

含不完美界面的磁电复合材料倾斜裂纹问题

刘宝汉, 万永平*

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘 要: 研究了含非完美界面的双层压电/压磁复合材料中压电相存在一个倾斜于界面的 III 型裂纹问题。采用弹簧型耦合界面模型模拟非完美界面, 运用 Fourier 积分变换法将裂纹面条件转化为奇异积分方程, 并使用 Lobatto-Chebyshev 方法数值求解了裂纹尖端应力强度因子(SIF)。详细地研究了裂纹尖端 SIF 与界面参数、压电/压磁材料参数和材料的层厚、裂纹的倾斜角、裂纹与界面的距离等几何参数的关系。结果表明: 力学不完美性可以独立地增大 SIF, 而磁学、电学不完美性只有与力学不完美性耦合时才会减小 SIF; 力学-电学、力学-磁学不完美性的耦合会减小 SIF, 而磁学-电学不完美性的耦合不会影响 SIF; 磁场作用下, 增大压磁层弹性模量会减小 SIF, 而增大压电层压电系数、减小压电层弹性模量和介电常数, 均会减小 SIF; 界面不完美性会影响 SIF 随裂纹倾斜角度或裂纹与界面之间距离的变化规律; 在一定范围内增加压电层或压磁层厚度可以减小 SIF。

关键词: 磁电复合材料; 非完美界面; III 型倾斜裂纹; Fourier 积分变换; 奇异积分方程; 应力强度因子

中图分类号: TB380.1; O346.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-3851(2018)12-3474-13

An inclined crack in the bi-layered piezoelectric/piezomagnetic composite with imperfect interface

LIU Baohan, WAN Yongping*

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A Mode-III crack inclined to an imperfect interface in piezoelectric phase of a bi-layered magnetoelectric composite was studied. A coupled interfacial imperfection model was proposed to characterize the imperfect interface. Fourier integral transform was applied to reduce the condition on the crack surface to a singular integral equation, which can be numerically solved by Lobatto-Chebyshev collection method for the stress intensity factor(SIF). The effects of the interfacial imperfection parameters, material constants, layer thickness, inclined angle, distance between crack tip and interface on SIF were systematically discussed. Several conclusions are yielded: the mechanical imperfection can enhance the SIF independently, while the magnetic or electric imperfection can reduce the SIF only through its coupling with the mechanical imperfection; the coupling of mechanical-magneto or mechanical-electro imperfection can reduce the SIF, but the magneto-electro imperfection coupling does not affect SIF in any case; the SIF can be reduced by changing material constants, such as increasing the shear moduli of piezomagnetic layer, decreasing the shear moduli and dielectric coefficient or increasing the piezoelectric coefficient of piezoelectric layer; the variation of SIF versus inclined angle or distance between crack tip and interface can be influenced by interfacial imperfection; increasing the thickness of piezomagnetic or piezoelectric layer can reduce the SIF in a finite interval.

Keywords: magnetoelectric composite; imperfect interface; inclined mode-III crack; Fourier integral transform; singular integral equation; stress intensity factor

收稿日期: 2017-12-19; 录用日期: 2018-02-07; 网络出版时间: 2018-02-10 14:00

网络出版地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180209.004>

基金项目: 国家自然科学基金(11372227)

通讯作者: 万永平, 博士, 教授, 研究方向为先进材料的力学行为 E-mail: wanyp@tongji.edu.cn

引用格式: 刘宝汉, 万永平. 含不完美界面的磁电复合材料倾斜裂纹问题[J]. 复合材料学报, 2018, 35(12): 3474-3486.

LIU B H, WAN Y P. An inclined crack in the bi-layered piezoelectric/piezomagnetic composite with imperfect interface[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2018, 35(12): 3474-3486 (in Chinese).

磁电复合材料是由压电材料和压磁材料通过特殊工艺复合而成的一种新型智能材料。这种材料可以实现力、电、磁相互转换, 因而越来越广泛的被应用于传感器、驱动器等。在磁电复合材料的长期使用过程中, 其组分材料自身及加工过程中的一些缺陷, 譬如孔洞、裂纹等很容易引起磁电复合材料的失效, 因此对磁电复合材料断裂力学行为的研究已成为热点。

近年来, 一些学者对磁电复合材料的断裂力学行为进行了研究。李月芳^[1]利用 Fourier 积分变换和对偶积分方程法求解了功能梯度压电压磁材料的反平面问题, 分别分析了无限大、半无限大及条状压电压磁材料裂纹尖端应力强度因子(SIF)、电位移强度因子和磁感应强度因子。Liu 等^[2]利用细观力学能量方法对纤维增强多铁性复合材料裂纹韧性进行了研究。Li 等^[3,4]对电场或磁场作用下磁电复合材料的 III 型裂纹问题进行了研究, 分析了界面裂纹、内裂纹两种情况下裂纹强度因子, 提出了“压电硬化”和“压磁硬化”效应。Wan 等^[5]研究了周期性界面反平面单裂纹问题, 利用周期性条件将多层磁电复合材料界面裂纹问题转化为双层磁电复合材料界面裂纹问题并定义了表征组分材料性能失配比的参数, 得出了在不同的失配比参数下, 层厚和材料参数对裂纹尖端 SIF 的影响。王伟华^[6]研究了磁电复合材料的孔边裂纹问题, 分析了不同电磁边界条件下裂纹几何参数和载荷对 SIF 的影响。Yue 等^[7]研究了在平面电场或者磁场作用下磁电复合材料界面周期性 Yoff 型运动裂纹问题。Tian 等^[8]研究了层状磁电复合材料周期性界面裂纹平面问题。以上的研究均建立在磁电复合材料界面是完美的情况下, 然而有学者认为磁电复合材料由于制造工艺等原因两相材料的界面可能会存在各种缺陷, 因此有必要把不完美界面的影响考虑在内。Liu 等^[9]认为磁电复合材料两相之间由于高温高压相互渗透, 因此会存在比较薄的界面相, 通过对几何参数及材料参数的研究, 不仅对裂纹之间的相互影响机制做出了解释而且第一次提出了与“压电硬化”相对应的“压电软化”的概念。Li 等^[10-12]分别对含不耦合型非完美界面的压电传感器中与不完美界面平行、垂直及成任意角度的单裂纹进行了研究, 分析了不完美界面参数对能量释放率的影响。Li 等^[13-15]在研究渗透型裂纹反平面问题的过程中采用了有厚度的耦合型非完美界面, 分析了两相材料

