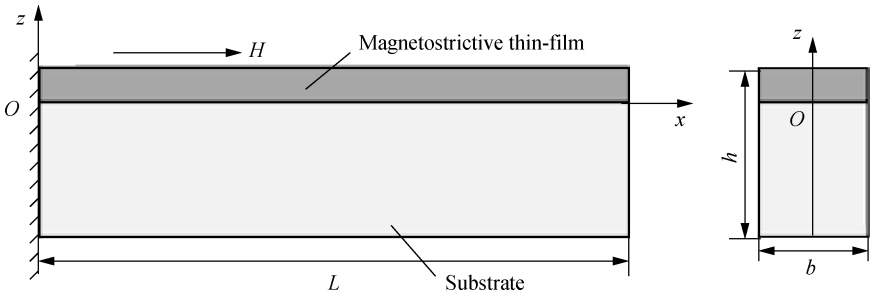


图 1 磁致伸缩层合悬臂梁简化力学模型

Fig. 1 Simplified mechanical model for magnetostrictive laminated cantilever

采用一维磁致伸缩材料本构关系,即忽略泊松比效应。本文采用如下标准平方型(三次非线性)磁致伸缩本构关系^[22-23]:

$$\epsilon_x^{(i)} = \left[\frac{1}{E_i} + r_i H^2(t) \right] \sigma_x^{(i)} + m_i H^2(t) \quad (2)$$

式中: $H(t)$ 和 B 分别是磁场和磁感应强度; m_i 和 r_i 分别是第 i 层磁致伸缩模量和磁弹模量; μ_i 为磁致伸缩材料的磁导率($i=1, 2$)。由本构关系式(2)可知,变形场与磁场之间的关系是耦合的,且是非线性的。其中第一式右端的第一项系数表示柔度,其由弹性柔度和磁致伸缩效应引起的附加柔度(含 r_i)两部分组成,最后一项表示由磁场引起的应变。第二式右端项系数表示磁导率由固有磁导率和由应力所引起的附加磁导率组成。

对本文所考虑的问题来说,在磁致伸缩薄膜层 $m_1=m$, $r_1=r$, 基底层 $m_2=0$, $r_2=0$ 。由本构关系式(2)和几何关系 $\epsilon_x^{(i)} = \partial u_x^{(i)} / \partial x$ 、 $\epsilon_z^{(i)} = \partial u_z^{(i)} / \partial z$, 可得应力与位移的关系式为

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - E_1 \tilde{m}(t) H^2(t) \\ \sigma_x^{(2)} &= E_2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

这里考虑到磁弹模量 r 非常小,并为了后面的解析求解,在式(3)中可以作近似

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_1 [1 + E_1 r H^2(t)]^{-1} \approx E_1 \\ \tilde{m}(t) &= m [1 + E_1 r H^2(t)] \approx m(1 - E_1 r H^2(t)) \end{aligned}$$

1.2 振动微分方程的变分推导

采用 Hamilton 变分原理推导问题的控制方程。层合悬臂梁的 Hamilton 作用量为

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - U_E + U_M) dt \quad (4)$$

其中,动能表达式为

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_0^{h_1} \left[\rho_1 \left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \rho_1 \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \right)^2 \right] b dz + \right. \\ &\quad \left. \int_{-h_2}^0 \left[\rho_2 \left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \right)^2 \right] b dz \right] dx \end{aligned} \quad (5)$$

应变能表达式为

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{h_1} \left[\left(\frac{1}{E_1} + r_1 H^2(t) \right) (\sigma_x^{(1)})^2 + \right. \\ &\quad \left. m H^2(t) \sigma_1 \right] b dz dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h_2}^0 \frac{1}{E_2} (\sigma_x^{(2)})^2 b dz dx \end{aligned} \quad (6)$$

磁能表达式为

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{h_1} B H(t) b dz dx \quad (7)$$

根据 Hamilton 最小作用量原理,作用量的变分 $\delta H = 0$ 。将式(2)~(3)代入式(5)~(7),忽略水平惯性力和惯性力偶,并进行变分运算,最后得到

