

考虑高阶剪切的轮胎 Gough 刚度模型

刘哲¹, 马良清², 文璐¹, 危银涛^{*1}

(1. 清华大学 汽车工程系 汽车安全与节能实验室, 北京 100084; 2. 北京橡胶工业设计院 国家橡胶轮胎质量监督检验中心, 北京 100084)

摘 要: 轮胎是一种帘线增强橡胶复合材料结构, Gough 刚度是表征轮胎侧向变形与磨损的一个重要参数, 但缺乏理论推导。本文基于高阶剪切复合材料梁理论, 研究子午线轮胎带束层角度对轮胎侧向变形的影响及 Gough 刚度的理论基础。在 Fiala 横梁模型的基础上, 将轮胎简化为弹性基础上的复合材料梁。胎侧及胎面胶简化为弹性基础, 带束和胎体简化为复合材料梁。考虑高阶剪切位移场及帘线-橡胶材料的各向异性, 利用虚功原理建立模型方程, 得到了复合材料梁在侧向载荷作用下的小挠度理论解, 与有限元结果和已有文献结果对比验证了其合理性。算例分析表明, 当胎体等效梁结构的高宽比固定时, 对应 Gough 刚度极大值带束角度是固定的; 不同的帘线模量和橡胶模量也会对 Gough 刚度极大值所对应的带束角度产生不同的影响; 带束层厚度对 Gough 刚度极大值对应的带束角度影响较小。根据 Gough 刚度极大值准则得到了不同高宽比下的轮胎最佳带束角度, 利用实际轮胎解剖结构进行了验证。本文提出的模型为子午线轮胎带束角度优选和磨损设计提供了理论指导。

关键词: 高阶剪切理论; 复合材料梁; 子午线轮胎; Gough 刚度; 轮胎磨损

中图分类号: O341; TB333 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2019)02-0522-11

Theoretical formulation of tire Gough stiffness based on the high order shear composite beam

LIU Zhe¹, MA Liangqing², WEN Lu¹, WEI Yintao^{*1}

(1. Department of Automotive Engineering, State Key Lab. of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Beijing Research & Design Institute of Rubber Industry, China National Tyre Quality Supervision and Inspection Center, Beijing 100084, China)

Abstract: Tire is a kind of rubber-cord reinforced composite structure. Gough stiffness derived by using a beam model is a parameter of tire which is related to the transverse deflections and wear of tires. In the present study, the theoretical explanation of Gough stiffness was proposed to analyze the lateral bending deformation of the tire under different belt angles. By revising the Fiala tire model, the tire was simplified as composite beam on elastic foundation. The sidewall and tire tread pattern blocks were treated as an elastic foundation. The belt and tire body were simplified as a composite beam. Considering the high order shear deformation theory and the anisotropy of the cord-rubber material, the equilibrium equations were derived by using the principle of virtual work. The deformations under the transverse load with small deflections were derived for the first time. To verify the accuracy of the model, the theoretical results were compared with the results of finite element analysis, and the good agreement could be found. The effect of length, height, thickness and modulus of cord and rubber were analyzed. It is indicated that if the length-height ratio of the equivalent beam is unchanged, the corresponding belt angle of the maximum value of Gough stiffness will not be changed. According to maximum Gough stiffness, the optimal belt angle of the tire with different high width ratio was obtained. The results also agree with those results of the actual tire structure. The proposed model can provide theoretical direction for the structure and durability design of tires.

Keywords: high-order shear theory; composite beam; radial tire; Gough stiffness; wear of tires

收稿日期: 2018-01-19; 录用日期: 2018-03-27; 网络出版时间: 2018-04-11 10:59

网络出版地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180410.001>

基金项目: 国家自然科学基金 (51761135124; 11672148)

通讯作者: 危银涛, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为轮胎动力学及复合材料 E-mail: weiyt@tsinghua.edu.cn

引用格式: 刘哲, 马良清, 文璐, 等. 考虑高阶剪切的轮胎 Gough 刚度模型[J]. 复合材料学报, 2019, 36(2): 522-532.

LIU Z, MA L Q, WEN L, et al. Theoretical formulation of tire Gough stiffness based on the high order shear composite beam[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(2): 522-532 (in Chinese).

轮胎侧向弯曲刚度与轮胎磨耗及侧向动力学特性都有着紧密的联系。但由于轮胎结构的复杂性,侧向弯曲刚度是难以测量和计算的。在传统的轮胎设计中,带束角度在 $15^{\circ} \sim 25^{\circ}$ 可取得侧偏刚度最大值,从而使轮胎的耐磨性和操纵稳定性更好。不同型号的轮胎带束角度是不同的。20 世纪 60 年代, Gough^[1] 给出了轮胎侧向弯曲刚度(Gough 刚度)的经验表达式,认为轮胎侧向弯曲刚度不仅包括杨氏模量,还包括剪切模量的影响。已有研究也认为带束角度会影响侧向刚度,但是没有给出理论解释^[1-4]。Fiala 模型^[5] 是一个可以得到解析解的物理侧偏模型,模型将带束层及胎体层假设为均匀各向同性的梁。因此计算出的侧向弯曲变形只与胎面弯曲刚度相关,与剪切刚度无关。按经典 Fiala 模型计算,最小弯曲变形将会对应于最大弯曲刚度,即钢丝帘线完全沿周向布置。而实际轮胎结构的带束角度在 $20^{\circ} \sim 30^{\circ}$ 左右。因此计算轮胎侧向弯曲刚度时不考虑剪切刚度是与实际不符的。由于复杂的帘线橡胶结构,建立 Gough 刚度与轮胎物理参数之间的关系很困难。而有限元方法很难用于轮胎参数化设计。因此建立能反映胎面剪切刚度的轮胎侧向弯曲理论模型是具有重要理论意义和应用价值的。

虽然对帘线-橡胶结构的研究已经进行了很多年,但是大部分研究主要关注于胎面在轮胎面内的弯曲,侧向弯曲的研究较少。Gough 刚度是 1965 年由 Gough^[1] 提出的,文中使用弹性基础上的简单弹性梁模型来计算帘线-橡胶带束结构的横向弯曲刚度,给出了刚度的经验表达式及各铺层角度不同的复合材料帘线-橡胶结构的等效模量。文中并未使用复合材料理论。70 年代初, J. D. Walter^[2] 对帘线-橡胶结构的结构分析进行了综述,利用复合材料力学理论对帘线和橡胶的材料特性分别进行分析,计算了单层和多层结构的等效弹性材料参数,并将这些理论应用于轮胎的磨损及耐久性分析,但文中未对 Gough 刚度的产生机制进行理论分析,只是给出了经验性的结果。随后 Walter^[3] 对多层帘线增强橡胶结构进行分析,考虑了弯曲-拉伸的耦合效应。B. K. Daniels^[6] 将 Gough 刚度的概念应用在子午线轮胎上,利用试验数据与已有文献中的 Gough 刚度数据进行对比。还有很多研究关注帘线-橡胶的刚度特性。J. L. Ford 等^[7] 分析了轴向载荷作用下的单层和两层的帘线-橡胶试样的剪切耦