中各存在一组平行于非完美界面的裂纹时 6 个界面参数对裂纹尖端应力强度的影响。文献[16-17]利用广义位错和 Green 函数法分析了含耦合型不完美界面的非渗透型裂纹的平面问题, 通过研究能量释放率随界面参数的关系给出了不完美界面对裂纹的影响。

目前文献中对含耦合型不完美界面的磁电复合材料的任意角度倾斜裂纹问题鲜有报道。本文采用不完美耦合界面模型, 利用积分变换和奇异积分方程方法研究了双层压电/压磁复合材料中压电相存在与界面成任意角度的反平面渗透裂纹, 分析了在磁场作用下, 界面参数、几何参数和材料参数对裂纹尖端 SIF 的影响。

1 问题描述

含不完美界面的磁电复合材料倾斜裂纹如图 1 所示, 磁电复合材料由层厚分别为 h_1 、 h_2 的压电层和压磁层组成, 压电层内有一与界面成 θ 角度的裂纹, 假设材料的极化方向沿着 z 轴方向, 且材料处于 oxy 平面内的磁场中, 磁场方向沿着 y 轴正向, 那么两相材料的基本方程如下:

$$\gamma_{\chi}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial \chi} w_j, (j = 1, 2; \chi = x, y \text{ or } x_1, y_1) \quad (1)$$

$$\tau_{\chi}^{(j)} = M_j w_{j,\chi}, (j = 1, 2; \chi = x, y \text{ or } x_1, y_1) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_x^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^{(j)}}{\partial y} = 0, (j = 1, 2) \quad (3)$$

或

$$\frac{\partial \tau_{x_1}^{(j)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{y_1}^{(j)}}{\partial y_1} = 0, (j = 1, 2) \quad (4)$$

式中: $j=1, 2$ 分别指压电层和压磁层; $\gamma_{\chi} = [\gamma_{\chi z}, H_{\chi}, E_{\chi}]^T$ 、 $\tau_{\chi} = [\tau_{\chi z}, B_{\chi}, D_{\chi}]^T$ 、 $w_j = [w, \varphi, \varphi]^T$ 分别表示广义应变、广义应力和广义位移; $\gamma_{\chi z}$ 、 H_{χ} 、 E_{χ} 表示应变、磁场和电场; $\tau_{\chi z}$ 、 B_{χ} 、 D_{χ} 表示应力、磁感应强度和电位移; w 、 φ 、 φ 则相应的表示位移、磁势和电势。材料系数矩阵形式如下:

$$M_j = \begin{pmatrix} c_{44}^{(j)} & \delta_{2j} h_{15}^{(j)} & \delta_{1j} e_{15}^{(j)} \\ \delta_{2j} h_{15}^{(j)} & -\mu_{11}^{(j)} & 0 \\ \delta_{1j} e_{15}^{(j)} & 0 & -\epsilon_{11}^{(j)} \end{pmatrix}, (j = 1, 2) \quad (5)$$

其中, δ_{1j} 、 δ_{2j} 为 Kronecker delta 函数。

将式(1)、式(2)、式(4)代入式(3)可得

$$\nabla^2 w_j = 0, (j = 1, 2) \quad (6)$$

式中, ∇^2 为二维拉普拉斯算子。

假设两相材料之间的界面是力、电、磁不完美

的,且三者之间存在相互耦合,根据界面不完美耦合模型^[18-19],界面条件为

$$\tau_y^{(1)}(x,0)=\tau_y^{(2)}(x,0) \tag{7}$$

$$\tau_y^{(1)}(x,0)=\alpha[w_1(x,0)-w_2(x,0)] \tag{8}$$

其中,

$$\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_1 c_{44}^{(0)} & \alpha_4 h_{15}^{(0)} & \alpha_5 e_{15}^{(0)} \\ \alpha_4 h_{15}^{(0)} & -\alpha_2 \mu_{11}^{(0)} & -\alpha_6 d_{11}^{(0)} \\ \alpha_5 e_{15}^{(0)} & -\alpha_6 d_{11}^{(0)} & -\alpha_3 \epsilon_{11}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

式(8)中 α_1 、 α_2 、 α_3 是表征界面力学性能、磁学导通性能、电学导通性能的系数,当三者为0时表示界面3种不完美最严重,即界面力学脱粘,磁、电不可导通,而值越大,说明界面不完美程度越轻,当值无限大时说明界面趋于完美。同样 α_4 、 α_5 、 α_6 是表征界面力磁、力电、磁电不完美耦合程度的系数,当三者为0时,表示力、磁、电不完美相互独立,而当三者不为0时,表示界面3种不完美之间存在耦合,且值越大,耦合越强。

除此之外,假设裂纹是渗透型裂纹,且裂纹面应力自由,则边界条件和连续性条件如下:

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,h_1)=\tau_0,\tau_{yz}^{(2)}(x,-h_2)=\tau_0$$

$$H_y^{(1)}(x,h_1)=H_1,H_y^{(2)}(x,-h_2)=H_2 \tag{10}$$

$$D_y^{(1)}(x,h_1)=0,D_y^{(2)}(x,-h_2)=0$$

$$\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^+)=\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{11}$$

$$w_1(x_1,0^+)=w_1(x_1,0^-),x_1\notin(a,b)$$

$$\varphi_1(x_1,0^+)=\varphi_1(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{12}$$

$$\varphi_1(x_1,0^+)=\varphi_1(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta)$$

$$\tau_{y1z}^{(1)}(x_1,0)=0,x_1\in(a,b) \tag{13}$$

根据线性问题的叠加原理,上述问题可以认为是以下两个子问题的叠加:(a)材料不存在裂纹,受

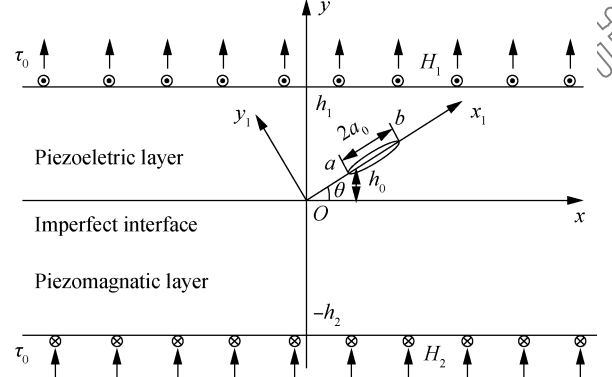


图1 含不完美界面的磁电复合材料倾斜裂纹

Fig. 1 An inclined crack in a bi-layered piezoelectric/piezomagnetic material with an imperfect interface