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \left[(E_1 A_1 + E_2 A_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{h_1}{2} E_1 A_1 + \frac{h_2}{2} E_2 A_2 \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \delta u + \\ &\quad \left[(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} (h_1^2 E_1 A_1 + h_2^2 E_2 A_2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (h_1 E_1 A_1 - h_2 E_2 A_2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] \delta w \Big\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

显然,由此可以得到如下关系:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{-h_1 E_1 A_1 + h_2 E_2 A_2}{2(E_1 A_1 + E_2 A_2)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (9)$$

将式(9)两边关于 x 求导,并由式(8),即可得出层合悬臂梁横向振动控制方程:

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[4\beta - \frac{(-h_1 E_1 A_1 + h_2 E_2 A_2)^2}{4\delta} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (10)$$

式中: $\alpha = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2$; $\beta = E_1 I_1 + E_2 I_2$; $\delta = E_1 A_1 + E_2 A_2$ 。

1.3 边界条件

在固定端处,边界条件为

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

在自由端处弯矩和剪力均为零,边界条件为

$$\begin{aligned} \left[\frac{h_1}{2} F_N^{(1)} - \frac{h_2}{2} F_N^{(2)} + M^{(1)} + M^{(2)} \right] \Big|_{x=L} &= 0 \\ (Q^{(1)} + Q^{(2)}) \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中,第 1、2 层弯矩为 $M^{(1)} = b \int_0^{h_1} \sigma_x^{(1)} dz$, $M^{(2)} = b \int_{-h_2}^0 \sigma_x^{(2)} dz$; 第 1、2 层剪力为 $Q^{(1)} = \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x}$, $Q^{(2)} = \frac{\partial M^{(2)}}{\partial x}$; 第 1、2 层轴力为 $F_N^{(1)} = b \int_0^{h_1} \sigma_x^{(1)} dz$, $F_N^{(2)} = b \int_{-h_2}^0 \sigma_x^{(2)} dz$ 。

将式(3)分别代入上述弯矩和轴力表达式可得

$$M^{(1)} = \frac{h_1}{2} E_1 A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 4E_1 I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h_1}{2} E_1 A_1 \tilde{m}(t) H^2(t)$$

$$M^{(2)} = -\frac{h_2}{2} E_2 A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4E_2 I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13a)$$

$$F_N^{(1)} = E_1 A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h_1}{2} E_1 A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_1 A_1 \tilde{m}(t) H^2(t)$$

$$F_N^{(2)} = E_2 A_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_2}{2} E_1 A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13b)$$

因此,由边界条件式(12)可以得到

$$(E_1 A_1 h_1 - E_2 A_2 h_2) \frac{\partial u}{\partial x} + 7\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = E_1 A_1 h_1 \tilde{m}(t) H^2(t) \quad (14a)$$

$$\left[\left(\frac{h_1}{2} E_1 A_1 - \frac{h_2}{2} E_2 A_2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{h_1^2}{3} E_1 A_1 - \frac{h_2^2}{3} E_2 A_2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \quad (14b)$$

将式(9)两边关于 x 积分得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{E_1 A_1 h_1 - E_2 A_2 h_2}{2\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(t) \quad (15)$$

再由悬臂梁自由端轴力为零条件 $(F_N^{(1)} - F_N^{(2)}) \Big|_{x=L} = 0$, 可以确定出式(15)中的待定函数:

$$c(t) = \frac{E_1 A_1}{\delta} \tilde{m}(t) H^2(t) \quad (16)$$

将式(15)~(16)代入式(14a)~(14b)消去 u , 得到如下自由端的边界条件:

$$\frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} = 0$$

$$\left[\left(7\beta - \frac{(h_1 E_1 A_1 - h_2 E_2 A_2)^2}{2\delta} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x=L} = \frac{h E_1 A_1 E_2 A_2}{\delta} \tilde{m}(t) H^2(t) \quad (17)$$