合效应,对比了理论解法和有限元方法,文中还考虑了层间剪切效应。S. Parhizgar^[8] 利用云纹法对帘线-橡胶复合材料的刚度特性进行了实验分析,将结果与 Halpin-Tsai 方程进行比较。R. M. V. Pidaparti^[9] 利用有限元方法研究了扭转帘线-橡胶材料的拉伸-弯曲-扭转变形,还分析了材料结构参数对刚度的影响,包括橡胶模量、厚度、单位长度帘线扭转圈数等。文中对载荷传递机制进行了说明。之后 Pidaparti^[10] 进一步对有限元理论进行发展,研究了作用拉伸-扭转载荷时两层帘线结构的拉伸弯曲耦合效应,对帘线方向、各向异性及体积分数的影响进行了讨论。S. Kocak 等^[11] 利用有限元方法对帘线的形状、橡胶的厚度及帘线本身的扭转特性对变形的影响进行了分析。S. Rao 等^[12] 利用实验的方法对不同角度的单层轮胎带束结构进行实验分析,给出了 3 种不同的变形阶段及随角度变化的 4 种疲劳失效方式。H. Hassis 等^[13] 给出了帘线-橡胶复合材料板的拉伸-扭转耦合特性,并利用虚功原理给出了考虑高阶翘曲的理论解析模型。虽然对帘线-橡胶材料的研究很多,但是很少有研究对侧向弯曲特性进行研究,目前计算侧向弯曲刚度的理论模型还很不成熟。

考虑面内弯曲时,由于轮胎的胎面厚度相对于宽度较小,因此剪切效应不是影响弯曲变形的主要因素。但是考虑胎面面外(侧向)弯曲时,由于胎面宽度较大,可以考虑引入高阶剪切变形理论,对 Fiala 模型进行修正。Reddy^[14] 于 1984 年提出高阶剪切梁理论。假设横向剪应变服从抛物线分布,给出了不同结构复合材料板的数值解。该方法使变形和应力的计算更加准确。他进而将理论应用在圆柱壳和球壳的分析上^[15]。之后,许多学者^[16-21] 应用 Reddy 的高阶剪切梁理论进行了大量研究。S. R. Marur 等^[16] 研究了复合材料梁的自由振动及截面翘曲。G. Shi 等^[17] 将高阶剪切应用于有限元方法,进而分析梁的自由振动。H. Hassis 等^[18] 利用虚功原理研究了帘线增强的复合材料板的变形及应力。W. Chen 等^[19] 研究了微结构的复合材料梁的尺度效应。C. H. Thai 等^[20] 关注不同形状板的自由振动、屈曲及静态变形,使用有限元方法进行分析计算。C. Polizzotto^[21] 对 Euler 梁、Timoshenko 梁及 Reddy 梁进行了综述和比较。此外,Reddy 理论还应用于泡沫/蜂窝夹层梁的分析^[22-24]。但这些研究

主要关注面内弯曲，目前对复合材料梁的侧向弯曲研究还不是很完善。

最近 Pavel 等^[25]用光学测量的方法证实了轮胎侧向变形过程中带束侧向剪切的存在。但是目前还没有人考虑横向剪切变形分析轮胎的侧向刚度。因此本文目的是建立一个考虑剪切刚度的理论解析模型来计算 Gough 刚度，对侧向弯曲特性进行理论分析。研究带束层角度对轮胎侧向弯曲变形的影响及 Gough 刚度的产生机制。在 Fiala 模型的基础上，将轮胎简化为弹性基础上的复合材料梁。考虑高阶剪切位移场及帘线-橡胶材料的各向异性，利用虚功原理建立结构的平衡方程。推导复合材料梁在侧向载荷作用下的小挠度问题。本文利用实际轮胎的解剖结构进行分析验证，并将平衡方程的数值解与有限元结果、已有文献结果进行对比，验证结果的合理性。研究结果为轮胎磨损分析及轮胎结构设计提供理论指导。

1 挠曲线方程的理论推导

本文利用改进的 Fiala 模型对轮胎侧向弯曲进行求解。传统 Fiala 模型是一种描述轮胎侧向动力学行为的经典解析物理模型。当侧向力作用在接地区域时，胎体与路面之间的胎面橡胶块会由于剪切力的存在而发生剪切变形，胎体将会发生侧向弯曲。Fiala 模型将轮胎等效为弹性基础上的无限长梁，轮胎简化示意图如图 1 所示。弹性基础的等效刚度包括胎侧刚度和胎面橡胶块刚度，利用分布弹簧进行表征，等效模型如图 2 所示。胎体被简化为各向同性的 Euler-Bernoulli 梁。梁的剪切变形没有被考虑。

Gough^[1]给出了轮胎侧向弯曲刚度(Gough 刚度)的经验表达式：

$$S = \frac{P}{\delta} = \frac{E_s G_\phi}{C_1 E_s + C_2 G_\phi} \tag{1}$$

从式(1)可以看出，轮胎的侧向弯曲刚度不仅包括杨氏模量 E ，还包括了剪切模量 G 的影响。

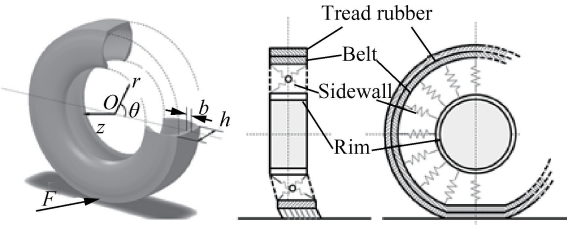


图 1 轮胎简化示意图
Fig. 1 Structural model of tire

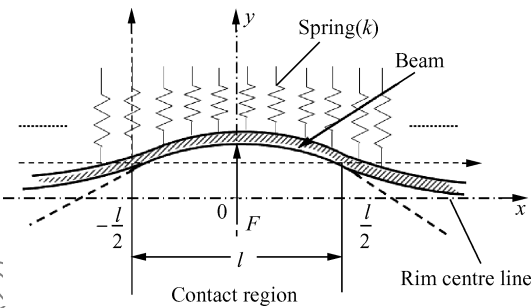


图 2 轮胎 Fiala 模型示意图
Fig. 2 Fiala tire model

Gough 提出式(1)的年代，复合材料力学理论还没有确立，式(1)只是经验公式。因此在 Fiala 模型的基础上，将 Euler-Bernoulli 梁修正为考虑剪切的层合复合材料梁，如图 3 所示。修正后，轮胎的结构和材料参数(如带束角度、帘线模量等)对侧向变形的影响就可以被充分考虑。利用修正的 Fiala 模型，可将轮胎侧向变形的问题转化为求解弹性基础上复合材料梁侧向弯曲问题。梁的等效长度依赖于轮胎的几何和物理参数。

考虑等效梁结构在侧向力 F 作用下的横向变形。梁上任一点的坐标采用直角坐标系 (x, y, z) 来表示，坐标方向如下图所示， z 轴向上为正。侧向力 F 方向沿 z 轴，帘线平面与 xz 平面平行。