面内磁场和表面约束力 τ_0 作用,裂纹位置处反平面剪切应力为 τ_e ;(b)压电材料存在裂纹,整个材料只有裂纹面上承受等效剪切应力 $-\tau_e$ 。

2 磁电复合材料问题求解

2.1 磁电复合材料裂纹面等效应力

对于子问题(a),其界面条件如式(7)~(9)所示,而边界条件和连续性条件为

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,h_1)=\tau_0,\tau_{yz}^{(2)}(x,-h_2)=\tau_0$$

$$H_y^{(1)}(x,h_1)=H_1,H_y^{(2)}(x,-h_2)=H_2 \tag{14}$$

$$D_y^{(1)}(x,h_1)=0,D_y^{(2)}(x,-h_2)=0$$

$$\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^+)=\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{15}$$

$$w_1(x_1,0^+)=w_1(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{16}$$

$$\tau_{y1z}^{(1)}(x_1,0)=\tau_e,x_1\in(a,b) \tag{17}$$

由于问题(a)中载荷及材料属性都不随坐标 x 发生变化,因此可以认为广义位移场只是坐标 y 的线性函数^[6]:

$$w_j=A_j y+B_j,j=1,2 \tag{18}$$

其中: $A_j=[a_{w1},a_{w2},a_{w3}]$; $B_j=[b_{w1},b_{w2},b_{w3}]$ 。

通过边界条件(14)及界面条件式(7)~(9)可得问题(a)中裂纹面等效剪切应力 τ_e 如下:

$$\tau_0=\frac{c_{44}^{(2)}}{h_{15}^{(2)}}[\mu_{11}^{(1)}H_1-(1+k_m^2)\mu_{11}^{(2)}H_2] \tag{19}$$

$$\tau_e=\tau_0\cos\theta$$

式中, $k_m=\frac{h_{15}^{(2)}}{\sqrt{c_{44}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}}}$ 称为压磁硬化系数^[2]。

2.2 磁电复合材料断裂分析

在问题(b)中,已假设裂纹是可渗透的,则该问题的边界条件和连续性条件为

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,h_1)=0 \tag{20}$$

$$\tau_{yz}^{(2)}(x,-h_2)=0 \tag{21}$$

$$\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^+)=\tau_{y1}^{(1)}(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{22}$$

$$w_1(x_1,0^+)=w_1(x_1,0^-),x_1\notin(a,b)$$

$$\varphi_1(x_1,0^+)=\varphi_1(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta) \tag{23}$$

$$\varphi_1(x_1,0^+)=\varphi_1(x_1,0^-),x_1\in(0,h_1\csc\theta)$$

$$\tau_{y1z}^{(1)}(x_1,0)=-\tau_e,x_1\in(a,b) \tag{24}$$

由 Fourier 积分变换满足式(21)所示边界条件的压磁层广义位移场形式为

$$w_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_2[e^{|\xi|y}+e^{-|\xi|(y+2h_2)}]e^{-i\xi x}d\xi \tag{25}$$

其中, $A_2=[A_{w2},A_{\varphi2},A_{\varphi2}]$ 。

基于 Fourier 积分变换和叠加原理^[20-22]得含倾斜裂纹的压电层在坐标系 xOy 中的广义位移场形式为

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G} e^{-|\xi| (y \cos \theta - x \sin \theta)} e^{-i\xi (x \cos \theta + y \sin \theta)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_1 e^{|\xi| y} + \mathbf{B}_1 e^{-|\xi| y}] e^{-i\xi x} d\xi, \quad y_1 > 0 \quad (26)$$

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F} e^{|\xi| (y \cos \theta - x \sin \theta)} e^{-i\xi (x \cos \theta + y \sin \theta)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_1 e^{|\xi| y} + \mathbf{B}_1 e^{-|\xi| y}] e^{-i\xi x} d\xi, \quad y_1 < 0 \quad (27)$$

同样可得压电层广义位移场在坐标系中的形式为

$$w_1(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_1 e^{|\xi| (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)} + \mathbf{B}_1 e^{-|\xi| (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)}] \times e^{-i\xi (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G} e^{-|\xi| y_1} e^{-i\xi x_1} d\xi, \quad y_1 > 0 \quad (28)$$

$$w_1(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}_1 e^{|\xi| (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)} + \mathbf{B}_1 e^{-|\xi| (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)}] \times e^{-i\xi (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F} e^{|\xi| y_1} e^{-i\xi x_1} d\xi, \quad y_1 < 0 \quad (29)$$

式中: $\mathbf{A}_1 = [A_{w1}, A_{\varphi1}, A_{\varphi1}]$; $\mathbf{B}_1 = [A_{w1}, A_{\varphi1}, A_{\varphi1}]$; $\mathbf{F} = [F_w, F_{\varphi}, F_{\varphi}]$; $\mathbf{G} = [G_w, G_{\varphi}, G_{\varphi}]$ 。

为使用奇异积分方程法求解裂纹问题, 引入以下辅助函数:

$$g(x_1) = \begin{cases} w_{1, x_1}(x_1, 0^+) - w_{1, x_1}(x_1, 0^-), & x_1 \in (a, b) \\ 0, & (0, a] \cup [b, h_1 \csc \theta) \end{cases} \quad (30)$$

由位移单值条件可知:

$$\int_a^b g(t) dt = 0 \quad (31)$$

对式(30)进行傅里叶变换得

$$w_1(x_1, 0^+) - w_1(x_1, 0^-) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i}{\xi} \int_a^b g(t) e^{i\xi(t-x_1)} dt \right] d\xi, \quad x_1 \in (a, b) \quad (32)$$

由式(22)~(23)、式(28)、式(29)、式(32)可得

$$\mathbf{F}_w = -\mathbf{G}_w = -\frac{i}{2\xi} \int_a^b \mathbf{I}_0 g(t) e^{i\xi t} dt \quad (33)$$

将式(26)~(27)代入式(2)得到 $\tau_{yz}^{(1)}$, 然后代入式(20)得

$$\mathbf{B}_y = e^{2h_1 |\xi|} \mathbf{A}_1 + \int_a^b \mathbf{Q}_1 \mathbf{I}_0 g(t) dt \quad (34)$$

