

单向纤维增强聚合物复合材料压缩渐进破坏

薛康, 肖毅*, 王杰, 薛元德

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 复合材料结构在承压时破坏如何演化, 是其强度破坏分析的基础和核心任务。本文提出了基于连续介质损伤力学(CDM)的单向纤维增强聚合物复合材料压缩渐进损伤分析(PDA)模型。建模中考虑了材料非线性行为、失效判断及损伤演化中材料性能退化等基本问题, 分别对应于拉压不对称弹塑性本构关系、Puck准则、LaRC05准则及考虑破坏面方向的刚度退化方法。该模型通过用户材料子程序接口 VUMAT 引入到有限元软件 ABAQUS 中实现了有限元求解。对文献中提供的纵向、横向及偏轴压缩案例进行了数值计算并与试验数据对比。数值分析结果与试验数据吻合较好, 证明了该方法的合理性和有效性, 对开展多向层合板压缩破坏分析富有参考价值。

关键词: 单向复合材料; 压缩破坏; 纤维折曲; 损伤力学; 有限元分析

中图分类号: TB330.1 文献标志码: A 文章编号: 1000-3851(2019)06-1398-15

Compression progressive failure of unidirectional fiber reinforced polymer composites

XUE Kang, XIAO Yi*, WANG Jie, XUE Yuande

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Failure evolution in composite structures under compression is a fundamental topic and plays a key role in the strength prediction of composites. Herein, a progressive damage analysis (PDA) model based on continuum damage mechanics (CDM) was proposed to analyze the compression failure of unidirectional fiber reinforced polymer composites. Some essential issues such as the nonlinear behavior of composites, failure judgement, and the degradation of material properties during damage evolution were considered, corresponding respectively to the tension-compression asymmetric elasto-plastic constitutive model, Puck criteria, LaRC05 criteria and a stiffness degradation model considering the direction of fracture plane. The proposed PDA model was implemented in finite element analysis (FEA) by using the interface of user defined materials subroutine (VUMAT) provided by ABAQUS. The result of FEA is in good agreement with the experiment data reported by literatures in the cases of longitudinal, transverse and off-axis compression, which proves the reasonability and effectiveness of this PDA model. This work is of great reference value for compression failure analysis of multidirectional laminates.

Keywords: unidirectional composites; compression failure; fiber kinking; damage mechanics; finite element analysis (FEA)

纤维增强聚合物复合材料轴向承压时, 其压缩强度比拉伸强度低 40% 以上, 该因素严重制约了其在工程中的广泛应用。因此人们对其压缩破坏机制及破坏演变规律的探究更加关注。研究表明, 与受拉破坏情况不同, 承压时破坏面通常与受载方向不

垂直, 导致破坏区域产生剪切应力的耦合作用, 从而引发纤维间的基体劈裂或层间分层问题, 增加了层合板结构失效的风险^[1-3]。

单向纤维增强聚合物复合材料的压缩破坏模式可分为基体破坏(纤维间破坏)和轴向压缩破坏。前

收稿日期: 2018-05-31; 录用日期: 2018-07-18; 网络出版时间: 2018-08-27 16:17

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1801.tb.20180821.0854.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金(11832014)

通讯作者: 肖毅, 教授, 博士生导师, 研究方向为复合材料力学、结构强度分析与设计 E-mail: y_xiao@tongji.edu.cn

引用格式: 薛康, 肖毅, 王杰, 等. 单向纤维增强聚合物复合材料压缩渐进破坏[J]. 复合材料学报, 2019, 36(6): 1398-1412.

XUE K, XIAO Y, WANG J, et al. Compression progressive failure of unidirectional fiber reinforced polymer composites[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(6): 1398-1412 (in Chinese).

者主要由横向应力与剪切应力控制, 当应力水平达到基体的破坏极限时, 会产生与纤维方向平行贯穿板厚方向的断裂^[4-6]。与此相比, 后者轴向压缩破坏的机制更为复杂。Rosen 等^[7]早期提出了纤维弹性微屈曲导致复合材料轴向压缩破坏的假设, 并给出了拉伸型(Extensional mode)与剪切型(Shear mode)两种屈曲模式, 但众多试验证明, 基于此假设得出的预测强度值要远高于试验强度值, 因此 Argon^[8]、薛元德等^[9]及 Budiansky^[10]指出了导致复合材料轴向压缩破坏的主要因素应为纤维的初始偏角与由此导致的基体塑性剪切变形, 即塑性微屈曲。通常认为, 纤维的初始偏角如 Rosen 假设的屈曲模式一样存在两种形式, 当初始偏角为剪切型时, 会导致折曲带的形成^[8]。由于试验中较多观察到纤维折曲的压缩破坏模式, 且其较拉伸型初始偏角导致的破坏强度更低, 自纤维折曲的形成机制被提出以来, 关于复合材料轴向压缩破坏的研究便更多地集中于此。

魏悦广等^[11]、Naya 等^[12]、Bishara 等^[13]、Prabhakar 等^[14]及张弥等^[15]建立了细观力学模型对纤维折曲破坏进行分析, 讨论了纤维初始偏角、基体非线性行为对压缩强度的影响, 可以较好地反映出纤维折曲的形成机制与进展过程。而针对纤维间失效, Gonzalez 等^[16]、黄争鸣等^[17]及彭湃等^[18]同样建立了细观力学分析模型, 对基体中裂纹的起始与进展过程进行了分析, 并讨论了基体塑性行为、损伤行为及纤维-基体界面强度的影响。不难看出, 针对复合材料压缩破坏的细观力学研究成果非常丰富, 且可以较好地反映压缩破坏的起始与进展过程。但是受分析尺度所限, 细观力学方法应用于结构分析时, 会耗费极大的计算资源, 这并不利于实际应用, 因此不少学者尝试采用基于宏观力学的渐进损伤分析方法对这两种复合材料压缩破坏的基本模式进行描述。

与细观力学在研究纤维折曲时结合组分材料的塑性与损伤行为进行非线性屈曲分析不同, 宏观力学一般从损伤演化的角度出发, 考虑材料失效前的非线性行为, 通过与应力或应变有关的强度准则进行失效判断, 并通过基于连续介质损伤力学(CDM)的方法进行损伤演化分析, 从而对破坏过程进行完整的描述。Maimi 等^[19]考虑了材料的剪切非线性, 采用断裂带模型进行损伤演化分析, 但该研究建立的是二维模型, 无法反映厚度方向破坏

面角度的影响。Camanho 等^[20]建立三维渐近损伤分析(PDA)模型时考虑了材料的塑性, 采用弥散裂纹模型分析基体损伤演化, 采用改进的 Maimi 模型分析纤维压缩损伤演化, 但是该模型并不能反映出材料真实的破坏形貌。Pinho 等^[21]重点考虑了复合材料压缩破坏中纤维折曲问题, 且建立了完整的 PDA 模型, 较好地反映出材料的压缩破坏形态, 但是 Bogenfeld 等^[22]指出, Pinho 等采用的损伤演化分析方法导致了失效后材料刚度矩阵的非对称性, 该问题在一些情况下会导致错误的分析结果。Bergan 等^[23]基于应变梯度分解方法, 建立了针对纤维折曲破坏的分析模型, 该模型计算量较大, 没有考虑基体破坏的分析, 且在预测破坏面角度上存在一定问题。Zhang 等^[24]基于弥散裂纹模型建立了 PDA 模型, 但在模型中重点考虑的是基体破坏模式, 并未考虑纤维折曲的破坏模式。

针对上述研究中存在的问题, 本文考虑纤维折曲和基体破坏两种基本破坏模式, 基于宏观力学, 建立一种完整实用的复合材料压缩破坏分析方法。

1 考虑拉压不对称性的弹塑性模型

受 Drucker-Prager 提出的塑性理论启发, 笔者在 Hill 屈服准则的基础上引入静水压效应, 将其推广为一种考虑拉压不对称性的广义形式, 其屈服函数简化形式为

$$f^* = \left[\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2} + 2a_{66}\Gamma^2(\sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) + (\Gamma - 1)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] / Y_2^T \Gamma \quad (1)$$

其中: Y_2^T 为横向拉伸屈服强度; a_{66} 为 Sun-Chen 塑性模型中的单参数; k 为横向拉伸压缩屈服强度比, 令 $\Gamma = 2k/(k+1)$ 。三维等效应力可表示为

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{3D} + \sqrt{\frac{3}{2}}(\Gamma - 1)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (2)$$

其中,

$$\bar{\sigma}_{3D} = \left\{ \frac{3}{2} [(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 + 2a_{66}\Gamma^2(\sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)] \right\}^{1/2} \quad (3)$$

将广义 Hill 屈服函数作为塑性势函数, 并遵循单位体积塑性功增量理论, 可以得出塑性应变增量和等效塑性应变增量之间的关系:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} d\epsilon^p \quad (4)$$

将式(2)和式(4)联立可得塑性应变的增量型表

达式：

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_{11}^p \\ d\epsilon_{22}^p \\ d\epsilon_{33}^p \\ d\epsilon_{23}^p \\ d\epsilon_{31}^p \\ d\epsilon_{12}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2\bar{\sigma}_{3D}} + \sqrt{\frac{3}{2}}(\Gamma - 1) \\ \frac{3(\sigma_{33} - \sigma_{22})}{2\bar{\sigma}_{3D}} + \sqrt{\frac{3}{2}}(\Gamma - 1) \\ \frac{6\sigma_{23}}{\bar{\sigma}_{3D}} \\ \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31}}{\bar{\sigma}_{3D}} \\ \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{12}}{\bar{\sigma}_{3D}} \end{Bmatrix} d\epsilon_{eff} \quad (5)$$