设层合梁的振动为周期振动。记激励磁场 $H(t)$ 的周期为 T , 梁的挠度和速度周期性条件为

$$w(x, 0) = w(x, T),$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w(x, T)}{\partial t} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (18)$$

式中, $T=2\pi/\omega$, ω 是圆频率。

至此,磁致伸缩薄膜型悬臂梁式作动器的振动问题,在数学上被归结为求解式(10)在边界条件式

(11)和式(17)及周期性条件式(18)下的解。

2 理论分析

2.1 无量纲化及分离变量

引入无量纲变量和参数:

$$\xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{t}{T} = \frac{\omega t}{2\pi}, \lambda(\omega) = \sqrt{\frac{4L^4}{\beta} \omega^2} \quad (19)$$

$$\bar{\beta} = 7\beta - \frac{(h_1 E_1 A_1 - h_2 E_2 A_2)^2}{2EA}, \bar{\delta} = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{\delta},$$

$$q(\tau) = \bar{m}(\tau) H^2(\tau)$$

层合悬臂梁振动的基本方程式(10)可以写成如下无量纲形式:

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + \frac{\lambda^4(\omega)}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} = 0 \quad (20)$$

相应地,定解条件式(11)、式(17)和式(18)的无量纲形式为

$$\bar{w}(0, \tau) = 0, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (21a)$$

$$\bar{\beta} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = hL \bar{\delta} q(\tau) \quad (21b)$$

$$\bar{w}(\xi, 0) = \bar{w}(\xi, 1), \frac{\partial \bar{w}(\xi, 0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}(\xi, 1)}{\partial \tau} \quad (21c)$$

2.2 固有频率和模态函数

考虑磁致伸缩薄膜型悬臂梁自由振动问题。此时,外加磁场 $H(\tau) = 0$, 边界条件式(21b)成为齐次的。由周期性条件式(21c)可以设解为如下分离变量形式:

$$\bar{w}(\xi, \tau) = W(\xi) e^{i2\pi\tau} \quad (22)$$

将式(22)代入式(20)后消去 $e^{i2\pi\tau}$ 得到如下常微分方程:

$$\frac{d^4 W(\xi)}{d\xi^4} - \lambda^4(\omega) W(\xi) = 0 \quad (23)$$

其通解为

$$W(\xi) = B_1 \cos \lambda(\omega) \xi + B_2 \sin \lambda(\omega) \xi + B_3 \cosh \lambda(\omega) \xi + B_4 \sinh \lambda(\omega) \xi \quad (24)$$

其中,系数 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 可由边界条件确定。将式(24)代入边界条件式(21a)~(21b)得出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos \lambda(\omega) & -\sin \lambda(\omega) & \cosh \lambda(\omega) & \sinh \lambda(\omega) \\ \sin \lambda(\omega) & -\cos \lambda(\omega) & \sinh \lambda(\omega) & \cosh \lambda(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

记式(25)左端的系数矩阵为 $\mathbf{A}(\omega)$ 。系数 B_1 、 B_2 、 B_3 和 B_4 有非零解的充要条件是系数矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 的行列式为零,由此得到频率方程为

$$F(\omega) = \det(\mathbf{A}(\omega)) = \cos[\lambda(\omega)] \cosh[\lambda(\omega)] + 1 = 0 \quad (26)$$

从上述方程中得到各阶固有频率 $f_n = \omega_n/2\pi (n=1, 2, \cdots)$ 后,代入齐次方程式(25)并结合归一化条件 $\sum_{i=1}^4 B_i^2 = 1$ 求出 B_1 、 B_2 、 B_3 和 B_4 的非零解,再由式(24)给出自由振动的模态函数 $W(\xi)$ 。