式中: $\mathbf{I}_0 = [1, 0, 0]$; $\mathbf{Q}_1$ 的具体形式见附录。

将式(2)、式(26)~(27)、式(33)~(34)代入式(7)~(8), 可得代数方程组:

$$(e^{2h_1 |\xi|} - 1) \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_1 - (e^{-2h_2 |\xi|} - 1) \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_2 = \int_a^b \mathbf{M}_1 \mathbf{I}_0 (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1) g(t) dt \quad (35)$$

$$[(1 - e^{2h_1 |\xi|}) \alpha \mathbf{M}_1 - (1 + e^{2h_1 |\xi|}) \alpha] \mathbf{A}_1 + (1 + e^{2h_2 |\xi|}) \alpha \mathbf{A}_2 =$$

$$\int_a^b [|\xi| \mathbf{M}_1 \mathbf{I}_0 (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_3) \alpha \mathbf{I}_0] g(t) dt \quad (36)$$

求解式(35)~(36)得

$$\mathbf{A}_1 = \int_a^b \mathbf{H}(t, \xi) g(t) dt \quad (37)$$

式中: $\mathbf{H}(t, \xi) = [H_{11}(t, \xi), H_{21}(t, \xi), H_{31}(t, \xi)]$; $\mathbf{Q}_2$ 和 $\mathbf{Q}_3$ 为已知函数, 具体形式见附录。

最后将式(28)~(29)代入式(2)得到 $\tau_{yz}^{(1)}$, 则由式(24)可得到奇异积分方程:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x_1} + \mathbf{Q}_7(x_1, t) + R(x_1, t) \right] g(t) dt = \frac{-2\tau_e}{c_{44}^{(1)}} \quad (38)$$

为了将上式转化为标准形式, 引入以下变量^[23]

$$t = a_0 \tilde{t} + \frac{a+b}{2}, \quad x_1 = a_0 \tilde{x} + \frac{a+b}{2}, \quad g(t) = \frac{2\tau_e}{c_{44}^{(1)}} \tilde{g}(\tilde{t}) \quad (39)$$

式(38)可以改写为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\tilde{t}-\tilde{x}} + \tilde{\mathbf{Q}}_7(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{R}(\tilde{t}, \tilde{x}) \right] \tilde{g}(\tilde{t}) d\tilde{t} = -1, \quad -1 < \tilde{x} < 1 \quad (40)$$

其中,

$$\tilde{R}(\tilde{x}, \tilde{t}) = a_0 R\left(a_0 \tilde{x} + \frac{a+b}{2}, a_0 \tilde{t} + \frac{a+b}{2}\right),$$
$$\tilde{Q}_7(\tilde{x}, \tilde{t}) = a_0 Q_7\left(a_0 \tilde{x} + \frac{a+b}{2}, a_0 \tilde{t} + \frac{a+b}{2}\right)$$
(41)

其中, $\tilde{R}(\tilde{x}, \tilde{t})$ 和 $\tilde{Q}_7(\tilde{x}, \tilde{t})$ 的具体形式见附录。

根据 Lobatto-Chebyshev 方法^[24-25], 可以取

$$\tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{f(\tilde{t})}{\sqrt{1-\tilde{t}^2}}$$
(42)

其中, $f(\tilde{t})$ 为区间 $[-1, 1]$ 上的有界连续函数, 将式(40)离散为下列线性代数方程组:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j f(\tilde{t}_j) \left[\frac{1}{\tilde{t}_j - x_k} + \tilde{Q}_7(\tilde{t}_j, \tilde{x}_k) + \tilde{R}(\tilde{t}_j, \tilde{x}_k) \right] = -m$$
(43)

其中,

$$\tilde{x}_k = \cos\left[\frac{2k-1}{2m}\pi\right], k=1, 2, \cdots, m$$
(44)

$$\tilde{t}_j = \cos\left[\frac{j\pi}{m}\right], j=0, 1, 2, \cdots, m$$

$$\lambda_0 = \lambda_m = \frac{1}{2}, \lambda_1 = \cdots \lambda_{m-1} = 1$$
(45)

而式(31)可以改写为

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j f(\tilde{t}_j) = 0$$
(46)

根据线弹性断裂力学, 该问题的裂纹尖端 SIF 可以定义为^[26-27]

$$K_a = \lim_{x_1 \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-x_1)} \tau_{yz}(x_1, 0),$$
(47)

$$K_b = \lim_{x_1 \rightarrow b^+} \sqrt{2\pi(x_1-b)} \tau_{yz}(x_1, 0)$$

于是有

$$K_a = \sqrt{\pi a_0} \tau_e f(-1), K_b = -\sqrt{\pi a_0} \tau_e f(1)$$
(48)

求解线性方程组后可求得 SIF。

3 算例分析

为了分析不完美界面参数、材料参数和几何参数对裂纹尖端 SIF 的影响, 选取工程中常用的 CoFe_2O_4 作为压磁材料, BaTiO_3 作为压电材料。假设施加的磁场为 $H_1 = H_2 = -1.010^5 \text{ A/m}$ 。

3.1 界面不完美性对 SIF 的影响

本小节分析了界面不完美系数对裂纹尖端 SIF 影响。为方便研究, 计算中取 $h_1 = 5a_0$, $h_2 = h_1$, $h_0 = 0.01a_0$, $\theta = 45^\circ$ 。

3.1.1 界面力学不完美性的影响

图 2 为 SIF 随 α_1 的变化。可知, 无论 α_4 和 α_5 是否为 0, SIF 均随 α_1 增大而减小; 而当 α_1 足够大时, SIF 不随其变化。因此, 界面力学不完美性可以独立影响 SIF, 界面力学性能越差, SIF 越大, 而当界面力学性能趋于完美时, SIF 不受影响。

3.1.2 界面磁学导通性的影响

图 3 为 SIF 随 α_2 的变化。可知, 当 α_4 为 0 时, SIF 不随 α_2 变化; 当 α_4 不为 0 时, SIF 随 α_2 增大而增大; 但当 α_2 足够大时, SIF 几乎不随其变化。说明界面磁学导通性只有与力学不完美性耦合时才会对 SIF 产生影响, 且界面磁学导通性越差, SIF 越小; 当界面趋于磁学完全可导通时, SIF 几乎不受影响。此外, 无论 α_6 是否为 0, SIF 都不随 α_2 发生变化, 说明无论界面磁学和电学导通性是否耦合, 对裂纹尖端 SIF 均不会产生影响。

3.1.3 界面电学导通性的影响

图 4 为 SIF 随 α_3 的变化。可知, 当 α_5 为 0 时,

表 1 压磁材料 CoFe_2O_4 常数^[13]

Table 1 Material constants of CoFe_2O_4 ^[13]

$c_{44}^{(2)} / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$h_{15}^{(2)} / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$	$\mu_{11}^{(2)} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2})$	$\epsilon_{11}^{(2)} / (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$
4.53×10^{10}	5.5×10^2	5.9×10^{-4}	8×10^{-11}

Notes: c_{44} —Shear module; h_{15} —Piezomagnetic coefficient; ϵ_{11} —Dielectric coefficient.