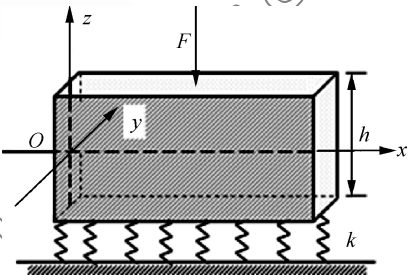
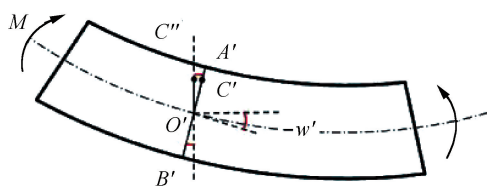


图 3 弹性基础上复合材料梁示意图
Fig. 3 Schematic of a laminated composite beam on an elastic foundation

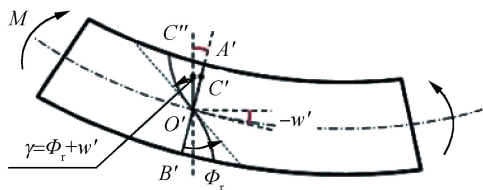
1.1 考虑高阶剪切理论的复合材料梁位移和应变

本文的目的是求解等效复合材料梁横向弯曲的挠度。利用高阶剪切梁理论(Reddy 梁)考虑复合材料梁中的高阶剪切应力。横向剪切应力沿梁高度呈抛物线变化。在该假设中，平截面假设不再成立，截面也不再与梁的轴线垂直。截面转角 φ_x 包括弯曲应力引起的转角和横向剪切应力引起的转角，变形模式如图 4 所示。

梁上任意一点位移可以被表示为



(a) Deformation mode of an euler-bernoulli beam



(b) Deformation mode of a high-order reddy beam

图 4 复合材料梁的变形模式示意图

Fig. 4 High-order shear deformation of the composite beam

$$u(x, z) = u_0(x) + z\varphi_x(x) - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3)$$

其中: h 是梁的高度; b 是梁的厚度; u_0 、 w_0 表示梁轴线的纵向和垂向位移; φ_x 表示梁截面法线的转角。 $x \in [0, L]$, $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$

1.2 复合材料梁中的应力应变

由式(2)~(3)表示的位移对应的应变表示为:

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{du_0}{dx} + z \frac{d\varphi_x}{dx} - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \quad (4)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) - \frac{4}{h^2} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) z^2 \quad (5)$$

其中, $\gamma_{xz}(x, z)$ 是横向剪切应变。

梁的横向剪切应力 τ_{xz} 如图 5 所示。

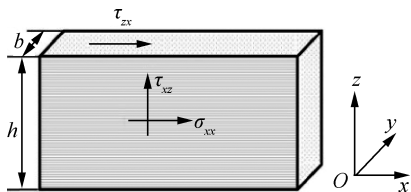


图 5 复合材料梁中的横向剪切应力

Fig. 5 Transverse shear stress of the beam

1.3 复合材料工程常数

材料的工程常数可以用复合材料的微观力学来

计算。文中采用如下假设: 纤维和基体被认为是均匀的、各向同性和线性弹性的。纤维也有规律地排列, 没有初始应力。假设纤维与基体之间不存在空隙, 复合材料的工程常数可以表示如下:

$$E_1 = E_f c_f + E_m c_m \quad (6)$$

$$E_2 = (1 - C) E_2^I + C E_2^II \quad (7)$$
$$E_2^I = \frac{E_f E_m}{E_f c_m + E_m c_f}, E_2^II = E_f c_f + E_m c_m$$

$$\nu_{21} = (1 - C) \nu_{21}^I + C \nu_{21}^II \quad (8)$$
$$\nu_{21}^I = \nu_f c_f + \nu_m c_m, \nu_{21}^II = \frac{\nu_f E_f c_f + \nu_m E_m c_m}{E_f c_f + E_m c_m}$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1} \quad (9)$$

$$G_{12} = (1 - C) G_{12}^I + C G_{12}^II \quad (10)$$
$$G_{12}^I = \frac{G_f G_m}{G_f c_m + G_m c_f}, G_{12}^II = G_f c_f + G_m c_m$$

$$C = 0.4 c_f - 0.025 \quad \text{or} \quad C = 0.2 \quad (11)$$

其中: c_f 、 c_m 是纤维和基体的相对体积含量, $c_f = V_f/V$, $c_m = V_m/V = 1 - c_f$; E_f 、 E_m 分别表示纤维和基体的弹性模量; ν_f 、 ν_m 分别表示纤维和基体的泊松比; V 是复合材料的体积; V_f 、 V_m 是纤维和基体的体积含量; C 是表示接触程度的常数, $C=0$ 表示不接触, $C=1$ 表示横向完全连通。

1.4 复合材料梁的应力-应变关系

等效的复合材料梁被认为是由正交各向异性层合复合材料组成的结构。对于每一层的铺层材料, 本构方程表达式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, Q_{ij} 是每个铺层在材料方向上的折减刚度系数。这些系数可由下式计算得到:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (13)$$
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}$$

使用坐标变换, 将材料方向上的折减刚度系数在全局坐标系下进行表示, 得到偏轴状态下的整体坐标系折减刚度系数 \bar{Q}_{ij} 。

假设 $\epsilon_z = 0$, 整体坐标系下的本构方程为

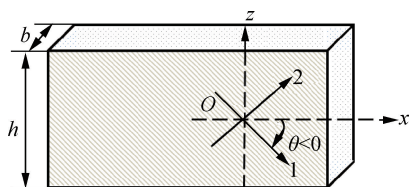


图6 复合材料梁的坐标系表示

Fig. 6 Coordinate systems of the beam

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

其中: \bar{Q}_{ij} 为偏轴状态下的刚度系数; θ 为铺层纤维转角(从 x 轴转向 1 轴的角度, 以逆时针旋转为正); \bar{Q}_{ij} 的数值可由下式计算:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

图 7 为一些折减刚度常数的数值。

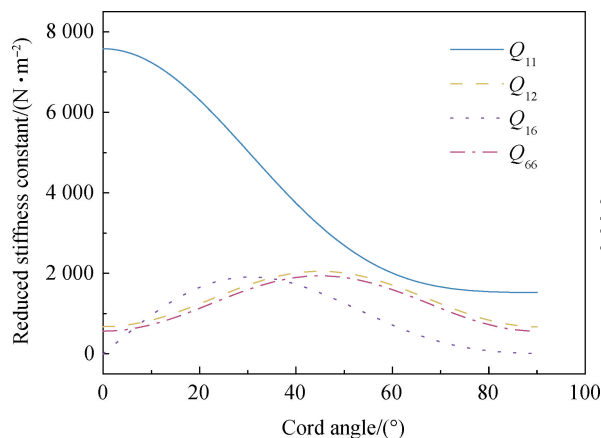


图7 整体坐标系下不同铺层角复合材料梁的刚度系数

Fig. 7 Reduced stiffness constant
(Global coordinate system)