从塑性应变的表达式可以看出，除假设了线弹性行为的纤维方向外，材料在其他方向上均会发生塑性流动，且塑性流动行为与当前应力状态密切相关。

采用等向硬化模型，并假设等效应力和等效塑性应变之间满足幂指数关系：

$$\epsilon^p = A\sigma^n \quad (6)$$

其中， A 和 n 均为表征材料塑性的参数。

材料的塑性柔度矩阵可通过下式得到：

$$S_{ijkl}^p = \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\sigma_{kl}} = \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon^p} \frac{d\epsilon^p}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma_{kl}} \quad (7)$$

结合材料的弹性柔度矩阵可以得到增量形式的应力-应变关系：

$$d\epsilon_{ij} = S_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl} \quad (8)$$

其中， S_{ijkl}^{ep} 为材料的弹塑性柔度矩阵，其 Voigt 张量形式可参见附录 1。模型中各参数的确定方法均可参考文献[26]。

2 失效判断准则

Puck 准则作为基体失效判据已经得到广泛应用^[1]，但是 Puck 准则未能针对纤维折曲这种重要的破坏模式给出分析方法。而 LaRC 准则从 Argon 提出的纤维折曲机理出发，提出了一种纤维折曲带内部应力计算的方法，并通过纤维折曲带内部应力水平判断是否发生折曲带内部的基体失效，从而对纤维折曲带的形成进行预测。其中 LaRC03 版本^[27]采用了平面应力假设，而 LaRC04 版本^[28]则将该分析方法推广至三维应力状态，LaRC05 版本^[29]则对 LaRC04 版本进行了简化，增强了该准则的实用性。

2.1 基体失效准则

基体失效也称为纤维间失效^[6]，即材料中产生

了平行于纤维方向贯穿整个单层的裂纹，包括基体裂纹和纤维/基体界面的裂纹。Puck 基于莫尔强度理论建立了 Puck 准则，认为应该采用潜在断裂面上的应力水平判断材料是否发生断裂，并考虑了断裂面上正应力对材料抗断裂强度的影响，能够反映出横向压缩应力对材料剪切强度的提升等现象。本文在判断基体压缩失效时沿用了 Puck 准则，而在判断基体拉伸失效时，则采用了一种更为简洁且与试验结果同样符合很好的二次型准则^[30]，具体表达式如下：

$$\begin{cases} f_m = \left(\frac{\tau_T}{S_T - \mu_T \sigma_N} \right)^2 + \left(\frac{\tau_L}{S_L - \mu_L \sigma_N} \right)^2 & (\sigma_N < 0) \\ f_m = \left(\frac{\sigma_N}{Y_T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_T}{S_T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_L}{S_L} \right)^2 & (\sigma_N \geq 0) \end{cases} \quad (9)$$

当 $f_m = 1$ 时，材料发生纤维间失效。其中： τ_T 和 τ_L 分别为断裂面上的横向剪切应力和纵向剪切应力； σ_N 为断裂面上的正应力，断裂面坐标系如图 1 所示；断裂面上的各应力分量可根据断裂角 a 通过附录 2 中的应力转轴公式得到，断裂角 a 定义为断裂面切向与板厚方向的夹角（图 1）； S_T 和 S_L 分别为材料的横向和纵向抗断裂强度； μ_T 和 μ_L 称为倾角参数^[1]或摩擦系数^[30]，是表征断裂面上的正应力对材料抗断裂强度影响程度的参数。

需要指出的是， S_T 和 S_L 与材料的横纵向剪切强度值 S_{23} 和 S_{12} 并没有必然联系，实际中通常可取材料的纵向剪切强度值 S_{12} 作为 S_L ，但是对于 S_T 而言，仍无法直接测量该参数值^[1]。容易发现，该准则中除了 S_L 可以通过常规材料性能测试得到外， S_T 、 μ_T 和 μ_L 均需要额外的试验数据进行确定。Puck 等^[1, 6]曾对这些参数的确定方法有过详细阐述，提出可以通过试验拟合或经验公式等来确定参数。

下文简要介绍一种基于单向板偏轴压缩试验的

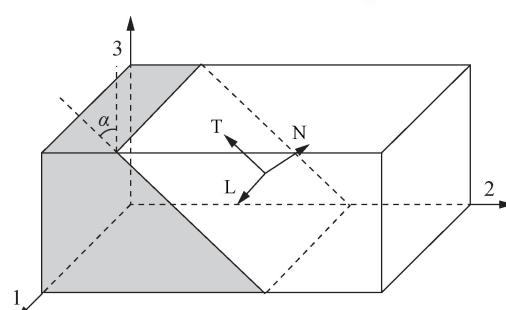


图 1 材料坐标系与断裂面坐标系

Fig. 1 Coordinate system of material and fracture plane

参数确定方法。将不同角度下的偏轴压缩强度记为 $X_C(\theta_n)$, 将不同角度下的偏轴压缩强度记为 $X_{C'}(\theta_n)$, 断裂面上的各应力分量分别记为 $\sigma_N(\theta_n, \alpha_n)$ 、 $\tau_L(\theta_n, \alpha_n)$ 、 $\tau_N(\theta_n, \alpha_n)$ 。将加载方向的应力记为 σ_x , 则此时单向板主应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \cos^2 \theta \sigma_x \\ \sigma_{22} = \sin^2 \theta \sigma_x \\ \sigma_{12} = -\sin \theta \cos \theta \sigma_x \end{cases} \quad (10)$$

首先采用角度为 θ_1 (θ_1 为较小角度, 典型值为 $\theta_1 < 30^\circ$) 的偏轴压缩试验确定 μ_L 。试验结果表明, 当偏轴角度较小且失效模式为纤维间失效时, 可以观察到断裂面基本垂直于板面^[4-5], 即 $\alpha_1 = 0^\circ$ 。此时可以确定 μ_L :

$$\mu_L = \cot \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{S_L}{X_C(\theta_1)} \quad (11)$$

然后通过角度为 θ_2 ($\theta_2 = 90^\circ$) 及角度为 θ_3 的偏轴压缩试验(需保证 $\alpha_3 \neq 0^\circ$, 通常 $\theta_3 > 45^\circ$) 可以得到两组与 S_T 和 μ_T 有关的方程, 由此可以确定 S_T 和 μ_T :

$$S_T = \tau_T(\theta_2, \alpha_2) + \mu_T \sigma_N(\theta_2, \alpha_2) \quad (12)$$

$$S_T = \frac{\tau_T(\theta_3, \alpha_3)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_L(\theta_3, \alpha_3)}{S_L - \mu_L \sigma_N(\theta_3, \alpha_3)} \right)^2}} + \mu_T \sigma_N(\theta_3, \alpha_3) \quad (13)$$

2.2 纤维失效准则

纤维折曲可以定义为当复合材料在沿纤维纵向承压时, 沿着一条带状区域(折曲带)产生局部剪切变形的现象^[31], 如图 2 所示。众多试验结果表明^[4, 31-33], 纤维折曲是轴向压缩下复合材料的主要失效模式, 因此本文主要考虑纤维折曲引起的压缩失效。

折曲带的形成是一个非常复杂的过程, 常伴随

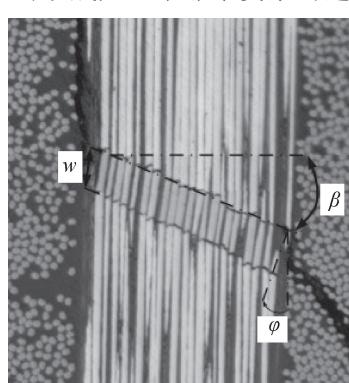


图 2 典型的纤维折曲失效模式^[32]

Fig. 2 Typical fiber kinking failure mode^[32]

有纤维偏转、基体剪切变形、纤维间基体失效、折曲带边缘纤维断裂等现象的出现^[32], 为了分析问题简化起见, 本文采用图 3 所示的简化模型分析纤维折曲破坏过程。

如上节所述, 根据应力转轴公式(附录 2)将应力转至折曲带的局部坐标系下后, 可对折曲带内的应力水平进行评估, 判断失效是否发生。因此首先需要确定的是折曲带的局部坐标系。

假设折曲平面始终与纤维方向平行, 则折曲平面坐标系 Ω_ψ 可由材料坐标系统绕纤维方向(1 方向)旋转角度 ψ 得到(图 3(a)), 折曲带坐标系 Ω_φ 可由折曲平面坐标系统 3 ψ 轴旋转角度 φ 得到(图 3(b))。其中角度 ψ 可认为与横向应力状态有关^[30]:

$$\tan(2\psi) = \frac{2\tau_{bc}}{\sigma_b - \sigma_c} \quad (14)$$

纤维偏折角 φ 由初始偏折角 φ_i 和折曲带内的剪切应变 γ 组成, 即 $\varphi = \varphi_i + \gamma$ 。 φ_i 可由轴向压缩的强度值推算得到, 此时材料只收轴向应力 $\sigma_{11} = -X_c$ 作用, 根据应力转轴公式可得折曲带内应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{ci} = -X_c \cos^2(\varphi_i) \\ \sigma_{22}^{ci} = -X_c \sin^2(\varphi_i) \\ \sigma_{12}^{ci} = X_c \sin(\varphi_i) \cos(\varphi_i) \end{cases} \quad (15)$$

其中, 应力分量符号的上标为应力所在坐标系。应用前文中介绍的基体失效准则式(9)计算可得折曲带内发生基体失效时的偏折角 φ_c :