表 2 压电材料 BaTiO_3 常数^[13]

Table 2 Material constants of BaTiO_3 ^[13]

$c_{44}^{(2)} / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$e_{15}^{(1)} / (\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	$\mu_{11}^{(1)} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2})$	$\epsilon_{11}^{(1)} / (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$
4.3×10^{10}	11.6	5.6×10^{-6}	1.12×10^{-8}

Note: e_{15} —Piezoelectric coefficient.

表 3 参考磁电弹材料常数^[13]

Table 3 Reference constants of magnetoelectroelastic material^[13]

$c_{44}^{(0)} / (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$	$\mu_{11}^{(0)} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2})$	$\epsilon_{11}^{(0)} / (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	$h_{15}^{(0)} / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$	$e_{15}^{(0)} / (\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	$d_{11}^{(1)} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{C}^{-1})$
4.3×10^{10}	-2.97×10^{-4}	5.64×10^{-9}	2.75×10^2	5.8	5.367×10^{-12}

Note: d_{11} —Megnetoelectric coefficient.

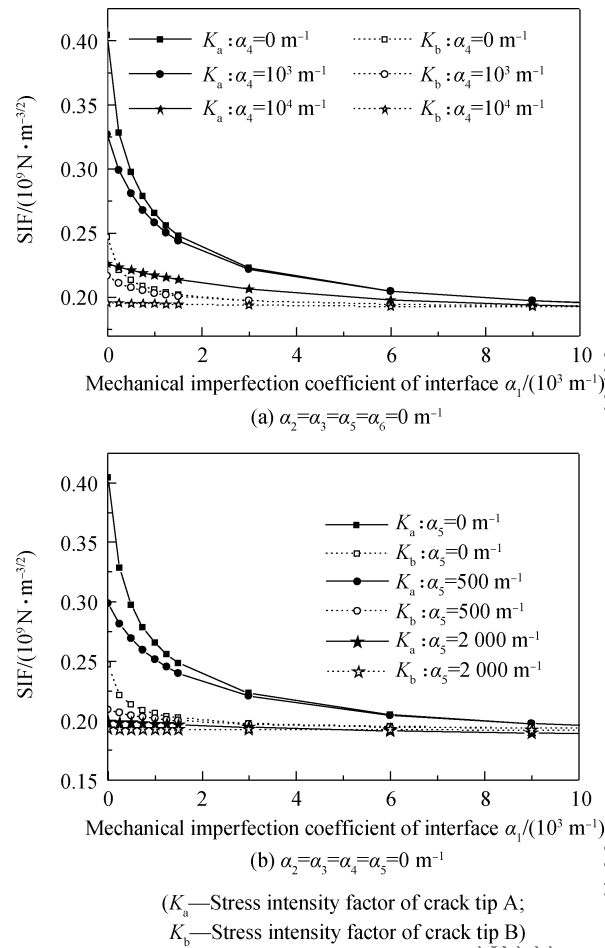


图2 力学不完美性对磁电复合材料应力强度因子(SIF)的影响
Fig.2 Effect of mechanical imperfection on stress intensity factor (SIF) of piezoelectric/piezomagnetic composite

SIF 不随 α_3 发生变化, 当 α_5 不为 0 时, SIF 随 α_3 增大而增大, 但 α_3 足够大时, SIF 几乎不再随其变化。说明界面电学导通性只有与力学不完美耦合时才会对 SIF 产生影响, 且电学导通性越差, SIF 越小; 当界面趋于电学完全可导通时, SIF 几乎不受影响。此外, 无论 α_6 是否为 0, SIF 都不随 α_3 变化, 说明无论界面电学—磁学导通性是否耦合对裂纹尖端 SIF 均不会产生影响。

3.1.4 界面力学不完美性与磁学导通性耦合的影响

图 5 为裂纹尖端 SIF 随 α_4 的变化。可知, SIF 随 α_4 的增大而减小, 但当 α_4 足够大时, SIF 几乎不再随其变化。说明界面力学不完美性与磁学导通性耦合有助于减小 SIF, 且耦合越强 SIF 越小, 但当耦合足够强时, 对 SIF 不再有影响。

3.1.5 界面力学不完美性与电学导通性耦合的影响

图 6 为裂纹尖端 SIF 随 α_5 的变化。可知, SIF

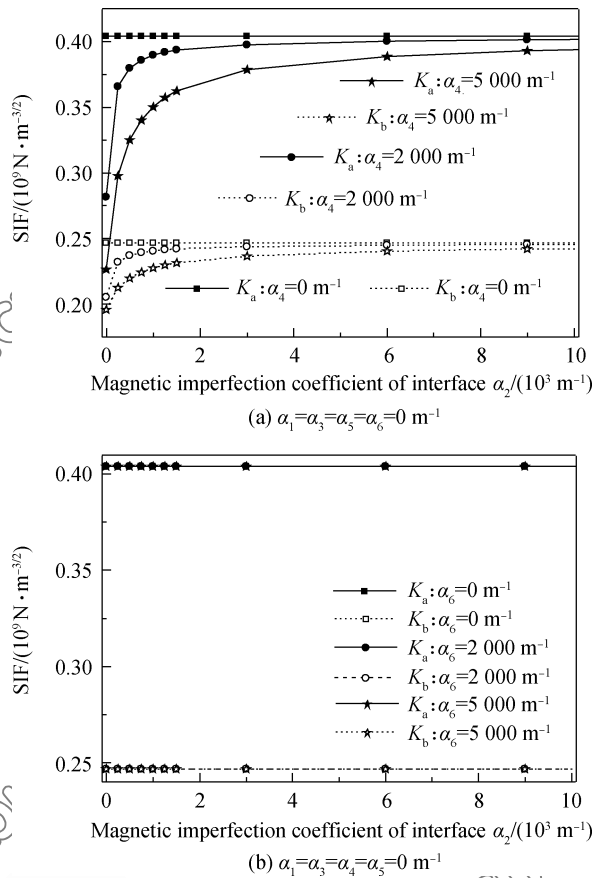


图3 磁学不完美性对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig.3 Effect of magnetic imperfection on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