1.5 复合材料梁的平衡方程

利用虚功原理推导等效复合材料梁的平衡方

程。将应变和应力代入虚功原理可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dz dy + \int_0^l q \delta w_0 dx \\ &= \iiint \left[-\frac{d\sigma_x}{dx} \delta u_0 - \frac{d\sigma_x}{dx} z \delta \varphi_x - \frac{d\sigma_x}{dx} (-z^3 c_1) \delta \varphi_x + \right. \\ &\quad \left. \tau_{xz} (1 - 3c_1 z^2) \delta \varphi_x - \frac{d\tau_{xz}}{dx} (1 - 3c_1 z^2) \delta w_0 + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} (-z^3 c_1) \delta w_0 \right] dV + \int_0^l q \delta w_0 dx \quad (14)$$

其中: q_F 是集中力等效的分布载荷; k 是单位长度胎面胶和胎侧的刚度; c_1 是常数, $c_1 = \frac{4}{3h^2}$ 。

$$\int_0^l q_F dx = F, q = kw_0 - q_F \quad (17)$$

对应力积分得到广义力的形式如下式所示:

$$\begin{aligned} (N_x, M_x, P_x) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x (1, z, z^3) dz dy \\ (Q_{xz}, R_{xz}) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} (1, z^2) dz dy \end{aligned} \quad (18)$$

按系数 δu_0 、 δw_0 、 $\delta \varphi_x$ 整理可以得到弹性基础上层合复合材料梁的横向弯曲平衡方程:

$$\begin{aligned} \delta u_0: \frac{dN_x}{dx} &= 0 \\ \delta \varphi_x: -\frac{dM_x}{dx} + \frac{dP_x}{dx} c_1 + Q_{xz} + R_{xz} (3c_1) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta w_0: \frac{d^2 P_x}{dx^2} (-c_1) - \frac{dQ_{xz}}{dx} + \frac{dR_{xz}}{dx} 3c_1 + q = 0$$

广义力的表达式如下:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ P_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & E_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ E_{11} & F_{11} & Y_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_x^{(1)} \\ \epsilon_x^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{16} & D_{16} \\ B_{16} & E_{16} \\ E_{16} & H_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{16} & B_{16} & E_{16} \\ D_{16} & E_{16} & H_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_x^{(1)} \\ \epsilon_x^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{66} & D_{66} \\ D_{66} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

其中, A_{ij} 、 B_{ij} 、 D_{ij} 、 F_{ij} 、 H_{ij} 、 Y_{ij} 为刚度系数, 由下式计算得到:

$$\begin{aligned} (A, B, D, E, F, H, Y)_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (y_k - y_{k-1}) \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \end{aligned}$$

$$(A)_{ij} = h \left(\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (y_k - y_{k-1}) \right)$$

$$(D)_{ij} = \frac{h^3}{12} \left(\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (y_k - y_{k-1}) \right)$$

$$(F)_{ij} = \frac{h^5}{80} \left(\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (y_k - y_{k-1}) \right)$$

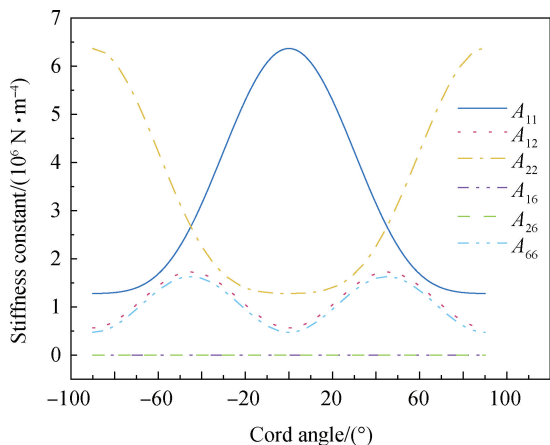


图8 随带束层角度变化的复合材料梁的刚度系数
Fig. 8 Variety of stiffness constants with the ply angles

$$(Y)_{ij} = \frac{h^7}{448} \left(\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (y_k^4 - y_{k-1}^4) \right)$$
$$(B)_{ij} = (E)_{ij} = (H)_{ij} = 0 \quad (22)$$

图8为随带束层角度变化的刚度系数。
对于偶数层的轮胎带束结构, 本文应用了反对称角铺设层合梁的假设。由于反对称角铺设层合梁的对称性, 一些刚度系数为零。广义力也可以简化, 如下式所示:

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = F_{16} = F_{26} = Y_{16} = Y_{26} = 0 \quad (23)$$

$$N_x = A_{11} \epsilon_x^{(0)} = A_{11} \frac{du_0}{dx}$$
$$M_x = D_{11} \epsilon_x^{(1)} + F_{11} \epsilon_x^{(3)}$$
$$= D_{11} \frac{d\varphi_x}{dx} + F_{11} (-c_1) \left(\frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)$$
$$P_x = F_{11} \epsilon_x^{(1)} + Y_{11} \epsilon_x^{(3)}$$
$$= F_{11} \frac{d\varphi_x}{dx} + Y_{11} (-c_1) \left(\frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)$$
$$Q_{xz} = A_{66} \gamma_{xz}^{(0)} + D_{66} \gamma_{xz}^{(2)}$$
$$= A_{66} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) + D_{66} (-3c_1) \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right)$$
$$R_{xz} = D_{66} \gamma_{xz}^{(0)} + F_{66} \gamma_{xz}^{(2)}$$
$$= D_{66} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) + F_{66} (-3c_1) \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (24)$$

2 数值解

观察平衡方程组可以发现, 纵向位移的方程与横向剪切角及垂向位移的方程是解耦的, 因此除纵向位移的两个方程可以单独求解。

图9为作用在复合材料梁上的侧向分布载荷示

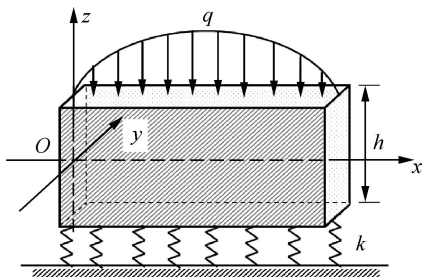


图9 作用在复合材料梁上的侧向分布载荷示意图
Fig. 9 Schematic of the distributed load

意图, 考虑将作用集中载荷 F 等效为分布载荷 q_F 。将分布载荷用三角级数展开, 如下式所示:

$$q_F = \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_{Fm} \sin \frac{m\pi}{L} x \right], x \in [0, L] \quad (25)$$

本文将分布荷载假定为正弦函数, 以方便求解平衡方程。三角级数的系数由下式计算:

$$q_F = \frac{\pi F}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x, x \in [0, L] \quad (26)$$