2.3 简谐磁场激励下的响应

当层合梁中的磁致伸缩薄膜层受到简谐磁场激励时,会产生周期振动。假定磁场 $H(\tau)$ 沿磁致伸缩薄膜长度方向,且是关于时间的正弦函数:

$$H(\tau) = H_0 \sin 2\pi\tau \quad (27)$$

从问题的数学模型来看,即在基本方程式(20)和边界条件式(21a)和式(21b)及周期条件式(21c)中,仅有边界条件式(21b)是非齐次的,所含 $q(\tau)$ 项会引起受迫振动。这里已知激励函数:

$$q(\tau) = \frac{1}{2}mH_0^2 \left[1 - \frac{3}{4}E_1 r H_0^2 \right] - \frac{1}{2}mH_0^2(1 - E_1 r H_0^2) \cos 4\pi\tau - \frac{1}{8}E_1 r m H_0^4 \cos 8\pi\tau \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} & 0 & \lambda^{(1)} \\ (\lambda^{(1)})^3 \sin \lambda^{(1)} & -(\lambda^{(1)})^3 \cos \lambda^{(1)} & (\lambda^{(1)})^3 \sinh \lambda^{(1)} & (\lambda^{(1)})^3 \cosh \lambda^{(1)} \\ -(\lambda^{(1)})^2 \cos \lambda^{(1)} & -(\lambda^{(1)})^2 \sin \lambda^{(1)} & (\lambda^{(1)})^2 \cosh \lambda^{(1)} & (\lambda^{(1)})^2 \sinh \lambda^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \\ B_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\bar{\delta}hL}{4\beta}mH_0^2(1 - E_1 r H_0^2) \end{bmatrix} \quad (32)$$

(Ⅲ)含 $\cos 8\pi\tau$ 项: $q(\tau) = -\frac{1}{8}E_1 r m H_0^4 \cos 8\pi\tau$

设解为 $\bar{w}^{(2)}(\xi, \tau) = W^{(2)}(\xi) \cos 8\pi\tau$, 类似于情形(Ⅱ),由式(20)得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 & \lambda^{(2)} \\ (\lambda^{(2)})^3 \sin \lambda^{(2)} & -(\lambda^{(2)})^3 \cos \lambda^{(2)} & (\lambda^{(2)})^3 \sinh \lambda^{(2)} & (\lambda^{(2)})^3 \cosh \lambda^{(2)} \\ -(\lambda^{(2)})^2 \cos \lambda^{(2)} & -(\lambda^{(2)})^2 \sin \lambda^{(2)} & (\lambda^{(2)})^2 \cosh \lambda^{(2)} & (\lambda^{(2)})^2 \sinh \lambda^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \\ B_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\bar{\delta}hL}{16\beta}E_1 r m H_0^4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

注意到式(28)右端共有三个激励项:常数项、含 $\cos 4\pi\tau$ 项和 $\cos 8\pi\tau$ 项,由解的叠加和分离变量可以设相应的挠度响应为

$$\bar{w}(\xi, \tau) = W^{(0)}(\xi) + W^{(1)}(\xi) \cos 4\pi\tau + W^{(2)}(\xi) \cos 8\pi\tau \quad (29)$$

因此,可分为以下三种情形分别求解。

(I)常数项: $q(\tau) = \frac{1}{2}mH_0^2 \left[1 - \frac{3}{4}E_1 r H_0^2 \right]$

外界磁场是不随时间变化的常磁场,挠度响应与时间无关,式(20)的通解为

$$W^{(0)}(\xi) = B_1^{(0)}\xi^3 + B_2^{(0)}\xi^2 + B_3^{(0)}\xi + B_4^{(0)} \quad (30)$$

将上式代入边界条件式(21a)和式(21b),解出待定常数:

$$B_1^{(0)} = B_3^{(0)} = B_4^{(0)} = 0 \\ B_2^{(0)} = \frac{\bar{\delta}hL}{8\beta}mH_0^2 \left(1 - \frac{3}{4}E_1 r H_0^2 \right)$$

(Ⅱ)含 $\cos 4\pi\tau$ 项: $q(\tau) = -\frac{1}{2}mH_0^2(1 - E_1 r H_0^2) \cos 4\pi\tau$