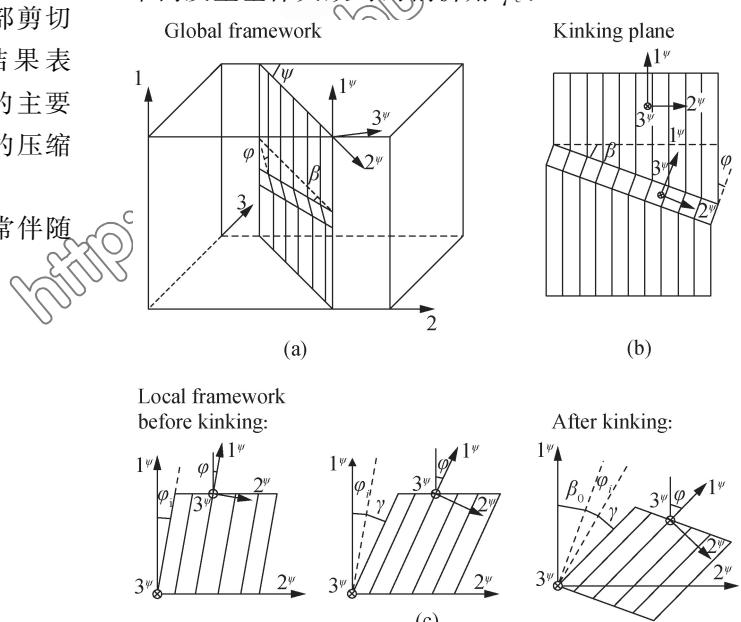


图 3 纤维折曲分析模型示意图

Fig. 3 Schematic of fiber kinking failure analysis model

$$\varphi_c = \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{S_L}{X_C} + \mu_L \right) \frac{S_L}{X_C}}}{2 \left(\frac{S_L}{X_C} + \mu_L \right)} \right) \quad (16)$$

$$\begin{cases} \varphi_c = \varphi_i + \gamma_c \\ \gamma_c = \int_0^{\sigma_{22}^c} S_{22} d\sigma_{22}^c + \int_0^{\sigma_{12}^c} S_{66} d\sigma_{12}^c \end{cases} \quad (17)$$

联立方程(8)、式(15)~(17)并采用迭代法可解得 φ_i 。

需要指出的是, 初始偏折角 φ_i 不能从试验观测直接得出, 而是由轴向压缩强度值 X_C 根据材料失效前的应力-应变关系反演得到的等效初始偏折角, 这里轴向压缩强度值被认为是一个材料的独立参数。如果选取不同的本构模型进行应力-应变分析, 会得到不同的 φ_i , 但是总可以保证轴向压缩强度的预测结果与试验值相同, 因此无法通过单轴加载试验验证本构模型的选取是否合适, 而是需要通过横向与轴向应力及面内剪切与轴向应力等混合加载试验进行验证, 例如采用失效模式为纤维折曲的小角度偏轴压缩试验(典型值 $\theta < 15^\circ$)及文献[34]提出的横向静水压力下的轴向压缩折曲破坏试验等。

一旦 φ_i 确定之后, 可根据式(18)确定折曲带偏折角 φ , 即确定折曲带坐标系。需要注意的是, 应力-应变计算采用的是增量形式, 因此确定 φ 的过程也需要采取增量计算的形式, 式中含有 $i-1$ 上标的变量取的是上一增量步的值, 其余均为当前增量步的值。

$$\begin{cases} \Delta\gamma = S_{22}(\sigma_i^c) \Delta\sigma_{22}^c + S_{66}(\sigma_i^c) \Delta\sigma_{12}^c \\ \gamma = \gamma^{(i-1)} + \Delta\gamma \\ \varphi = (\varphi_i + \gamma) \tau_{12}^c / |\tau_{12}^c| \end{cases} \quad (18)$$

将材料坐标系下的应力转至折曲带坐标系后, 可根据 LaRC05 准则判断失效是否发生, 当 $f_{fc} = 1$ 时, 发生纤维压缩失效:

$$f_{fc} = \left(\frac{\tau_{23}^c}{S_T - \mu_T \sigma_{22}^c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^c}{S_L - \mu_L \sigma_{22}^c} \right)^2 + \left(\frac{\langle \sigma_{22}^c \rangle_+}{Y_T} \right)^2 \quad (19)$$

其中, 符号 $\langle \cdot \rangle_+$ 为 Macauley 算子, 表示 $\langle x \rangle_+ = \max\{x, 0\}$ 。式中带有上标 is 的强度值为原位强度值, 取值方法可参考文献[29]。

对于纤维拉伸失效, 采用最大应力准则进行判断, 当 $f_{ft} = 1$ 时, 发生纤维拉伸断裂失效:

$$f_{ft} = \frac{\sigma_{11}}{X_T} \quad (20)$$

3 损伤演化

3.1 考虑破坏面方向的材料刚度退化模型

纤维折曲类似于断裂失效, 即需要考虑破坏面方向角度的影响并且属于局部问题, 这类失效模式的损伤演化分析可以采用 CDM 方法。如图 4 所示, CDM 方法在处理类断裂失效问题时, 首先需要选取代表体元(RVE), 在 RVE 中将材料的内部结构进行均匀化, 即用均质体代替有缺陷的实际结构并使两者的力学响应相同。

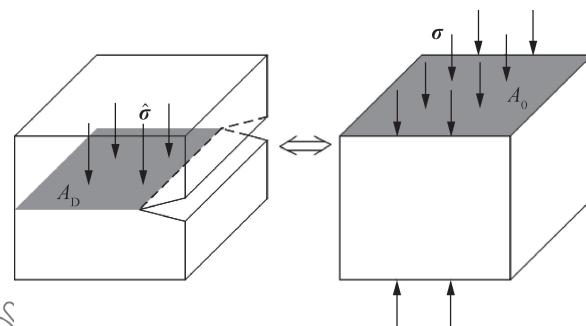


图 4 类裂纹失效模式代表体元(RVE)的均匀化示意图

Fig. 4 Schematic of homogenization in a representative volume element (RVE) in the crack-like failure mode cases

图中 $\hat{\sigma}$ 为有效应力, 代表作用在有效截面 (A_D) 上的应力; σ 为名义应力, 代表作用在名义截面 (A_0) 上的应力。有效应力与名义应力之间存在如下关系:

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \hat{\sigma} \quad (21)$$

对于三维问题, \mathbf{D} 为四阶损伤张量, 采用 Voigt 记法记为

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_{11} \quad d_{22} \quad d_{33} \quad d_{23} \quad d_{13} \quad d_{12}) \quad (22)$$

其中, d_{ij} 为损伤变量, 表征有效承载面积 (S_D) 的减少量, 即材料损伤对名义应力的折减作用。 d_{ij} 值在 0 到 1 之间变化, 当 $d_{ij} = 0$ 时表示材料没有损伤 ($A_D = A_0$), 而随着材料损伤的不断累积, d_{ij} 逐渐增加至 1, 当 $d_{ij} = 1$ 时材料发生完全失效 ($A_D = 0$)。不同的 d_{ij} 对应着不同的应力分量, 通常与失效模式相关, 可表示为应力、应变等场变量的函数。

考虑到损伤演化过程中, 能量耗散主要是材料弹性能的释放, 因此可忽略材料的塑性行为。结合连续介质损伤力学中的等应变假设^[35] 可得如下关系式:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ed} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (23)$$

式(21)与式(23)联立可得

$$\mathbf{C}^{ed} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{C}^e \quad (24)$$

其中: \mathbf{C}^e 为材料的弹性刚度矩阵; \mathbf{C}^{ed} 为损伤弹性刚度矩阵。

从图 4 可以看出, 前述推导过程中考虑的是破坏面与载荷作用面相平行的情况, 而当两者不平行时, 需要考虑破坏面角度的影响。由于倾斜破坏面的作用, 会产生纵横向应变与剪切应变之间的耦合作用, 例如图 5 中的 ε_{22} 与 γ_{23} 。当采用式(24)对损伤后的材料刚度矩阵进行折减时, 无法描述此种耦合效应, 因此需要在刚度折减关系中引入破坏面角度参数。

将失效面坐标系记为 Ω_{fp} , 将材料坐标系记为 Ω_o , 则材料在 Ω_{fp} 下的刚度矩阵 $\mathbf{C}^e(\Omega_{fp})$ 与 Ω_o 下的刚度矩阵 $\mathbf{C}^e(\Omega_o)$ 之间的转换关系如下:

$$\mathbf{C}^e(\Omega_{fp}) = \mathbf{T}_o \mathbf{C}^e(\Omega_o) \mathbf{T}_e \quad (25)$$

$$\mathbf{C}^e(\Omega_o) = \mathbf{T}_e^{-1} \mathbf{C}^e(\Omega_{fp}) \mathbf{T}_o \quad (26)$$

其中, 转换矩阵的表达式可参见附录 2。

研究表明, 当材料损伤后, 受到直接影响的是破坏面上的应力状态^[22, 24, 36-37], 本文基于此假设讨论刚度退化关系。将与破坏面相关的三个应力分量分别记为 σ_N 、 τ_{NL} 和 τ_{NT} , 将 $\mathbf{C}^e(\Omega_{fp})$ 中与这三个应力分量相关的下标分别记为 i 、 j 、 k 。参照 CDM 方法推广至各向异性体所建立的 MLT_ 模型^[38], 有如下刚度退化关系:

$$\begin{cases} C_{il}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{il}^e(\Omega_{fp})\langle\sigma_N\rangle_+/\sigma_N \\ C_{jl}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{jl}^e(\Omega_{fp}) \\ C_{kl}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{kl}^e(\Omega_{fp}) \end{cases} \quad (27)$$

其中: l 的取值为 1 到 6; $\mathbf{C}^{ed}(\Omega_{fp})$ 为失效面坐标系下的损伤刚度矩阵。需要指出的是, σ_N 、 τ_{NL} 和 τ_{NT}