将分布载荷 q_F 代入微分方程组, 化简后得到以下用于求解的方程组:

$$\begin{aligned} & (-D_{11} + 2F_{11} \cdot c_1 - Y_{11} c_1^2) \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} + \\ & (F_{11} c_1 - Y_{11} c_1^2) \frac{d^3 w_0}{dx^3} + (A_{66} - 6D_{66} c_1 + \\ & 9F_{66} c_1^2) \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \\ & \frac{c_1}{F_{11}} (F_{11}^2 - Y_{11} D_{11}) \frac{d^3 \varphi_x}{dx^3} + (A_{66} - 6D_{66} c_1 + \\ & 9F_{66} c_1^2) \left(\frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \left(\frac{Y_{11} c_1}{F_{11}} - 1 \right) (kw_0 - \\ & q_F) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

利用数值解法求出垂向变形 w_0 和横向剪切角 φ_x 。将挠度 w_0 解出后, 取最大挠度 $w_{0\max}$, 计算得到 Gough 刚度:

$$S = \frac{q_{Fm}}{W_m} = \frac{F}{w_{0\max}} \quad (28)$$

3 结构及材料参数对轮胎 Gough 刚度的影响

利用梁模型推导出的 Gough 刚度是与轮胎的横向变形和磨损有关的参数。这个参数反映了轮胎侧向变形大小和刚度。与传统的弯曲刚度不同, Gough 刚度考虑了梁的剪切模量。为了能使本文的方法在轮胎实际结构设计中提供参考, 本节讨论了结构和材料参数对 Gough 刚度的影响。

为研究 Gough 刚度最大值和带束层帘线角度之间的关系, 文中改变了等效梁的结构和材料参

数,使其成为不同的结构。然后计算出对应于不同结构的最小的垂向变形,这个最小的垂向变形会随着结构参数和带束层角度的变化而变化。由此,可以推导出不同结构和材料参数下最大的 Gough 刚度与带束层角度的关系。文中将对应最大 Gough 刚度的带束角度称为最优带束角。同时也用该方法

说明轮胎结构和材料参数对 Gough 刚度的影响。
表 1 为 185/65R14 子午线轮胎的部分结构及材料参数。这些参数分为结构参数和材料参数,包括了等效梁的长度、高度和厚度及帘线和橡胶的模量。结构参数包括梁的长度、高度和厚度。材料参数包括帘线和橡胶的模量。

表 1 185/65R14 子午线轮胎的结构和材料参数
Table 1 Geometrical and structural parameters of a 185/65R14 radial tire

Parameter type	Numerical value	Parameter type	Numerical value
Beam height h/m	0.140	Modulus of cord/GPa	120
Beam thickness b/m	6×10^{-3}	Modulus of rubber/MPa	7.5
Each ply thickness b_k/m	$[3, 3]\times 10^{-3}$	Cord Poisson's ratio	0.3
Effective beam length l/m	0.9	Rubber Poisson's ratio	0.49
Lateral force F/N	5×10^3	Cord spacing/ m	1.1×10^{-3}
Distributed springs $k/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	1.0×10^7	Cord cross-sectional area/ m^2	0.2×10^{-6}

3.1 185/65R14 型轮胎的原始尺寸

通过改变以上变量的值分析结构和材料参数对 Gough 刚度的影响。首先给出等效梁的一组原始参数。原始尺寸和材料参数列于表 2 中。结构和材料参数是在给出的这组参数上进行变化的。

表 2 等效复合材料梁的原始尺寸
Table 2 Original dimensions of the beam

Parameter type	Numerical value
Beam height h/m	0.140
Effective beam length l/m	0.9
Beam thickness b/m	6×10^{-3}
Modulus of rubber/MPa	7.5
Modulus of cord/GPa	120

3.2 185/65R14 型轮胎的结构参数

3.2.1 梁的长度

这个部分考虑梁长度的影响,梁的高度(140 mm)不会改变。长度从 200 mm 变化到1 500 mm。为了研究尺寸参数与 Gough 刚度之间的关系,介绍了高长比。高长比的定义为

$$\epsilon = \frac{h}{l}$$

在图 10(a)中显示了与不同带束角度和不同高长比(改变长度)对应的垂向位移。对不同尺寸的等效梁,可以计算出与最大 Gough 刚度对应的带束层角度,结果如图 10(b)所示。在等效梁的长高比非常小的情况下,最大 Gough 刚度出现在带束层角度为 0°的时候,即当长度远大于高度时,弯曲效应将在侧向弯曲中起主要作用。但是当梁的高长比增加,最大 Gough 刚度对应的带束角度将增大,这时剪切效应将变得不可忽视,因此,考虑胎面剪切

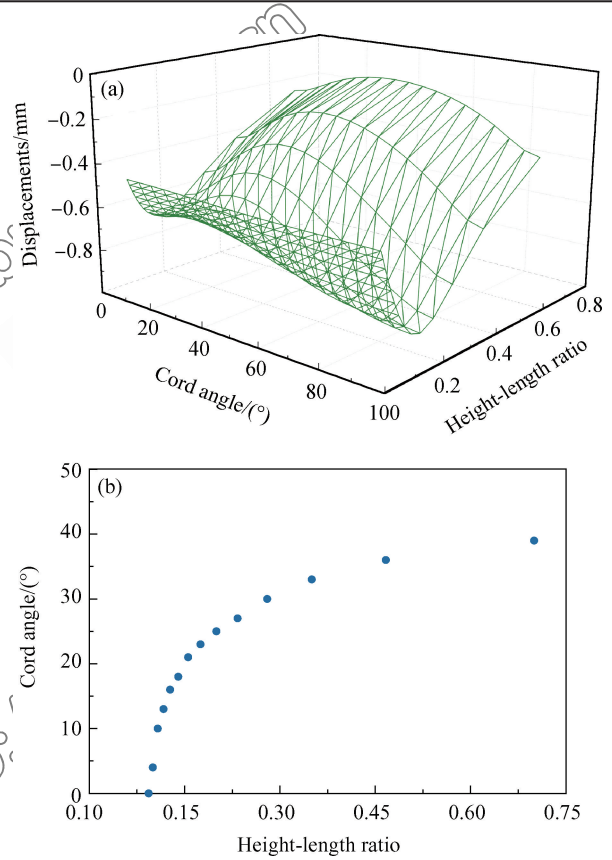


图 10 改变长度得到的复合材料梁的位移(a)和最优带束层角度(b)

Fig. 10 Displacements (a) and the optimal cord ply angle (b) by changing the length of the beam

刚度是合理的。

3.2.2 梁的高度

梁的高度对应于轮胎实际结构中的宽度。与改变梁的长度类似,本节改变了梁的高度。高度从 80 mm变化到 900 mm。此时长度(900 mm)固定不

变。对应不同带束角度和不同高长比(改变高度)的垂向位移如图 11(a)所示。不同高长比等效梁的最大 Gough 刚度对应的带束层角度如图 11(b)所示。从结果可以得出类似结论: 如果长度方向的尺寸远大于高度方向的尺寸, 最大 Gough 刚度出现在带束角度为 0° 的时候。