设式(20)的分离变量解为 $\bar{w}(\xi, \tau) = W(\xi) \cos 4\pi\tau$,代入式(20)后消去 $\cos 4\pi\tau$,可得关于 $W(\xi)$ 的常微分方程,其解为

$$W^{(1)}(\xi) = B_1^{(1)} \cos \lambda^{(1)} \xi + B_2^{(1)} \sin \lambda^{(1)} \xi + B_3^{(1)} \cosh \lambda^{(1)} \xi + B_4^{(1)} \sinh \lambda^{(1)} \xi \quad (31)$$

其中, $\lambda^{(1)} = [4aL^4 \omega^2 / EI]^{1/4}$, 系数 $B_1^{(1)}$ 、 $B_2^{(1)}$ 、 $B_3^{(1)}$ 、 $B_4^{(1)}$ 可通过如下非齐次线性代数方程确定:

$$W^{(2)}(\xi) = B_1^{(2)} \cos \lambda^{(2)} \xi + B_2^{(2)} \sin \lambda^{(2)} \xi + B_3^{(2)} \cosh \lambda^{(2)} \xi + B_4^{(2)} \sinh \lambda^{(2)} \xi \quad (33)$$

其中, $\lambda^{(2)} = [16aL^4 \omega^2 / \bar{\beta}]^{1/4}$, 系数 $B_1^{(2)}$ 、 $B_2^{(2)}$ 、 $B_3^{(2)}$ 、 $B_4^{(2)}$ 可通过如下方程求得

将上述三种情形的解叠加，最后受迫振动的挠度响应由式(29)给出。

3 数值结果与讨论

3.1 算例验证

为了验证层合悬臂梁振动数学模型和求解方法的合理性，下面给出一算例，计算悬臂梁式作动器的固有频率。

文献[8]中薄膜型双层磁致伸缩作动器的尺寸为 20 mm×5 mm×60 μm，磁致伸缩层材料为 (Tb_{0.3}Dy_{0.7})_{0.42}Fe_{0.58}，其弹性模量 $E_1=50$ GPa，密度 $\rho_1=9.25\times10^3$ kg/m³，泊松比 $\nu_1=0.3$ ，磁通量 $\mu_1=4\pi\times10^{-7}$ N/A²，磁致伸缩模量 $\gamma=0.09\times10^{-12}$ m²/A²，磁弹模量 $\tau=2.77\times10^{-20}$ m²/(A²·Pa)，驱动频率 $f=500$ Hz。基底材料为 Si，弹性模量 $E_2=130$ GPa，密度 $\rho_2=2.33\times10^3$ kg/m³，泊松比 $\nu_2=0.28$ 。

经过计算给出悬臂梁式作动器前 6 阶固有频率的数值，列入表 1。与有限元法得出的相应计算值比较，二者之间的误差较小，从而验证了本文数学模型和计算方法的正确性。

3.2 参数对固有频率的影响

固有频率是作动器振动性能的关键表征量。针对磁致伸缩作动器的控制应用和设计，有必要分析几何参数和材料参数对作动器固有频率的影响。图 2 为磁致伸缩层和基底厚度比 c_1 ($c_1=h_1/h$)、梁的厚长比 c_2 ($c_2=h/L$) 和弹性模量比 c_3 ($c_3=E_1/E_2$) 三种参数分别对作动器固有频率的影响曲线。可以看出，层合梁的前 3 阶固有频率随厚度比 c_1 和弹性模量比 c_3 的增大而减小，而随厚长比 c_2 的增大而增加。此外，还可以看出几何和材料参数对高阶固有频率的影响较大。

经过数值计算，自由端部 ($x=L$) 的振幅 $|w(L)|$ 与激励频率 f 的关系曲线如图 3 所示。图中虚线为幅频曲线的垂直渐近线。当激励频率(磁场频率)接近共振频率时，层合梁的振幅最大。值得注意的是，垂直渐近线位置是在固有频率 f_n 的一半处，即挠度产生共振的频率是输入磁场频率的