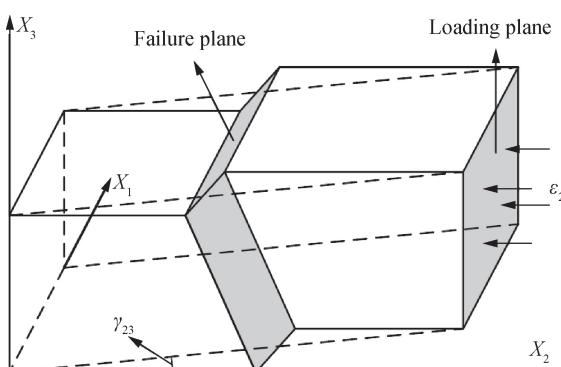


图 5 典型的失效面与应力作用面不平行的 RVE

Fig. 5 RVE in a typical case where failure plane is oblique to loading plane

对应的是同一个作用面(失效面), 因此采用相同的损伤变量 d 。

不难发现, 此时 $\mathbf{C}^{ed}(\Omega_{fp})$ 为非对称矩阵, 为了保持刚度矩阵的对称性, 需要对 $C_{il}^{ed}(\Omega_{fp})$ 、 $C_{jl}^{ed}(\Omega_{fp})$ 和 $C_{kl}^{ed}(\Omega_{fp})$ 的对称项也进行折减, 即

$$\begin{cases} C_{il}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{li}^e(\Omega_{fp})\langle\sigma_N\rangle_+/\sigma_N \\ C_{jl}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{lj}^e(\Omega_{fp}) \\ C_{kl}^{ed}(\Omega_{fp}) = (1-d)C_{lk}^e(\Omega_{fp}) \end{cases} \quad (28)$$

得到 $\mathbf{C}^{ed}(\Omega_{fp})$ 后, 可通过式(25)中的转换关系得到 $\mathbf{C}^{ed}(\Omega_o)$, 则失效后应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ed}(\Omega_o)\boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (29)$$

需要指出的是, 在该方法中, 考虑到 $\sigma_N < 0$ 时破坏面处于闭合状态, 因此仅当 $\sigma_N > 0$ 时对 σ_N 相关的刚性项进行折减。

3.2 刚度退化规律

CDM 方法中通过损伤变量 d 的变化反映材料刚性的变化, 本节着重讨论损伤演化过程中 d 的变化规律。本文中 d 是与控制应变有关的函数, 控制应变指的是由与损伤进展过程直接相关的应变分量按一定关系构成的等效应变。假设材料失效后, 相关应力-应变满足线性退化关系, 则 d 可由式(30)给出:

$$d = \begin{cases} 1(d > 1) \\ \delta^f \frac{\delta - \delta^o}{\delta(\delta^f - \delta^o)} \\ 0(\delta = 0) \end{cases} \quad (30)$$

其中: δ^o 为材料开始失效时的控制应变; δ^f 为材料最终失效时的控制应变。控制应变取决于失效模式, 以下针对不同的失效模式进行讨论。

基体失效: 控制应变由 Ω_{fp} 下的应变分量合成而得, 首先需要通过 Ω_{fp} 下的应力分量计算各应变分量间的夹角:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{\tau_L}{\tau_T}\right), \omega = \arctan\left(\frac{\langle\sigma_N\rangle_+}{\tau_{matrix}}\right) \quad (31)$$

其中,

$$\tau_{matrix} = \sqrt{(\tau_T)^2 + (\tau_L)^2} \quad (32)$$

Ω_{fp} 下的各应变分量可以根据 Ω_o 下的各应变分量通过应变转轴公式计算得到, 需要指出的是, 基于前文提出的假设, 所有计算均基于应变的弹性部分。则基体失效模式的控制应变可以按下式计算:

$$\delta_{matrix} = \begin{vmatrix} \langle\sigma_N\rangle_+ \epsilon_N \sin\omega + \\ \sigma_N \\ (\gamma_T^e \cos\lambda + \gamma_L^e \sin\lambda) \cos\omega \end{vmatrix} \quad (33)$$

纤维断裂: 纤维拉伸断裂时, 失效面平行于应力作用面方向, 因此:

$$\delta_{ft} = |\epsilon_{11}| \quad (34)$$

纤维折曲: 在纤维折曲损伤演化过程中, 能量耗散是由折曲带边缘纤维的弯曲和断裂及折曲带内部基体的开裂导致的, 这些损伤演化都与折曲带内纤维转动有关。因此可以认为折曲带坐标系 (Ω_φ) 下的面内剪切应变 γ_{12}^φ 为纤维折曲失效的控制应变, 即

$$\delta_{fc} = |\gamma_{12}^{\varphi, \text{elas}}| \quad (35)$$

明确了不同失效模式的控制应变计算方法之后, 即可确定 δ° 和 δ^f 。材料开始失效时计算控制应变即可得到, 则需要根据能量平衡原理获得。当采用 CDM 方法描述类断裂问题时, 需要在 RVE 中对局部损伤(裂纹、纤维折曲)进行均质化, 相当于局部损伤释放的能量由整个 RVE 耗散的能量进行等效, 此时有如下关系:

$$W_{\text{failure}} = U_{\text{elastic}} \quad (36)$$

局部损伤释放的能量通常可类比断裂力学中的断裂能进行计算:

$$W_{\text{failure}} = wA_{fp} \quad (37)$$

其中: w 为能量释放率, 该参数与失效模式密切相关, 可通过试验确定(附录 3); A_{fp} 为破环面的面积, 可根据 RVE 的尺寸、形状及破坏面角度进行计算。

RVE 释放的弹性能 U_{elastic} 可表示为

$$U_{\text{elastic}} = V \int \sigma_{\text{mode}} d\delta \quad (38)$$

其中: V 为 RVE 的体积; σ_{mode} 代表不同失效模式的控制应力, 计算方法如下式:

$$\sigma_{\text{mode}} = \begin{cases} \sqrt{\langle \sigma_N \rangle_+^2 + (\tau_T)^2 + (\tau_L)^2} & (\sigma_{\text{matrix}}) \\ |\epsilon_{11}| (\sigma_{ft}) \\ |\gamma_{12}^\varphi| (\sigma_{fc}) \end{cases} \quad (39)$$

由线性退化关系, 式(38)可改写成

$$U_{\text{elastic}} = \frac{1}{2} \delta^f \sigma_{\text{mode}}^o V \quad (40)$$

其中, σ_{mode}^o 为材料开始失效时的控制应力。联立式(36)、式(37)和式(40)可得

$$\delta^f = \frac{2w}{\sigma_{\text{mode}}^o L} \quad (41)$$

其中, $L = V/A_{fp}$ 为特征长度, 该参数的引入可以在很大程度上减弱 CDM 方法用于有限元分析时的网格敏感性, 具体在 5.3 节中进行讨论。

4 VUMAT 子程序实现

VUMAT 为 ABAQUS 提供的用于显式分析步的用户定义材料子程序, 可用于准静态分析^[39]。图 6 为主程序与子程序的交互示意图, 主程序在每一增分步开始前向子程序传入该步的应变增量 $\Delta\epsilon_i$ 以及上一步的状态变量 (F_{i-1} 和 d_{i-1} 等), 子程序进行应力计算和状态变量更新, 将当前增分步的应力 σ_i 与状态变量 (F_i 和 d_i 等) 传出到主程序, 完成当前增分步的计算。

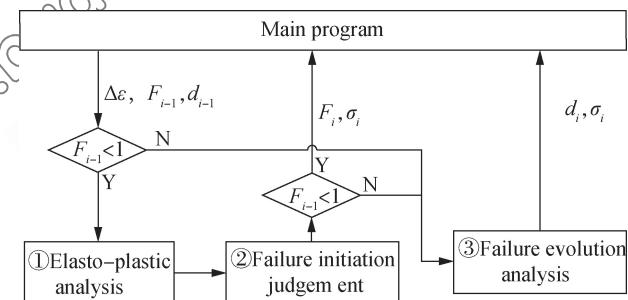


图 6 破坏分析方法的 VUMAT 子程序结构图

Fig. 6 Structure of VUMAT subroutine in implementation of failure analysis method

5 模型验证与讨论

5.1 IM7/8552 压缩破坏过程

利用上述提出的 PDA 模型对 IM7/8552 碳纤/环氧树脂复合材料单向板的轴向及偏轴压缩试验进

表 1 IM7/8552 复合材料性能及参数

Table 1 Material properties and parameters for IM7/8552 composites

E_{11}/GPa	E_{22}/GPa	G_{12}/GPa	G_{23}/GPa	S_L/MPa	S_T/MPa	$G_{IC}/(\text{kJ} \cdot \text{m}^{-2})$	$G_{UC}/(\text{kJ} \cdot \text{m}^{-2})$
156	8.4	5.6	2.8	91.4	89	0.21	0.8
X_T/MPa	X_C/MPa	Y_T/MPa	Y_C/MPa	S_L/MPa	$\Gamma_{ft}/(\text{kJ} \cdot \text{m}^{-2})$	$\Gamma_{fc}/(\text{kJ} \cdot \text{m}^{-2})$	$A/(\text{MPa}^{-n})$
2 560	1 590	73	255	130	92	80	1.5×10^{-15}
ν_{12}	ν_{23}	a_{66}	n	μ_L	μ_T		
0.34	0.5	2.6	4.9	0.312	0.364		

Notes: E_i —Lamina modulus in i direction; G_{ij} —Lamina shear modulus in ij direction; ν_{ij} —Poisson ratio in ij direction; G_{IC} , G_{UC} —Fracture toughness for mode I and II; Γ_{ft} —Fiber tensile fracture energy; Γ_{fc} —Fiber compressive fracture energy; X_T —Longitudinal tensile; X_C —Longitudinal compressive; Y_T —Transverse tensile; Y_C —Transverse compressive; S_L —In-plane shear; a_{66} , A , n —Plastic parameter; μ_T , μ_L —Friction coefficient.