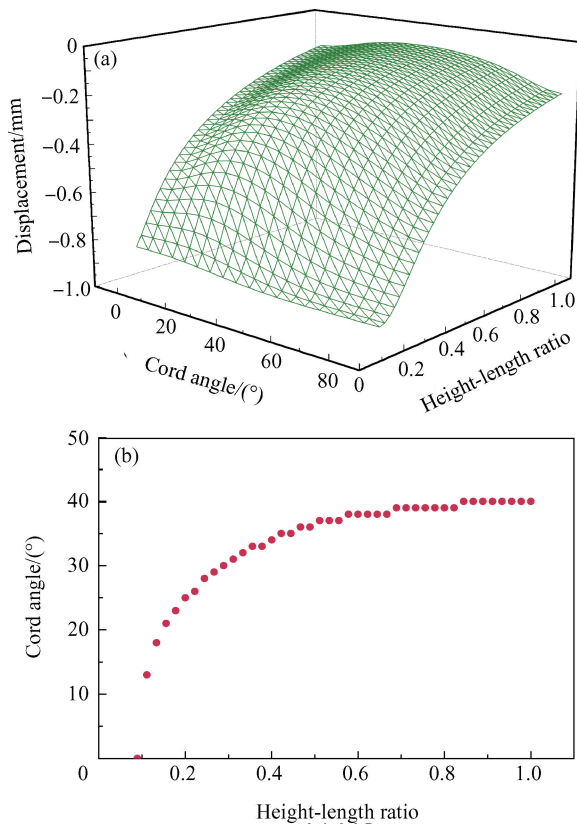


图 11 改变高度得到的复合材料梁的位移(a)和最
优带束层角度(b)

Fig. 11 Displacements (a) and the optimal cord ply angle (b)
by changing the height of the beam

3.2.3 高长比

通过改变梁的长度和高度, 计算了不同结构的最大 Gough 刚度。不同结构的垂向位移是不同的, 但当梁的高长比固定时, 即采用相同的结构比例时, 最优带束角度是相同的。两种结构变化的最大 Gough 刚度对应的带束角度结果如图 12 所示。这说明对于不同型号不同尺寸的轮胎, 存在一个最优的带束角度, 使轮胎的侧向刚度较大, 耐磨性能更好。

3.2.4 梁的厚度

层合梁厚度变化对 Gough 刚度的影响计算结果如图 13 所示。假设带束层厚度相等, 梁的长度和高度不变化, 厚度从 4 mm 变化至 12 mm。可以

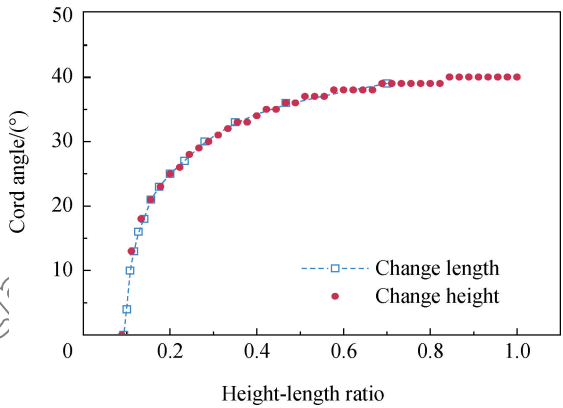


图 12 两种结构变化的最大 Gough 刚度对应的带束角度
Fig. 12 Cord ply angle corresponding to maximum Gough stiffness

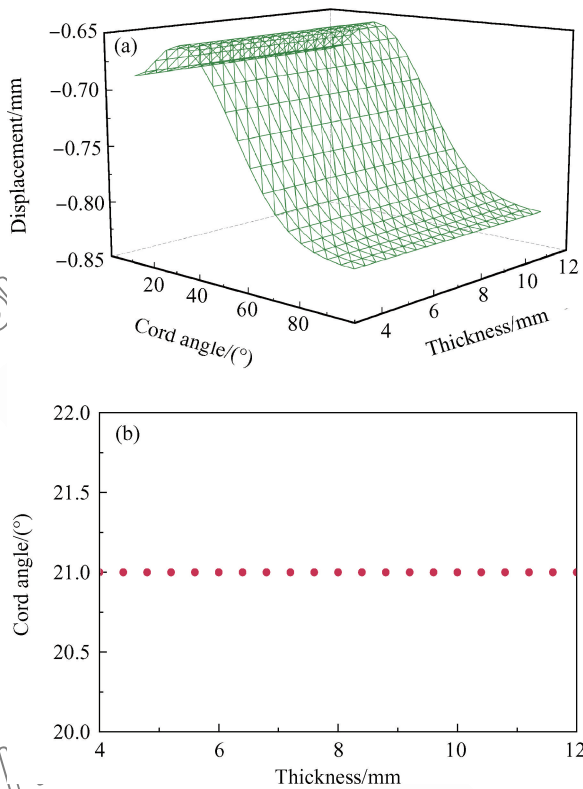


图 13 改变厚度得到的复合材料梁的位移(a)和最
优带束层角度(b)

Fig. 13 Displacements (a) and the optimal cord ply angle (b)
by changing the thickness of the beam

发现, 当梁的厚度变化不会改变对应于最优带束角度。而且改变厚度对 Gough 刚度的数值影响也很小。

3.3 185/65R14 型轮胎的材料参数

3.3.1 帘线模量

图 14 为改变帘线模量得到复合材料梁的位移和最优带束层角度。可见, 改变帘线的弹性模量对 Gough 刚度有很大的影响。帘线模量从 10 GPa 变

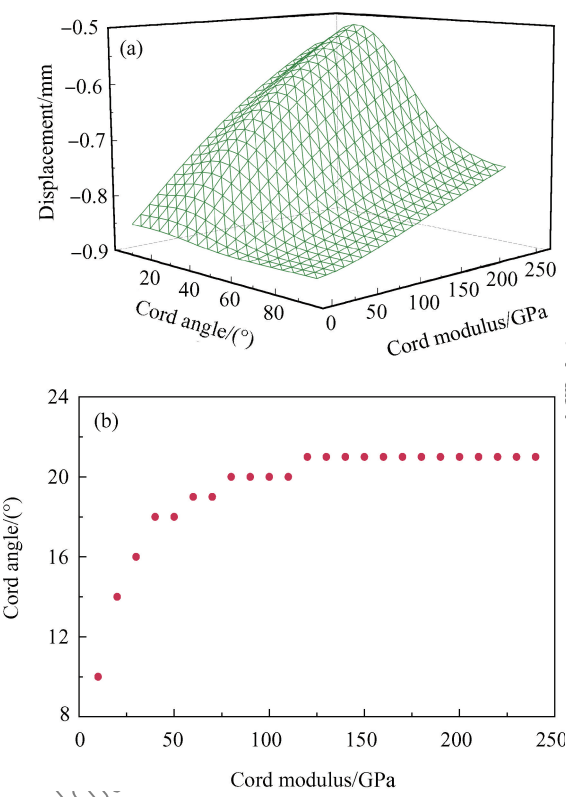


图 14 改变帘线模量得到复合材料梁的位移(a)和最优带束层角度(b)