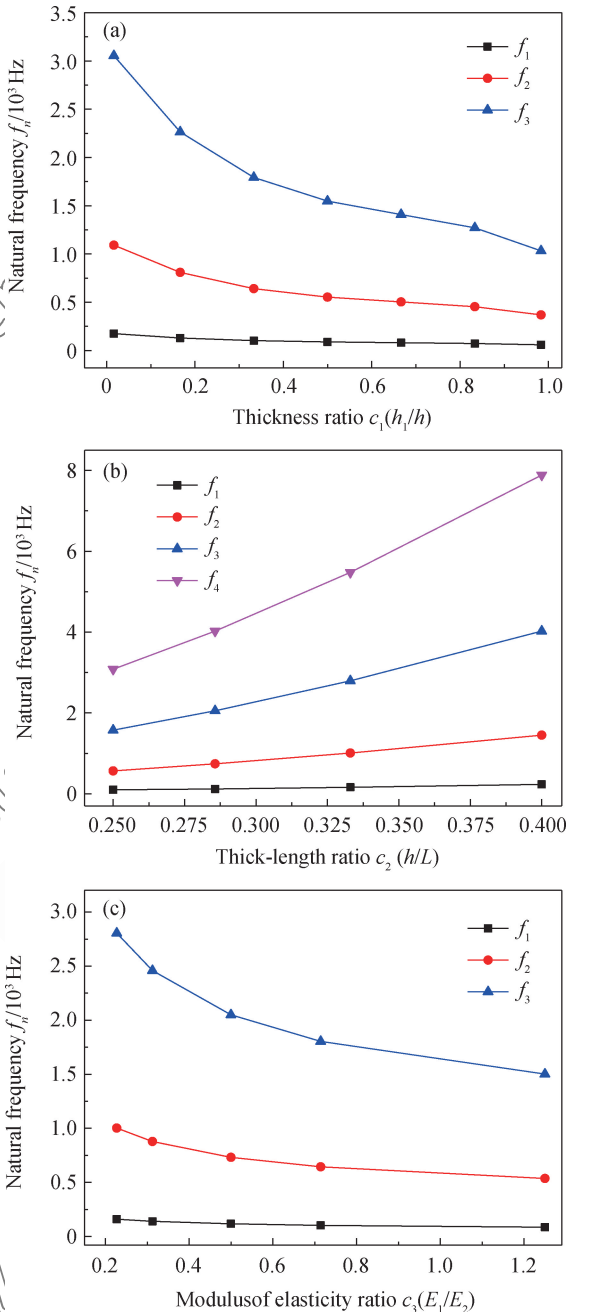


图 2 磁致伸缩层合悬臂梁前 3 阶固有频率 f_n 随厚度比 c_1 (a)、厚长比 c_2 (b) 和弹性模量比 c_3 (c) 的变化曲线
Fig. 2 Variation curves of first three order nature frequencies f_n of magnetostrictive laminated cantilever with respect to thickness ratio c_1 (a), thick-length ratio c_2 (b) and modulus of elasticity ratio c_3 (c)

表 1 磁致伸缩 (TbDyFe) 层合悬臂梁前六阶固有频率 f_n ($n=1, \dots, 6$)

Table 1 First six order natural frequencies f_n ($n=1, \dots, 6$) of magnetostrictive (TbDyFe) laminated cantilever

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Theoretical solution/Hz	128.9	808.7	2264.2	4437.0	7334.6	10956.6
FEA numerical solution/Hz	130.8	818.8	2296.3	4514.9	7483.5	11187.0

Note: FEA—Finite element analysis.