行有限元模拟, 并与文献[5, 40]提供的试验结果进行对比分析, 以验证模型的有效性。计算过程中采用的主要材料力学参数和模型参数如表1所示。

有限元模型尺寸与文献中试样尺寸($l \times w \times t$)保持一致, 取为 $20\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 4\text{ mm}$, 有限元建模采用八节点减缩积分(C3D8R)实体单元, 网格密度为 $100 \times 50 \times 20$ 。加载方式采用位移控制, 分析中利用显式分析步进行准静态分析。

图7为有限元模拟得到的轴向压缩破坏完全失效时形成的纤维折曲带形貌, 图8为压缩破坏过程中FEA模拟结果与试验对比。观察表明轴向压缩破坏的演化过程为(见图8(a)):①纤维折曲带起始于包含纤维初始偏角等缺陷的区域, 有限元模拟中用一个比周围强度略小的单元表示;②随后损伤区域中产生的剪切变形会引起周围材料的破坏并导致损伤沿一定方向扩展, 为位移响应曲线中载荷开始下降;③由于损伤区域与未损伤区域间载荷的重新分配会引发应力集中(变形局部化), 折曲带会迅速扩展, 并伴随着载荷的迅速下降;④当折曲带迅速在板厚方向扩展完全后, 会继续沿折曲带边缘较为稳定地扩展, 折曲带会逐渐加宽直到完全失效。该模拟破坏过程与试验观察结论^[15, 31, 41]基本一致。

容易注意到, 图8(a)模拟计算的强度值要大于文献[40]中的试验值, 这是由于模拟计算时轴向压缩强度这一参数(表1及式16中 X_c)没有采用文献[40]中的试验值, 而是采用了WWFE II^[42]提供的试验值。原因是文献[40]试验中所有试样的破坏模式均为端部压溃, 该种破坏模式通常不可作为有效的强度评估结果。但是WWFE II^[42]只提供了材料性能的极限值而未提供测试过程中力-位移响应曲线, 故此处仍采用文献[40]试验中的力-位移响应曲线与模拟结果进行对比。需要指出的是, 虽然文献[40]中轴向压缩强度试验值不具有参考意义, 但是破坏前的力-位移响应曲线仍然可以认为是有效的, 可以验证模型预测轴向压缩响应时在弹性阶段的正确性。

图8(b)和图8(c)分别为 15° 试件在偏轴载荷下的两种压缩破坏模式:纤维折曲和基体破坏。两种

破坏模式通过有限元模拟得到的强度值比较接近, 分别为 418.7 MPa 和 399.1 MPa , 说明该角度处于两种破坏模式的转换临界角度附近, 因此在试验^[5]中两种破坏模式均可观察到。

当发生纤维折曲时(图8(b)), 折曲带在面内的进展方向基本与纤维方向垂直, 而在面外破坏面的角度为 28° 左右, 而当发生基体破坏时(图8(c)), 破坏面与纤维方向平行并垂直于板厚方向。该偏轴角度下还反映了两种破坏模式中材料破坏韧性的差异, 相比基体破坏纤维折曲破坏表现出更强的破坏韧性, 该结论从预测的载荷-位移响应曲线中可以得出, 载荷-位移曲线包络的面积反映了材料破坏过程中吸收的能量, 在试件尺寸完全一样的情况下, 纤维折曲破坏模式下单位体积材料吸收的能量显然更多, 即表现出更强的韧性。

图8(d)~8(f)中的破坏模式均为基体破坏, 表现为脆性断裂, 且断裂区域呈倾斜带状分布, 各情况的主要差别在于破坏面的角度。当剪切应力起主导作用时, 如图8(d)中 30° 偏轴压缩的情况, 破坏面一般垂直于板厚方向, 即破坏面角度为 0° , 而当横向应力占的比例越来越大时, 破坏面的角度开始变大, 如 45° (图8(e))和 90° (图8(f))偏轴压缩的情况。其中对于 90° 试件, 通过Mohr-Coulomb法计算可得绝大多数结构复合材料的断裂角在 $51^\circ \sim 55^\circ$ 之间^[6], 而有限元模拟得到的断裂角约为 55° , 与理论计算基本一致。这也解释了层合板压缩破坏中的一些试验现象^[3]:例如当层合板受较大横向载荷时, 由于倾斜的破坏面的作用, 一般表现出沿板厚方向的破坏及由“楔形”作用引起的基体或层间劈裂等破坏模式, 而当层合板受较大的剪切应力作用时, 破坏模式多为面内剪切破坏及层间破坏。因此, 层合板中基体主导的破坏中, 破坏形式与横剪比有着密切的关系。

图9给出了通过FEA及理论计算得出的偏轴载荷下IM7/8552的压缩破坏强度及破坏面角度与试验结果^[5, 40, 42, 44]的对比。其中破坏强度的理论计算结果是依据LaRC05准则和Puck准则分别绘制强度包络线并选择两种破坏模式中较危险(强度较小)的情况合并得到, 据此还可以得到两种破坏模式之间的理论转变偏轴角度为 12° , 这也验证了前文关于 15° 偏轴压缩模拟结果的讨论。可以看出, FEA结果和理论计算结果均与试验值吻合良好, 证明了FEA与理论计算具有同等效果。

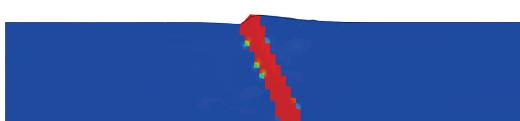


图7 纤维折曲带形貌有限元模拟结果

Fig. 7 FEA simulation of kink band morphology of fiber

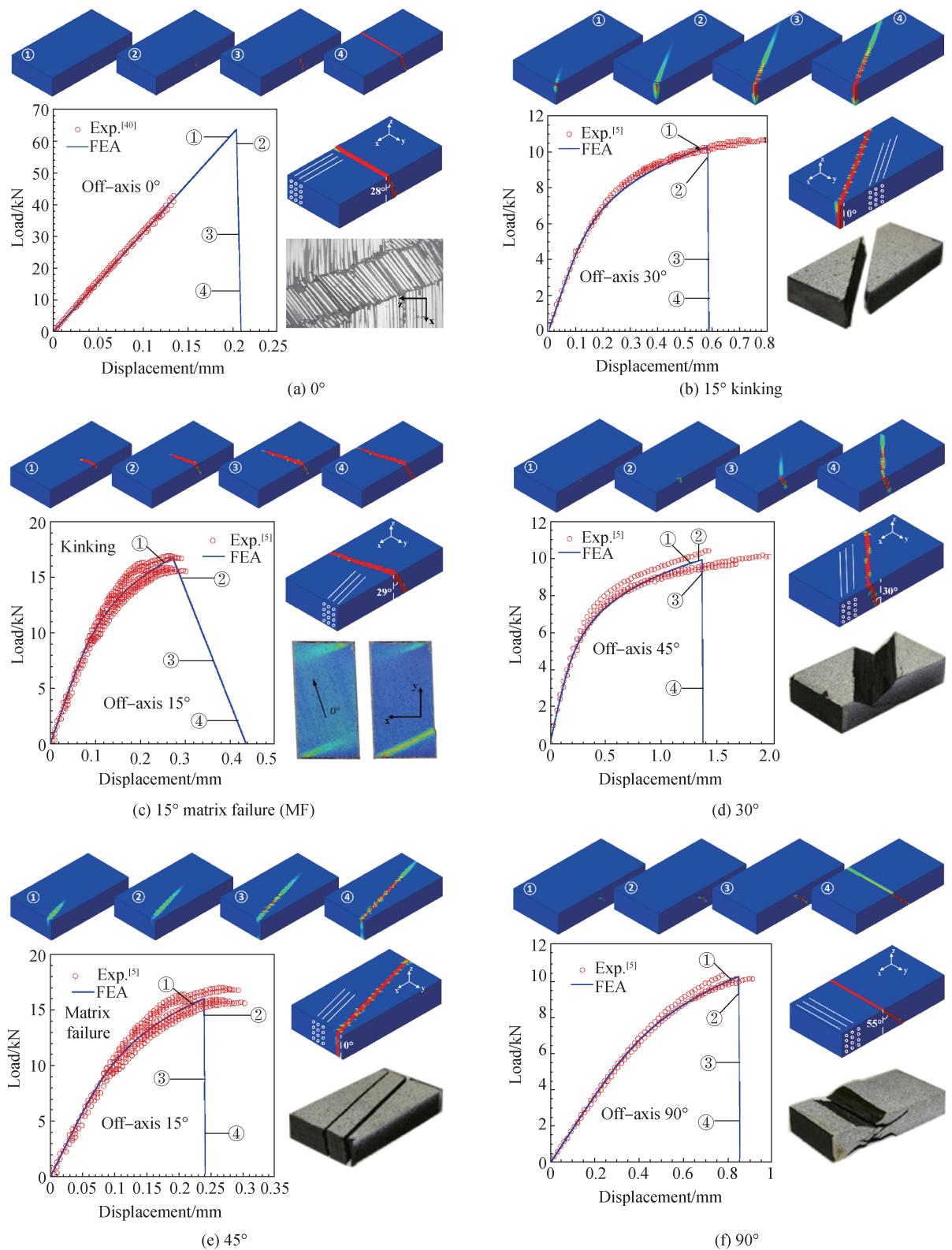


图 8 IM7/8552 单向复合材料压缩破坏过程中 FEA 模拟结果与试验对比

Fig. 8 FEA result of compression failure process of IM7/8552 unidirectional composites in comparison with experiment