随 α_5 的增大而减小, 但当 α_5 足够大时, SIF 几乎不再随其变化。因此界面力学不完美性与电学导通性耦合有助于减小 SIF, 且耦合越强应力强度因子越小, 但当耦合足够强时, 对 SIF 几乎不再有影响。

3.1.6 磁-电不完美耦合的影响

图 7 为 SIF 随 α_6 的变化。可知, SIF 不随 α_6 的变化而变化。由此说明界面磁学导通性和电学导通性耦合不会对 SIF 产生影响。除上述结论外, 在界面力、磁、电不完美较严重且相互耦合比较弱时, SIF a 端大于 b 端, 而界面趋于完美或力、磁、电不完美之间耦合很强时则结论刚好相反, 说明界面不完美性及其之间的耦合对靠近界面的裂纹尖端影响更大。

3.2 材料参数对 SIF 的影响

本小节分析了材料参数对 SIF 的影响。计算中 $h_1=5a_0$, $h_2=h_1$, $h_0=0.01a_0$, $\theta=15^\circ$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, $\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0$ 。

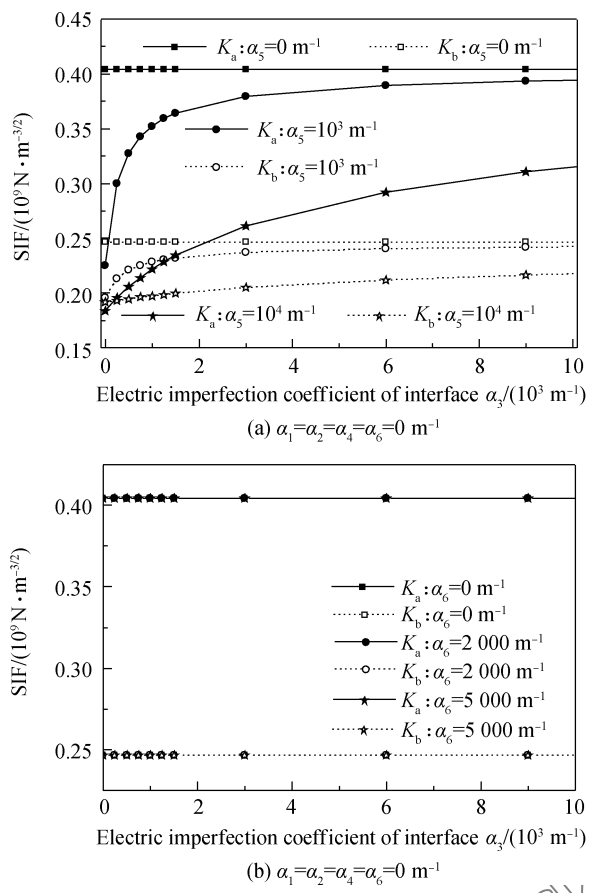


图 4 电学不完美性对电磁复合材料 SIF 的影响
Fig. 4 Effect of electric imperfection on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

3.2.1 弹性模量的影响

图 8 为 SIF 随两相材料的弹性模量的变化。可知, SIF 随压电层弹性模量增大而增大, 但随压磁层弹性模量增大而减小。由于磁场作用下压磁层发生主动变形而压电层发生被动变形, 压磁层刚度增大导致主动变形减小, 进而压电层 SIF 减小, 而压电层刚度增大则会使自身载荷分担比增大, 进而增大 SIF。

3.2.2 压磁层其他材料参数的影响

图 9 表明 SIF 不随压磁层其他材料系数发生变化, 说明压磁层中压磁系数和磁导率及介电系数对应力强度因子不会产生影响。

3.2.3 压电层其他材料参数的影响

图 10 为 SIF 随压电层其他材料参数的变化。可知, SIF 不随压电材料的磁导率发生变化, 却随着压电常数的增大而减小, 随介电常数的增大而增大。与前述解释相似, 减小压电系数或者增大介电常数都相当于增大了被动层材料的刚度, 因

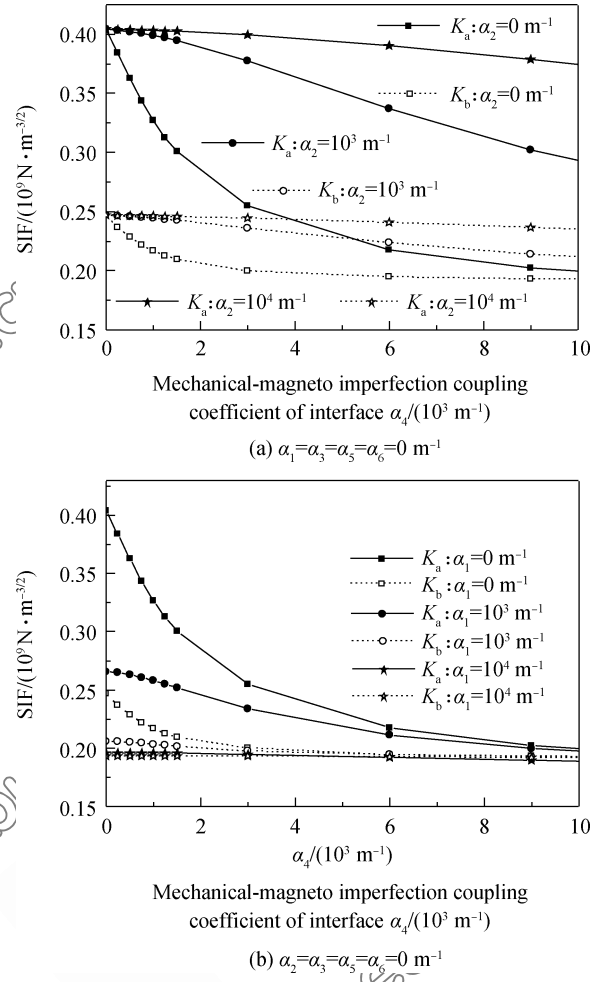


图 5 力-磁不完美性耦合对电磁复合材料 SIF 的影响
Fig. 5 Effect of mechanical-magneto imperfection coupling on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

而会增大 SIF。

3.3 几何参数对 SIF 的影响

本小节分析裂纹倾斜角度、裂纹与界面的距离和层厚对 SIF 的影响。计算中取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ 。