二分之一, 被称为“倍频”动态特性^[2-3]。从激励函数 $q(\tau)$ 的式(28)可知, 受迫振动的激励项频率是输入磁场频率的 2 倍和 4 倍, 因此这里所计算出的挠度响应呈现出倍频效应的动态特性是正确的。

图 4 为层合梁上不同点的挠度响应曲线和磁场响应曲线。可以看出, 挠度响应曲线有较好的周期性, 而且进一步验证了倍频效应, 即挠度响应(输出)频率是输入磁场频率的 2 倍。因此在周期交变磁场作用下有明显的“倍频”动态特性。结果表明, 梁上不同点的挠度振动响应是同步的, 且挠度响应呈现出倍频效应, 这是由于非线性本构关系式(2)导致的。

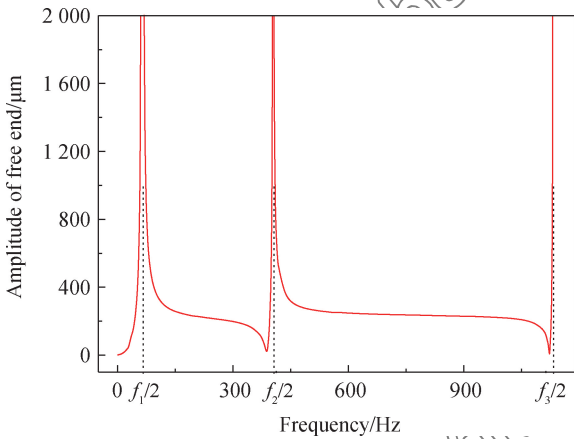


图 3 层合悬臂梁自由端的幅频曲线

Fig. 3 Amplitude of free end against frequency relation curve of laminate cantilever

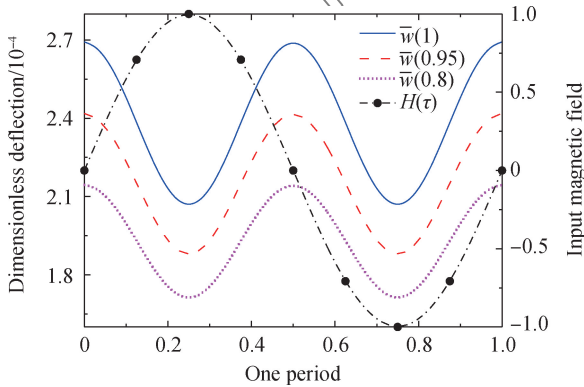


图 4 输入磁场一个周期内在 $\xi = 1, 0.95, 0.8$ 处层合悬臂梁无量纲挠度的响应曲线

Fig. 4 Response curves of laminate cantilever dimensionless deflection at $\xi = 1, 0.95, 0.8$ in input magnetic field for one period

4 结 论

(1) 本文采用标准平方型力-磁耦合本构关系,

通过能量变分原理建立了磁致伸缩层合悬臂梁式作动器振动问题的数学模型, 求得了自由振动的固有频率和受迫振动挠度响应的解析解。

(2) 分析了磁致伸缩层和基底层厚度比、厚长比和弹性模量比对层合梁自由振动固有频率的影响。

(3) 算例结果表明, 在周期磁场激励下梁受迫振动时的幅频曲线和挠度响应呈现出倍频动态特性。

参考文献:

[1] BUSCH-VISHNIAC H J. Electromechanical sensors and actuators[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[2] PONS J L. Emerging actuator technologies[M]. New York: Wiley-Interscience, 2005.

[3] 王博文, 曹淑瑛, 黄文英. 磁致伸缩材料与器件[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2008.

WANG B W, CAO S Y, HUANG W M. Magnetostrictive materials and devices [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2008 (in Chinese).

[4] AJANAPPA M, BI J. A theoretical and experimental study of magnetostrictive mini-actuators [J]. Smart Materials and Structures, 1994, 3(2): 83-91.

[5] MOON S J, LIM C W, KIM B H, et al. Structural vibration control using linear magnetostrictive actuators [J]. Sound Vibration, 2007, 302(4): 875-891.

[6] SHANG X C, PAN E N, QIN L P. Mathematical modeling and numerical computation for the vibration of a magnetostrictive actuator [J]. Smart Materials and Structures, 2008, 17(4): 1-12.