Fig. 14 Displacements (a) and the optimal cord ply angle (b) by changing the modulus of cord of the beam

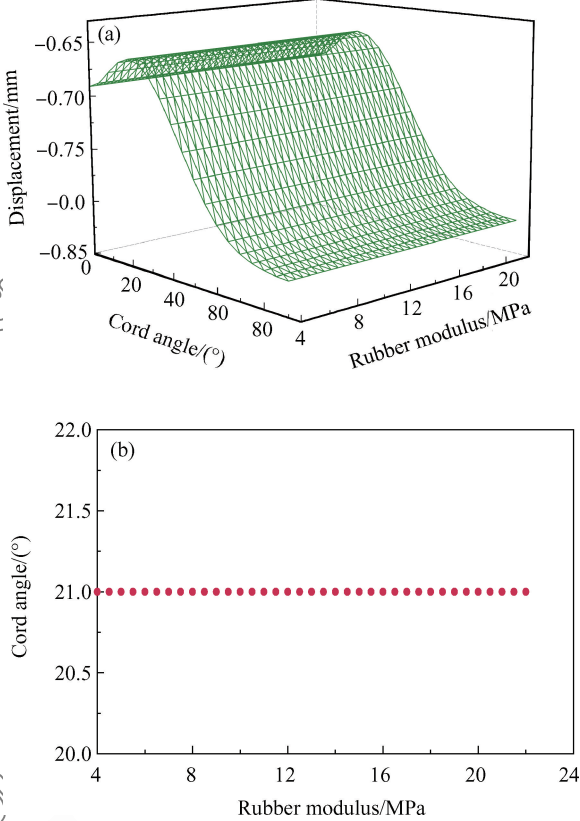


图 15 改变橡胶模量得到复合材料梁的位移(a)和最优带束层角度(b)

Fig. 15 Displacements (a) and the optimal cord ply angle (b) by changing the modulus of rubber of the beam

化至 240 GPa。结构参数确定后，最优带束角度会随帘线模量增加而变大。但当帘线模量已经较大时，增加帘线模量对带束角度的影响减小。

3.3.2 橡胶模量

图 15 为改变橡胶模量得到复合材料梁的位移和最优带束层角度。可见，橡胶模量的数值从 4 MPa 变化到 22 MPa，几乎没有对最大 Gough 刚度和与其对应的帘线角度产生影响。这也同时可以解释为什么改变厚度对 Gough 刚度影响不大，即增加厚度主要是增加了橡胶部分所占比例。

4 有限元模拟结果

4.1 带束层等效复合材料梁的有限元模型

本文使用 ABAQUS 对层合复合材料梁的侧向弯曲进行有限元分析。有限元几何模型参数与理论模型相同。材料类型选择层合板 (Lamina)。材料参数通过 MATLAB 计算，与理论模型相同。帘线铺层方向如图 16 所示。带束层角度可在 inp 文件中修改，以实现批处理计算。当改变结构参数如长度或高度时，需要重建几何模型及网格，模型中使

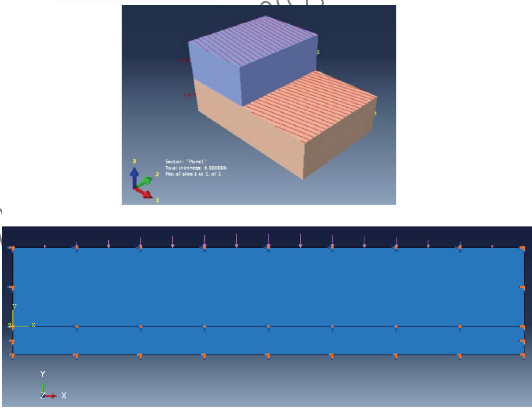


图 16 等效复合材料梁的有限元模型

Fig. 16 Finite element model of the equivalent beam

用壳单元(S4R)。分布负载作用在板的边缘，幅值由函数定义。

4.2 数值计算与有限元分析结果

数值计算的结果与有限元分析结果显示出了良好的一致性，从而验证了本文理论模型的正确性。最大 Gough 刚度对应带束角度的理论计算结果与

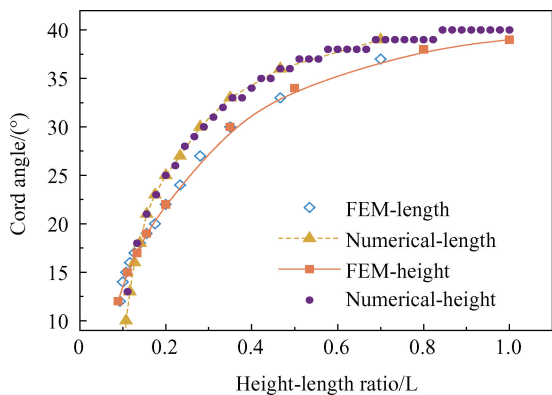


图 17 最大 Gough 刚度对应带束角度的理论计算结果与有限元结果的对比

Fig. 17 Comparison of the FEM results and theoretical results of the optimal cord ply angle

有限元结果的对比如图 17 所示。可以得到类似的结论：当高长比相同时，与最大 Gough 刚度相对应的帘线角度是不变的。当长度方向的尺寸远大于高度方向的尺寸时，弯曲效应将在横向弯曲中起重要作用。

对比理论结果与文献[2, 3]中给出的结果，当带束角度为 20°时，Gough 刚度取得最大值。文献中计算得到带束角度为 73°时取得最大的 Gough 刚度。将结果转化为本文的定义，其等效的结果为 17°时，Gough 刚度取得最大值。结果表明，结果之间有较好的一致性，可以验证本文提出的理论模型的有效性。

5 实际轮胎解剖对比

作为对本文模型的一个重要验证，本文选取了统一国际牌子午线轮胎不同高宽比下的带束层角度解剖试验，并与本文得到的最优带束层角度进行对比分析。定性上证实了本文得到的最优带束层角度的合理性。对于实际市场上不同型号、不同尺寸的轮胎，带束角度是随着轮胎结构的变化而变化的。前文中，等效梁的高度与实际轮胎宽度相对应。为统一变量与理解，本节将前文高长比统一表达为宽长比。假设最大 Gough 刚度对应的最大带束位移与轮胎周长及等效梁特征长度间存在以下关系：

$$\lambda = A_1 \ln(\alpha) + A_2 \tag{29}$$

其中： λ 表示轮胎的高宽比； α 表示带束层等效复合材料梁的宽长比； $A_i(i=1, 2)$ 为常数。本文预测的不同高宽比的轮胎最优带束角度和某国际品牌的实