3.3.1 裂纹倾斜角度的影响

图 11 为裂纹两端 SIF 随 θ 的变化, 在计算中取 $h_1 = 5a_0$, $h_2 = h_1$, $h_0 = 0.01a_0$ 。可以看出, 裂纹两端 SIF 随 θ 的变化规律与界面不完美有关。当界面力、电、磁不完美非常严重时, 如 $\alpha = 0 \text{ m}^{-1}$, θ 从 90° 趋近 0° 的过程中, 裂纹两端 SIF 均随之增大, 且当 θ 从 10° 趋近 0° 时, SIF 增加尤为剧烈; 当界面力、电、磁不完美比较严重时, 如 $\alpha = 3000 \text{ m}^{-1}$, θ 从 90° 趋近 0° 的过程中, 裂纹尖端 a 的 SIF 先增大后减小, 且在 10° 左右最大, 而裂纹尖端 b 的 SIF 持续增大; 当界面趋于完美时,

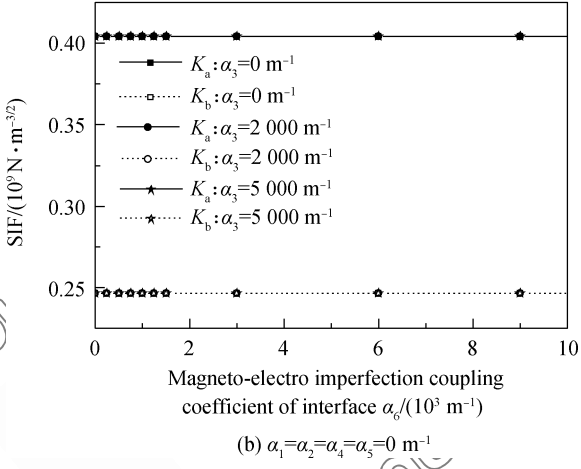
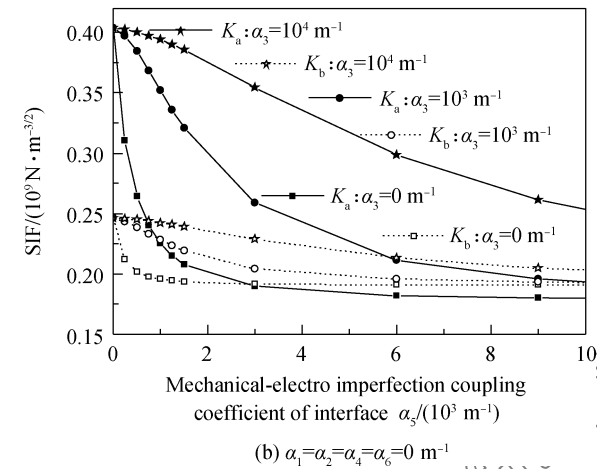
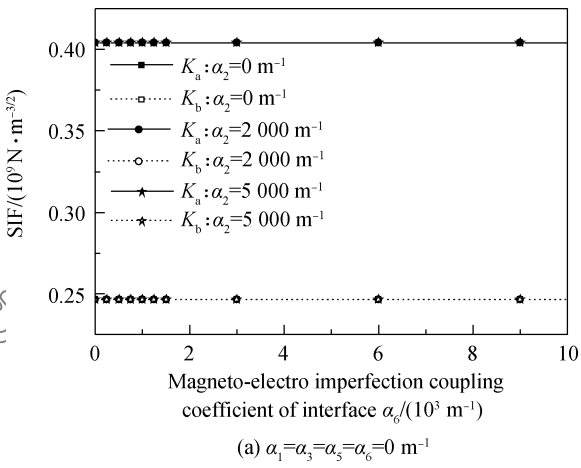
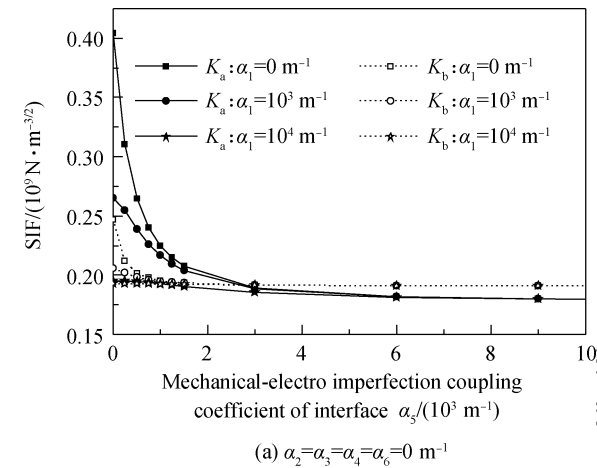


图 6 力-电不完美性耦合对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 6 Effect of mechanical-electro imperfection coupling on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

图 7 磁-电不完美性耦合对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 7 Effect of megneto-electro imperfection coupling on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

如 $\alpha=10^6 \text{ m}^{-1}$, θ 从 90° 趋近 0° 的过程中, 裂纹两端 SIF 都随之增大, 但当 θ 从 10° 趋近 0° 时, SIF 变化很小。

3.3.2 裂纹与界面距离的影响

图 12 所示为裂纹两端 SIF 随 h_0 的变化, 计算中取 $h_1=5a_0$, $h_2=h_1$, $\theta=75^\circ$ 。可知, SIF 随 h_0 的变化规律与界面不完美有关。当界面不完美比较严重时, 若裂纹离界面较近, 如 $h_0 < a_0$ 时, SIF 随 h_0 减小而急剧增大, 且 a 端大于 b 端, 而当裂纹离界面较远时, 如 $h_0 > 2a_0$ 时, SIF 随 h_0 增大而增大, 且 a 端小于 b 端, 这是由于裂纹靠近界面时, 界面的不完美会增大 SIF, 且对 a 端影响更大, 而远离界面时, 边界效应会增大 SIF, 且对 b 端影响更大; 当界面趋于完美时, 裂纹尖端 SIF 随 h_0 的增大而增大, 且若裂纹靠近界面, 如 $h_0 < 0.5a_0$ 时, 裂纹尖端 a 的 SIF 随着 h_0 的减小而急剧减小, 而裂纹远离界面如 $h_0 > 2a_0$ 时, 裂纹尖端 b 的 SIF 随着 h_0

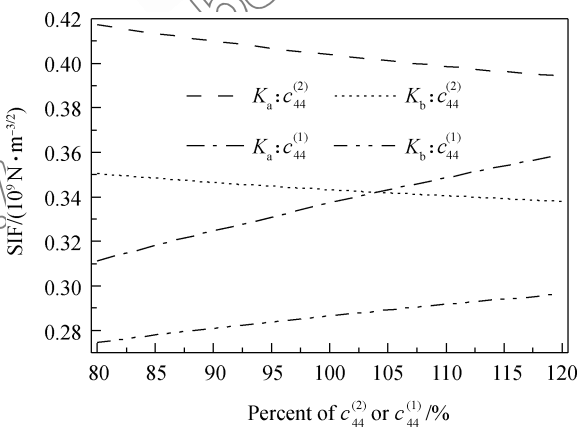


图 8 弹性模量对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 8 Effect of the shear moduli on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