[7] HONDA T, ARAKI I, YAMAGUCHI M. Fabrication of magnetostrictive actuators using rare-earth (Tb, Sm)-Fe thin films (invited) [J]. Journal of Applied Physics, 1994, 76(10): 6994-6999.

[8] QUANDT E, SEEMANN K. Fabrication and simulation of magnetostrictive thin-film actuators [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 1995, 50(1-2): 105-109.

[9] LI S Q, FU L L, BARBATEE J M. Resonance behavior of magnetostrictive micro/milli-cantilever and its application as a biosensor [J]. Sensors and Actuators B: Chemical, 2009, 137(2): 692-699.

[10] KLOKHOLM E, JAHNES C V. Comments on “Magnetostrictive and internal stresses in thin films: The cantilever method revisited” [J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1996, 152(1-2): 226-230.

[11] GUERRERO V H, WETHERHOLD R C. Strain and stress calculation in bulk magnetostrictive materials and thin films [J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2004, 271(2): 190-206.

- [12] REDDY J N, BARBOSA J I. On vibration suppression of magnetostrictive beams[J]. *Smart Materials and Structures*, 2000, 9(1): 49-58.
- [13] JIA Z Y, LIU W, ZHANG Y S, et al. A nonlinear magneto-mechanical coupling model of giant magnetostrictive thin films at low magnetic fields[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2006, 128(1): 158-164.
- [14] 梁伟, 刘冬欢. 磁致伸缩铺层阻尼板壳结构的振动分析[J]. *复合材料学报*, 2006, 23(6): 186-191.
LIANG W, LIU D H. Vibration analysis of laminated shells with magnetostrictive and viscoelastic layers[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2006, 23(6): 186-191 (in Chinese).
- [15] XU Y, SHANG X C. Vibration analysis of magnetostrictive thin-film composite cantilever actuator[J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(9): 1-12.
- [16] WATTS R, GIBBS M R J, KARI W D. Finite-element modeling of magnetostrictive bending of a coated cantilever[J]. *Applied Physics Letters*, 1997, 70(19): 2607-2609.
- [17] DEAN J, GIBBS M R J, SCHREFEL T. Finite-element analysis on cantilever beams coated with magnetostrictive material [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2006 42 (2): 283-288.
- [18] SI H M, CHO C. Finite element modeling of magnetostrictive for multilayered MEMS devices[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2004, 270(1): 167-173.
- [19] 胡渊, 龚国斌, 曹东升, 等. 压电/磁致伸缩/环氧树脂层合复合材料的磁电效应及其频响特性[J]. *复合材料学报*, 2007, 24(4): 29-33.
HU Y, GONG G B, CAO D S, et al. Magnetolectric effect and its frequency response for PZT/Terfenol-D/epoxy laminate composites[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2007, 24(4): 29-33 (in Chinese).
- [20] 曹鸿霞, 李敏, 张闯, 等. 压电-磁致伸缩双层磁电复合材料的机电谐振[J]. *复合材料学报*, 2013, 30(5): 244-250.
CAO H X, LI M, ZHANG C, et al. Electromechanical resonance of piezoelectric-magnetostrictive bilayer[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2013, 30(5): 244-250 (in Chinese).
- [21] 钟铁峰, 李潇, 梅宝平, 等. 磁致伸缩复合材料有效性能的变分渐近细观力学模型[J]. *复合材料学报*, 2017, 34(3): 574-581.
ZHONG Y F, LI X, MEI B P, et al. A variational asymptotic micromechanics model for effective properties of magnetostrictive composites[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2017, 34(3): 574-581 (in Chinese).
- [22] CARMAN G P, MITROVIC M. Nonlinear constitutive relations for magnetostrictive materials with application to 1D problems[J]. *Intelligent Material Systems and Structures*, 1995, 6(5): 673-683.
- [23] WAN Y P, FANG D N, HWANG K C. Non-linear constitutive relations for magnetostrictive materials[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38(7): 1053-1065.