际解剖带束角度的对比结果见表 3。对于该品牌轮胎，式(29)中的常数值为： $A_1 = -0.135$ ； $A_2 = 0.091$ 。

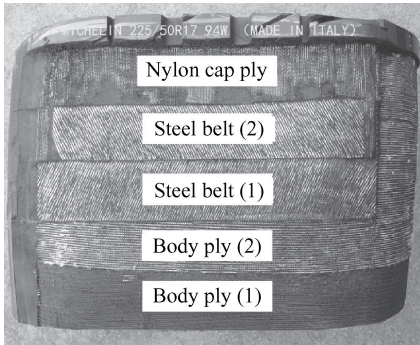


图 18 不同高宽比的轮胎带束结构解剖图

Fig. 18 Diagram of the tire belt

表 3 不同高宽比的轮胎最优带束角度与解剖结构对比

Table 3 Comparison of the optimal cord ply angle with different actual tire structures

Aspect ratio (H/S)	Tire size	Belt angle/(°)	Result	
			Height/length ratio	Belt angle/(°)
30	295/30ZR18	30/32	0.289	30
35	265/35ZR18	25/26	0.2	25
40	255/40R19	25/24	0.2	25
50	225/50R17	23/21.5	0.178	23
60	185/60R15	23/23.5	0.178	23

6 结 论

Gough 刚度是轮胎的一个刚度参数，它与轮胎的横向变形和磨损紧密相关。已有文献利用简单梁模型给出了 Gough 刚度的经验模型。本文给出了 Gough 刚度的理论解释，分析了不同带束层帘线角度结构的轮胎的横向弯曲变形。通过修正 Fiala 轮胎模型，将胎体等效为考虑高阶剪切变形理论的帘线-橡胶层合梁，将胎侧和胎面花纹块视为弹性基础。本文利用虚功原理推导出了平衡方程，给出了梁的侧向弯曲变形及横截面的横向剪切角。首次推导了小挠度变形下横向荷载作用的复合材料层合梁的变形。同时文中也对梁的结构参数和材料参数对横向弯曲变形的影响进行了分析。结果表明：

(1) 当梁的高长比固定时，即采用相同结构比例时，对应最大 Gough 刚度的带束角度相同。

(2) 梁的厚度变化不会改变对应于最大 Gough 刚度的带束角度。而且改变厚度对 Gough 刚度的数值影响也很小。

(3) 当梁的结构参数确定后, 对应最大的带束角度会随帘线模量的增加而变大。但是, 当帘线模量已经较大时, 再增加帘线模量对带束角度的影响很小。

(4) 改变橡胶的弹性模量几乎没有对最大 Gough 刚度和与其对应的帘线角度产生影响。这也可以解释为什么改变厚度对 Gough 刚度影响不大, 即增加厚度主要是增加了橡胶所占比例。

为了验证模型的正确性, 将理论结果与有限元分析结果进行了比较, 得到了较好的一致性。本文的研究结果也与已有文献的结果一致。根据理论模型预测的不同高宽比下的最优带束角度与实际轮胎解剖定性一致。结论表明, 该模型可为轮胎带束设计和耐磨性提供理论指导。

参考文献:

- [1] GOUGH V E. Stiffness of cord and rubber constructions[J]. *Rubber Chemistry & Technology*, 1968, 41(4): 988-1021.
- [2] WALTER J D. Advances in tire composite theory[J]. *Tire Science & Technology*, 1973, 1(1): 210-250.
- [3] WALTER J D. Cord-rubber tire composites: Theory and applications[J]. *Rubber Chemistry & Technology*, 1978, 51(3): 524-576.
- [4] 危银涛, 杜星文, 王友善, 等. 橡胶复合材料结构非线性有限元分析[J]. *复合材料学报*, 1998, 15(4): 81-88.
WEI Yintao, DU Xingwen, WANG Youshan, et al. Nonlinear FE analysis for rubber composite structures[J]. *Acta Materiae Compositae Sinicae*, 1998, 15(4): 81-88 (in Chinese).
- [5] FIALA E. Lateral forces on rolling pneumatic tires[J]. *Zeitschrift VDI*, 1954, 96(29): 973-979.
- [6] DANIELS B K. A note on Gough stiffness and tread life[J]. *Tire Science & Technology*, 1977, 5(4): 226-231.
- [7] FORD J L, PATEL H P, TURNER J L. Interlaminar shear effects in cord-rubber composites[J]. *Fibre Science & Technology*, 1982, 17(4): 255-271.
- [8] PARHIZGAR S. Determination of stiffness properties of multi-ply cord-rubber composites[J]. *Tire Science & Technology*, 1989, 17(17): 201-216.
- [9] PIDAPARTI R M V. Stiffness characteristics of twisted cords for cord-rubber composites[J]. *Composite Structures*, 1993, 24(4): 291-298.
- [10] PIDAPARTI R M V. Analysis of cord-rubber composite laminates under combined tension and torsion loading[J]. *Composites Part B: Engineering*, 1997, 28(4): 433-438.
- [11] KOCAK S, PIDAPARTI R M V. Three-dimensional micro-mechanical modeling of cord-rubber composites[J]. *Mechanics of Composite Materials & Structures*, 2000, 7(1): 19-34.
- [12] RAO S, DANIEL I M, GDOUTOS E E. Mechanical properties and failure behavior of cord/rubber composites [J]. *Applied Composite Materials*, 2004, 11(6): 353-375.
- [13] HASSIS H, AREM S E, PIDAPARTI R. Modeling coupling effects in cord-rubber composite structures[J]. *Japanese Journal of Solids & Structures*, 2007, 1(3): 217-236.
- [14] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(4): 745-752.
- [15] REDDY J N, LIU C F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1985, 23(3): 319-330.
- [16] MARUR S R, KANT T. Free vibration analysis of fiber reinforced composite beams using higher order theories and finite element modelling[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1996, 194(3): 337-354.
- [17] SHI G, LAM K Y. Finite element vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1999, 219(4): 707-721.
- [18] HASSIS H, MIRAOU I, PIDAPARTI R. Analysis of cord-composite plates using a higher order formulation[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2006, 25(3): 437-446.
- [19] CHEN W, XU M, LI L. A model of composite laminated Reddy plate based on new modified couple stress theory[J]. *Composite Structures*, 2012, 94(8): 2599-2609.
- [20] THAI C H, TRAN L V, TRAN D T, et al. Analysis of laminated composite plates using higher order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(11): 5657-5677.
- [21] POLIZZOTTO C. From the Euler-Bernoulli beam to the Timoshenko one through a sequence of Reddy-type shear deformable beam models of increasing order[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2015, 53: 62-74.
- [22] FROSTIG Y, BARUCH M, VILNAY O, et al. High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1992, 118(5): 1026-1043.
- [23] FROSTIG Y, SHENHAR Y. High-order bending of sandwich beams with a transversely flexible core and unsymmetrical laminated composite skins[J]. *Composites Engineering*, 1995, 5(4): 405-414.
- [24] FROSTIG Y. Buckling of sandwich panels with a flexible core-high-order theory[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1998, 35(3): 183-204.
- [25] PAVEL S, RAINER B, GÜNTHER P, et al. Optical measurement: Assessment of tire deformation with the focus on its transient handling properties[R]. Hannover: Tire Technology International, 2017(Annual review): 26-30.