而对于破坏面的角度，当发生基体破坏时，理论计算值采用 Puck 准则得到，当发生纤维折曲时，破坏面的角度通过 Matsuo 等^[45]提出的理论计算模

型进行计算：

$$\beta = \arctan \left(\frac{G}{E_T} \cdot \frac{Y_T}{S_L} \right) \quad (42)$$

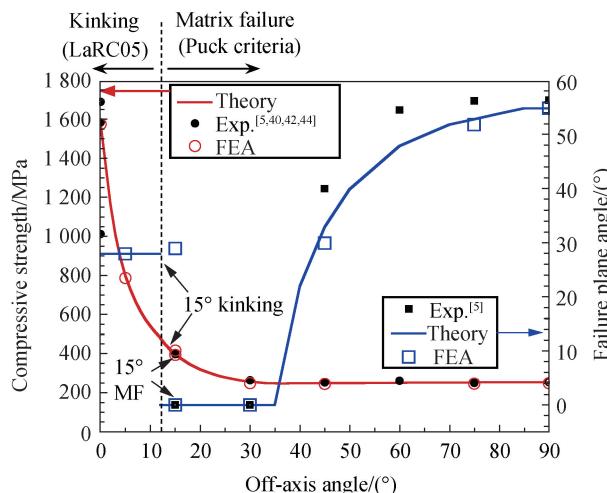


图 9 偏轴载荷下 IM7/8552 的压缩强度和破坏面角度的理论计算与 FEA 计算结果

Fig. 9 Predicted off-axis compressive strength and failure plane angle of IM7/8552 in comparison with experimental results

其中: β 为纤维折曲模式下的破坏面角度, 即纤维折曲带角度(见图 3); G 为纵向剪切模量; E_T 为横向拉伸模量; Y_T 和 S_L 分别为横向拉伸强度和剪切强度。由式(42)可以看出, β 只与材料的强度参数有关, 与应力状态无关, 即同种材料在不同偏轴角度下发生纤维折曲破坏, 破坏面角度是一定的, 与偏轴角度无关, 因此纤维折曲破坏模式下破坏面角度的理论预测值为恒值。对于 IM7/8552 材料体系, 计算得到的纤维折曲破坏面角度为 28° 。

从图 9 可以看出, 在基体破坏模式下, 破坏面角度的试验值、理论值和 FEA 结果均吻合较好。对于纤维折曲破坏, 并没有足够的折曲带角度试验值进行对比, 但是从类似材料体系^[4]的试验中发现, 10° 与 15° 偏轴角下纤维折曲带角度基本一致, 为 25° 左右, 同样验证了前述结论。

综上所述, 本文建立的分析模型可以模拟压缩破坏的起始、演化直至最终失效的全过程以及该过程中的力学响应, 模拟结果与试验吻合良好, 证明了该模型的有效性。

5.2 参数讨论

Budiansky^[10] 提出了经典的理想塑性假设下复合材料的轴向压缩强度计算公式:

$$\sigma_c = \frac{G}{1 + \varphi_i / \gamma_Y} \quad (43)$$

其中: G 为纵向剪切模量; φ_i 为纤维初始偏角, $\gamma_Y = \tau_Y/G$ 为纵向剪切屈服应变。从该公式可以发现, 影响复合材料轴向压缩强度的主要参数为纤维

初始偏角、材料的纵向剪切刚度及材料塑性。

图 10 给出了改变这些参数对 IM7/8552 预测轴向压缩响应的影响。其中, 图 10(a) 为考虑与不考虑材料塑性情况下不同纤维初始偏角对轴向压缩响应的影响。可以看出, 纤维初始偏角的增加会降

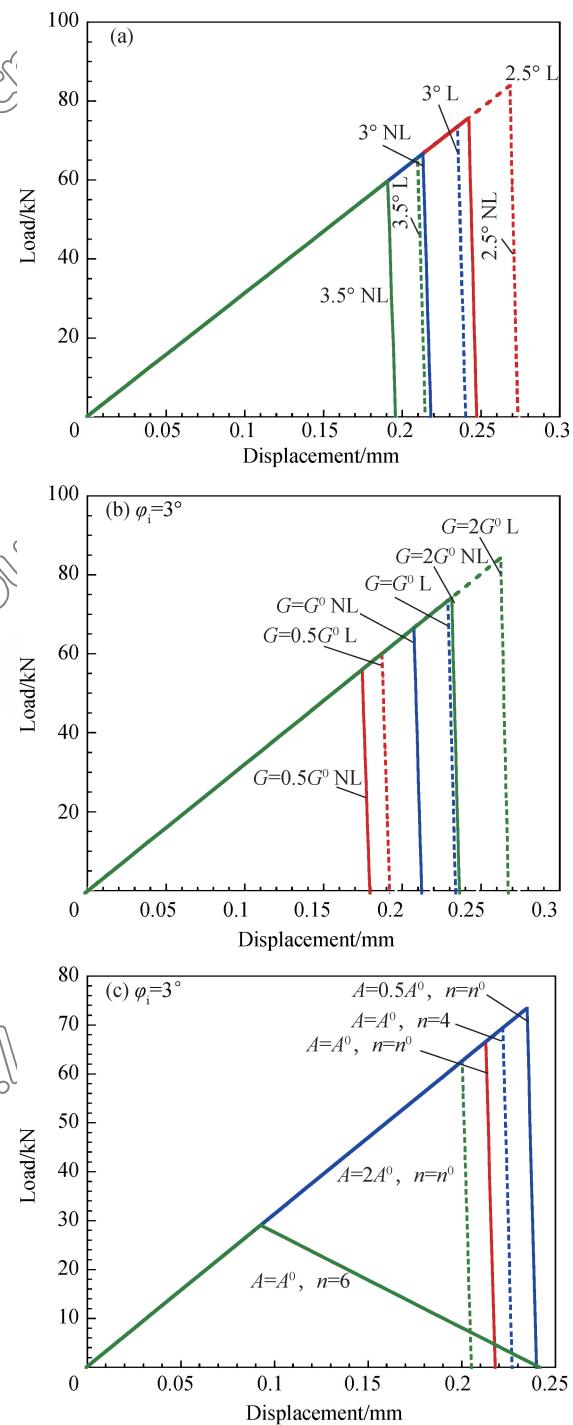


图 10 不同参数对 IM7/8552 轴向压缩响应的影响

Fig. 10 Influence of different parameters on response of axial compression of IM7/8552

低轴向压缩强度，而材料塑性的影响不如纤维初始偏角敏感。图 10(b)表示在同一纤维初始偏角，考虑与不考虑材料塑性的情况下，纵向剪切模量对轴向压缩强度的影响。可以发现，纵向剪切模量的增大会增大材料的轴向压缩强度，且纵向剪切模量增大时，考虑与不考虑材料塑性轴向压缩强度预测值的差距也会增大。图 10(c)则表现了利用式(6)中 A 和 n 表征材料塑性参数的变化对轴向压缩强度的影响。可以看出，相对于参数 A ，轴向压缩强度对参数 n 更为敏感。暗示出当材料塑性足够大时，轴向压缩破坏模式会由脆性破坏转换为韧性破坏的内在机制。

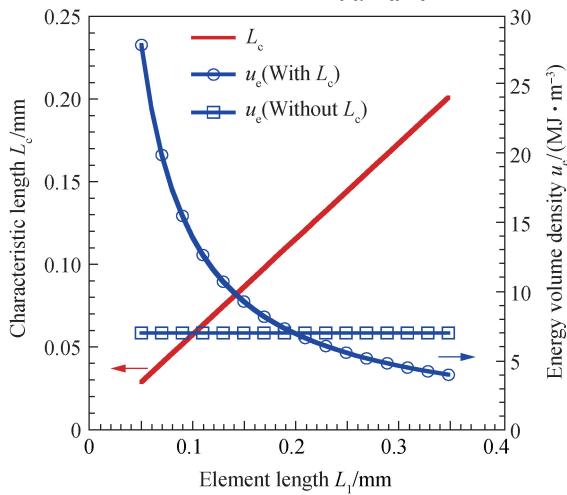


图 11 引入与不引入特征长度时 IM7/8552 能量体密度 U_e (a) 和破坏能量释放率 w (b) 与单元尺寸的关系

Fig. 11 Relation between energy volume density U_e (a) and energy release rate w (b) and element dimension of IM7/8552 with and without characteristic length

由于能量释放率只与材料种类和破坏模式有关，对于同种材料和破坏模式，能量释放率不应随着单元尺寸的变化而变化。容易发现，当不引入特征长度时，破坏时能量释放率会随着单元尺寸的增加而增加，该种结果在物理意义上是不合理的。而当引入特征长度以后，能量释放率不会随着单元尺寸的变化而变化，从而保证了划分单元不同时也可以得到相同的物理响应，减弱了网格敏感性的影响。

图 12 为采用不同网格划分密度时，对 IM7/8552 材料横向压缩试样进行计算得到的结果。试样尺寸为 $3.6\text{mm} \times 1.2\text{mm} \times 1.2\text{mm}$ ，采用立方体网格进行划分，网格密度和特征长度值已标于图中。可以发现，力-位移响应和破坏面方向的计算结果受网格划分方式和密度的影响都非常小，表明该模型具有较小的网格敏感性。

5.3 网格敏感性

CDM 方法中控制对象为材料的应力-应变关系，根据式(30)和式(41)可知，若引入特征长度参数，划分的单元尺寸不同时，损伤变量 d 随应变的变化规律也会不同，即单元的应力-应变响应不同，此时不同尺寸的单元具有不同的能量体密度。而不引入特征长度时，不同尺寸单元的应力-应变响应保持不变，即能量体密度也保持不变。以立方体单元和横向压缩破坏模式为例，特征长度只与单元的长度 L_1 有关(详见附录 4)，则可以计算得到引入和不引入特征长度时，单元的能量体密度(u_e)及破坏时能量释放率(w)与 L_1 (即与单元尺寸)的关系，如图 11 所示。

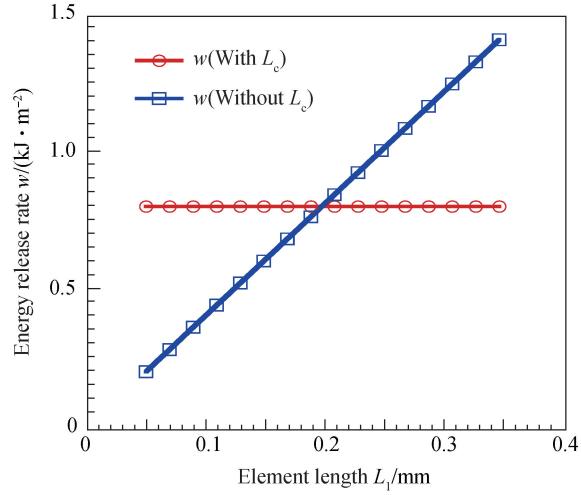
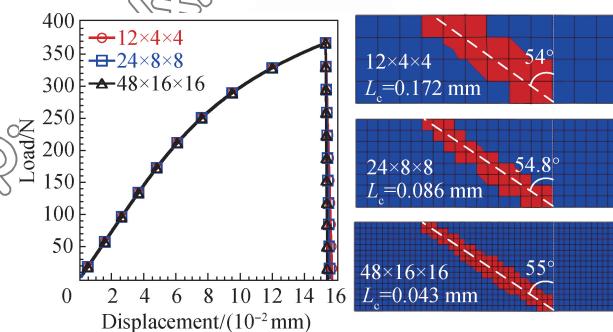


图 12 网格划分尺寸和密度对 IM7/8552 计算结果的影响

Fig. 12 Influence of meshing method and density on numerical result of IM7/8552

6 结论

(1) 在连续介质损伤力学(CDM)理论框架下，提出了一种分析复合材料压缩响应及破坏的渐进损伤模型，可以对复合材料的纵向、横向及偏轴压缩



响应进行预测。

(2) 模型涵盖了弹塑性应力分析、失效判定和损伤演化三个基本部分, 由此模拟复合材料压缩破坏从起始、损伤演化到最终失效的全过程。

(3) 通过自编用户子程序 VUMAT, 解决了本模型利用有限元软件 ABAQUS 的有限元实现。

(4) 对 IM7/8552 单向碳纤维/环氧树脂复合材料的轴向及偏轴压缩破坏分析表明, 数值模拟结果真实地展示了复合材料压缩破坏的完整过程, 且定量确定了偏轴加载下压缩强度及破坏面方向与偏轴角度的关系, 提出的计算方法可行且有效。

(5) 讨论了模型中相关参数对复合材料轴向压缩响应的影响, 包括纤维初始偏角、纵向剪切模量及材料塑性, 结果表明这些参数对正确预测轴向压缩承载能力至关重要。同时也讨论说明了本模型具有较小的网格敏感性。

(6) 本模型对多向层合板的压缩破坏与强度预测至关重要, 为后续的层合板分析奠定基础。

附录 1 弹塑性柔度矩阵的 Voigt 张量形式

弹塑性柔度矩阵的 Voigt 张量形式中各非零项的表达式如下:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, S_{12} = S_{13} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} + \frac{1}{H_p} \left[\frac{3(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right]^2 \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} + \frac{1}{H_p} \left[\frac{3}{2}(\Gamma - 1) - \frac{9(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}{4V^2} \right] \\ S_{24} &= \frac{6\nu_{23}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{25} &= \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{26} &= \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{12}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{33} &= \frac{1}{E_2} + \frac{1}{H_p} \left[\frac{3(\sigma_{33} - \sigma_{22})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right]^2 \\ S_{34} &= \frac{6\nu_{23}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{33} - \sigma_{22})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{35} &= \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{33} - \sigma_{22})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{36} &= \frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{12}}{H_p V} \left[\frac{3(\sigma_{33} - \sigma_{22})}{2V} + \sqrt{\frac{3}{2}(\Gamma - 1)} \right] \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} + \frac{1}{H_p} \left(\frac{6\nu_{23}}{V} \right)^2, S_{45} = \frac{18\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31} \sigma_{23}}{H_p V^2} \\ S_{46} &= \frac{18\Gamma^2 a_{66} \sigma_{12} \sigma_{23}}{H_p V^2}, S_{55} = \frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{H_p} \left(\frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31}}{V} \right)^2 \\ S_{56} &= \frac{\sigma_{12} \sigma_{31}}{H_p} \left(\frac{3\Gamma^2 a_{66}}{V} \right)^2, S_{66} = \frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{H_p} \left(\frac{3\Gamma^2 a_{66} \sigma_{31}}{V} \right)^2 \end{aligned}$$

其中:

$$H_p = \frac{1}{An \bar{\sigma}^{n-1}}$$

$$V = \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 + 2\Gamma^2 a_{66} (\sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)]}$$

附录 2 三维应力应变坐标转轴公式

将原始坐标系(1-2-3)下和新坐标系下(1'-2'-3')的应力和应变记为 σ 和 σ' 及 ε 和 ε' , 各变量之间转换关系如下:

$$\sigma' = T_\sigma \sigma, \sigma = T_\sigma^{-1} \sigma', \varepsilon' = T_\varepsilon \varepsilon, \varepsilon = T_\varepsilon^{-1} \varepsilon'$$

则将应力和应变从原始坐标系下转换至新坐标系下的转轴矩阵及其逆矩阵可记为:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} K_1 & 2K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}, T_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} K_1^T & 2K_3^T \\ K_2^T & K_4^T \end{bmatrix}$$

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 2K_3 & K_4 \end{bmatrix}, T_\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} K_1^T & K_3^T \\ 2K_2^T & K_4^T \end{bmatrix}$$

其中:

$$K_1 = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} m_1 n_1 & l_1 n_1 & l_1 m_1 \\ m_2 n_2 & l_2 n_2 & l_2 m_2 \\ m_3 n_3 & l_3 n_3 & l_3 m_3 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 \\ l_1 l_3 & m_1 m_3 & n_1 n_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 & l_2 m_3 + l_3 m_2 \\ m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 & l_1 m_3 + l_3 m_1 \\ m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 & l_1 m_2 + l_2 m_1 \end{bmatrix}$$

l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) 表示 3 个新坐标轴(1'-2'-3')对于老坐标轴(1-2-3)的方向余弦, 如附表 1。

附表 1 新、旧坐标轴的转换

	1	2	3
1'	l_1	m_1	n_1
2'	l_2	m_2	n_2
3'	l_3	m_3	n_3

附录 3 能量释放率计算方法

基体失效: w_{matrix} 分解为 w_N 、 w_T 和 w_L , 其中 w_N 为 I 型面内断裂韧性, 可由预置缺口的四点弯曲试验测定。试验证明, 该值与材料 I 型层间断裂韧性的值非常接近^[21], 因此可以用 I 型层间断裂韧性试验确定 w_N , 即 $w_N = G_{\text{IC}}$ 。 w_T 和 w_L 为纤维间基体剪切破坏时的断裂韧性, 与 II 型层间断裂韧性描述的破坏模式相符, 因此可认为 $w_T = w_L = G_{\text{IIC}}$ 。对于最一般的情况, 可采用一种简单的加权平均形

式确定 w_{matrix} :

$$w_{\text{matrix}} = w_N \left[\frac{\sigma_N^0}{\sigma_{\text{matrix}}^0} \right]^2 + w_T \left(\frac{\tau_T^0}{\sigma_{\text{matrix}}^0} \right)^2 + w_L \left(\frac{\tau_L^0}{\sigma_{\text{matrix}}^0} \right)^2$$

其中, σ_{matrix} 为基体失效模式的控制应力(式 39)。

纤维失效: 纤维断裂与折曲失效的能量释放率无法由标准试验得到, 文献[46]建议采用紧湊拉伸试验(CTT)与紧湊压缩试验(CCT)分别进行测定。该种试验的难点在于如何获得稳定进展的纤维折曲带以及如何避免其他失效模式的干扰。关于 w_{ft} 与 w_{fc} 的测定, 仍需要进一步的研究。

附录 4 特征长度 L_c 计算方法

特征长度为单元体积与破坏面面积的比值, 根据单元尺寸和形状及破坏面方向可以进行计算^[21]。对于立方体单元和横向压缩破坏模式(如图 A-1 所示), 单元的体积为

$$V = L_1 L_2 L_3$$

破坏面的面积为

$$A_{fp} = \frac{L_2 L_3}{\cos \alpha}$$

则此时单元的特征长度 L_c 为

$$L_c = \frac{V}{A_{fp}} = L_1 \cos \alpha$$

对于 IM7/8552 材料体系, α 为 55°。

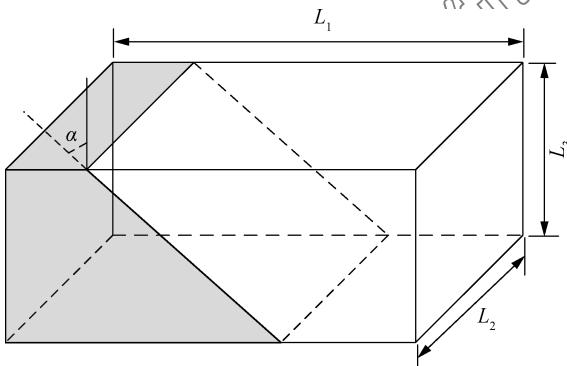


图 A-1 立方体单元横向压缩破坏模式示意图

Fig. A-1 Schematic of cubic element under transverse compression

参考文献:

- [1] MARTIN Knops. Analysis of failure in fiber polymer laminates: The theory of Alfred Puck[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] TSAMPAS S A, GREENHALGH E S, ANKERSEN J, et al. On compressive failure of multidirectional fibre-reinforced composites: A fractographic study[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2012, 43(3): 454-468.

- [3] ZOBEIRY N, VAZIRI R, POURSARTIP A. Characterization of strain-softening behavior and failure mechanisms of composites under tension and compression[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2015, 68: 29-41.
- [4] KAWAI M, SAITO S. Off-axis strength differential effects in unidirectional carbon/epoxy laminates at different strain rates and predictions of associated failure envelopes[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2009, 40(10): 1632-1649.
- [5] KOERBER H, XAVIER J, CAMANHO P P. High strain rate characterisation of unidirectional carbon-epoxy IM7-8552 in transverse compression and in-plane shear using digital image correlation[J]. Mechanics of Materials, 2010, 42(11): 1004-1019.
- [6] PUCK A, SCHURMANN H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models [J]. Composites Science & Technology, 2002, 62(12-13): 1633-1662.
- [7] ROSEN B W. Mechanics of composite strengthening[C]. Fiber Composite Materials, Seminar of the American Society for Materials US: Metals Powk, Ohio, 1964.
- [8] ARGON A S. Fracture of composites[J]. Treatise on Materials Science & Technology, 1972, 1: 79-114.
- [9] 薛元德, 王征颖. 玻璃钢压缩强度的分析[J]. 力学季刊, 1981, 4: 40-49.
- XUE Yuande, WANG Zhengying. Analysis of GRP compressive strength[J]. Chinese Quarterly Mechanics, 1981, 4: 40-49 (in Chinese).
- [10] BUDIANSKY B. Micromechanics[J]. Computers & Structures, 1983, 16(1): 3-12.
- [11] 魏悦广, 杨卫. 单向纤维增强复合材料的压缩弹塑性微屈曲[J]. 航空学报, 1992, 13(7): 388-393.
- WEI Yueguang, YANG Wei. Elastoplastic compressive microbuckling of unidirectional fiber reinforced composites[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(7): 388-393 (in Chinese).
- [12] NAYA F, HERRAEZ M, LOPES C S, et al. Computational micromechanics of fiber kinking in unidirectional FRP under different environmental conditions[J]. Composites Science & Technology, 2017, 144: 26-35.
- [13] BISHARA M, ROLFES R, ALLIX O. Revealing complex aspects of compressive failure of polymer composites: Part I—Fiber kinking at microscale[J]. Composite Structures, 2017, 169: 105-115.
- [14] PRABHAKAR P, WAAS A M. Interaction between kinking

- and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites[J]. Composite Structures, 2013, 98: 85-92.
- [15] 张弥, 关志东, 黎增山, et al. 考虑纤维初始位错的复合材料轴向压缩性能[J]. 复合材料学报, 2017, 34(8): 1754-1763. ZHANG Mi, GUAN Zhidong, LI Zengshan, et al. Longitudinal compressive properties of composites considering fiber initial misalignment[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2017, 34(8): 1754-1763 (in Chinese).
- [16] GONZALEZ C, LLORCA J. Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression: Microscopic mechanisms and modeling[J]. International Journal of Solids & Structures, 2007, 47(13): 2795-2806.
- [17] 黄争鸣, 张若京. 复合材料结构受横向载荷作用的强度问题[J]. 复合材料学报, 2005, 22(2): 148-159. HUANG Zhengming, ZHANG Ruojing. On the ultimate strength of a fiber reinforced composite laminate subjected to lateral loads[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(2): 148-159 (in Chinese).
- [18] 彭湃, 赵美英, 王文智. 细观力学模型预测复合材料横向强度性能研究[J]. 机械科学与技术, 2017, 36(10): 1611-1618. PENG Pai, ZHAO Meiyng, WANG Wenzhi. Transverse strength prediction of composite materials via micromechanics model[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2017, 36(10): 1611-1618 (in Chinese).
- [19] MAIMI P, CAMANHO P P, MAXINGO J A, et al. A continuum damage model for composite laminates: Part II—Computational implementation and validation[J]. Mechanics of Materials, 2007, 39(10): 909-919.
- [20] CAMANHO P P, BESSA M A, CATALANOTTI G, et al. Modeling the inelastic deformation and fracture of polymer composites: Part II—Smeared crack model[J]. Mechanics of Materials, 2013, 59(6): 36-49.
- [21] PINHO S, IANNUCCI L, ROBINSON P. Physically based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking. Part II: FE implementation[J]. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2006, 37(5): 766-777.
- [22] BOGENFELD R, KREIKEMEIER J. A tensorial based progressive damage model for fiber reinforced polymers [J]. Composite Structures, 2017, 168: 608-618.
- [23] BERGAN A, HERRAEZ M, GONZALEZ C, et al. Development of a mesoscale finite element constitutive model for fiber kinking[J]. Proceedings of the Aiaa/asce/ahs/asc Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2018: 1221.
- [24] ZHANG D, WAAS A M, YEN C F. Progressive damage and failure response of hybrid 3D textile composites subjected to flexural loading. Part II: Mechanics based multiscale computational modeling of progressive damage and failure [J]. International Journal of Solids & Structures, 2015, 75: 321-335.
- [25] WANG J, XIAO Y. Some improvements on Sun-Chens one-parameter plasticity model for fibrous composites: Part I—Constitutive modelling for tension-compression asymmetry response[J]. Journal of Composite Materials, 2016, 51(3): 405-418.
- [26] WANG J, XIAO Y, KAWAI M. Parameter identification problem in one-parameter plasticity model for fibrous composites[J]. Advanced Composite Materials, 2019, 28 (S2): 29-51.
- [27] DAVILA C, JAUNKY N, GOSWAMI S. Failure criteria for FRP laminates in plane stress[J]. Journal of Composite Materials, 2005, 39(5): 404-408.
- [28] PINHO S T, DAVILLA C G, CAMANHO P P, et al. Failure models and criteria for FRP Under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity: NASA/TM-2005-213530[R]. US: NASA Technical Memorandum, 2005.
- [29] PINHO S, VYAS G, ROBINSON P. Response and damage propagation of polymer matrix fibre-reinforced composites—Predictions for WWBE-III: Part A[J]. Journal of Composite Materials, 2013, 47(20-21): 2595-2612.
- [30] PINHO S T, IANNUCCI L, ROBINSON P. Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking: Part I—Development[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2006, 37(1): 63-73.
- [31] KYRIAKIDES S, ARSECULERATNE R, PERRY E J, et al. On the compressive failure of fiber reinforced composites [J]. International Journal of Solids & Structures, 1995, 32(6-7): 689-738.
- [32] GUTKIN R, PINHO S T, ROBINSON P, et al. On the transition from shear-driven fibre compressive failure to fibre kinking in notched CFRP laminates under longitudinal compression[J]. Composites Science & Technology, 2010, 70(8): 1223-1231.
- [33] XIAO Y, ISHIKAWA T. Bearing strength and failure behavior of bolted composite joints: Part I—Experimental in-

- vestigation[J]. Composites Science & Technology, 2005, 65(7): 1022-1031.
- [34] WRONSKI A S, PARRY T V. Compressive failure and kinking in uniaxially aligned glass-resin composite under superposed hydrostatic pressure[J]. Journal of Materials Science, 1982, 17(12): 3656-3662.
- [35] CHABOCHE J L. Le concept de contrainte effective appliquée à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope [M]. Berlin: Springer Netherlands, 1982.
- [36] PINHO S, VYAS G, ROBINSON P. Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites: Part B[J]. Journal of Composite Materials, 2013, 47 (6-7): 679-696.
- [37] YUN K, WANG Z, RONALD S, et al. An advanced continuum damage mechanics model for predicting the crack progress process based on the consideration of the influence of crack direction under quasi-static load[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 130: 487-496.
- [38] MATZENMILLER A, LUBLINER J, TAYLOR R L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites [J]. Mechanics of Materials, 1995, 20(2): 125-152.
- [39] ABAQUS V. 6.14 Documentation[J]. Dassault Systemes Simulia Corporation, Providence, 2014.
- [40] KOERBER H, CAMANHO P P. High strain rate characterisation of unidirectional carbon-epoxy IM7-8552 in longitudinal compression[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2011, 42(5): 462-470.
- [41] MORAN P M, LIU X H, SHIH C F. Kink band formation and band broadening in fiber composites under compressive loading[J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1995, 43(8): 2943-2958.
- [42] KADDOUR A, HINTON M. Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites[J]. Journal of Composite Materials, 2012, 46 (19-20): 2295-2312.
- [43] SHUART M J. Failure of compression-loaded multidirectional composite laminates[J]. AIAA Journal, 1989, 27 (9): 1274-1279.
- [44] LEE J, SOUTIS C. A study on the compressive strength of thick carbon fibre epoxy laminates[J]. Composites Science & Technology, 2007, 67(10): 2015-2026.
- [45] MATSUOKA T, KAGEYAMA K. Compressive failure mechanism and strength of unidirectional thermoplastic composites based on modified kink band model[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 2017, 93: 117-125.
- [46] PINHO S T, ROBINSON P, IANNUCCI L. Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites[J]. Composites Science and Technology, 2006, 66(13): 2069-2079.