的增大而急剧增大。

3.3.3 材料层厚的影响

图 13 为 SIF 随压磁层与压电层厚度比的变化。

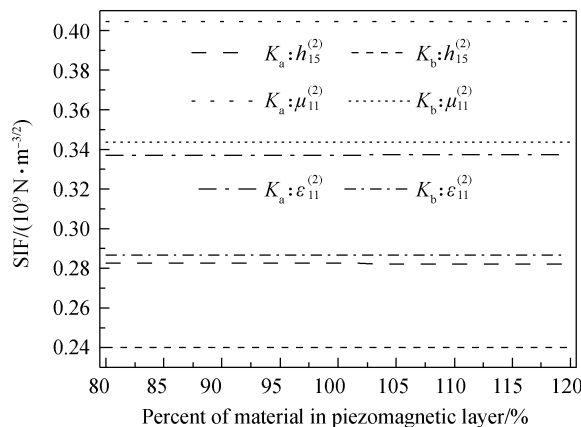


图9 压磁层系数对磁电复合材料 SIF 的影响

Fig. 9 Effect of material in piezomagnetic layer on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

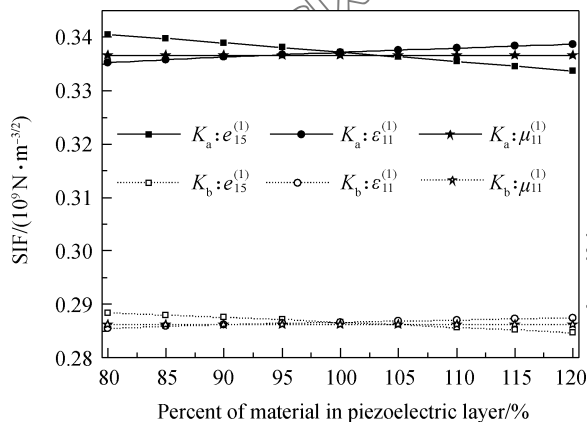


图10 压电层系数对磁电复合材料 SIF 的影响

Fig. 10 Effect of the material in piezoelectric layer on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

计算中取 $h_1 = 5a_0$, $h_0 = 0.01a_0$, $\theta = 1^\circ$ 。可以看出, 当厚度比小于 1 时, SIF 随厚度比的增加急剧减小, 而当厚度比大于 1 时, SIF 不随厚度比的增加而变化。上述说明在磁场作用下, 当主动层厚度小于被动层厚度时, 增加主动层厚度有助于减小 SIF, 但当主动层厚度大于被动层厚度时, 增加主动层厚度对减小 SIF 并无助益。除此之外, 当 $\alpha = 0 \text{ m}^{-1}$, 即力学脱粘, 磁电不可渗透时, 压磁层厚度的变化对 SIF 没有影响。

图 14 为 SIF 随压电层厚度的变化。计算中取 $h_2 = h_1$, $h_0 = 0.01a_0$, $\theta = 1^\circ$ 。由图 14(a) 可以看出, 当界面不完美很严重, 如 $\alpha < 100 \text{ m}^{-1}$ 时, SIF 随压电层厚度的增大几乎不变, 而当界面不完美逐渐减轻时, SIF 随着压电层厚度的增加明显的减小, 且当 h_1 足够大时, SIF 不会再发生变化。

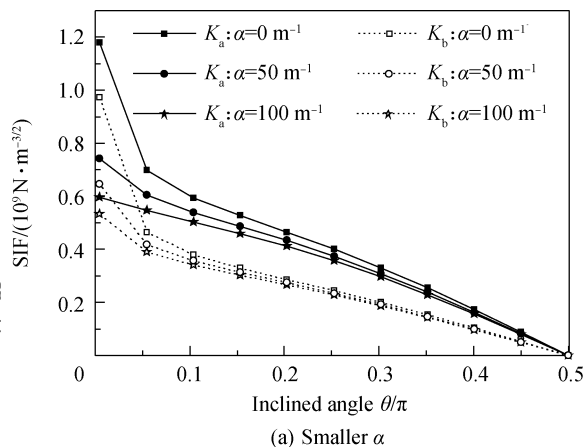
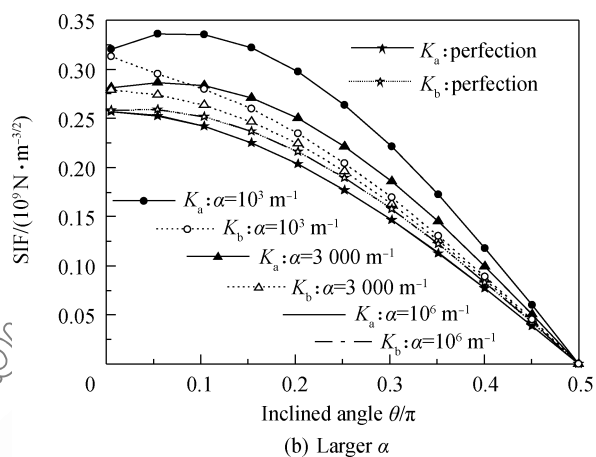
(a) Smaller α (b) Larger α

图11 裂纹角度对磁电复合材料(SIF)的影响

Fig. 11 Effect of the inclined angle on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

因此, 当层厚比一定时, 增大压电层厚度有助于减小 SIF。

除上述结论外, 在对几何参数的研究中, 当不完美界面参数足够大, 如 $\alpha = 10^6 \text{ m}^{-1}$ 时, 裂纹尖端 SIF 随几何参数的变化关系及数值大小和完美界面完全吻合, 说明了本文的界面不完美耦合模型可以退化到完美界面的情形。

4 结 论

本文采用界面不完美耦合模型, 利用 Fourier 积分变换和奇异积分方程数值解法研究了含不完美界面的磁电复合材料中含任意角度倾斜裂纹问题。通过具体的算例分析, 讨论了不完美界面的 6 个参数、两相材料材料参数和模型的几何参数对裂纹尖端应力强度因子(SIF)的影响。

(1) 界面力学不完美性可以独立增大应力强度因子, 但磁学、电学不完美只有与力学不完美耦合时才会减小 SIF;

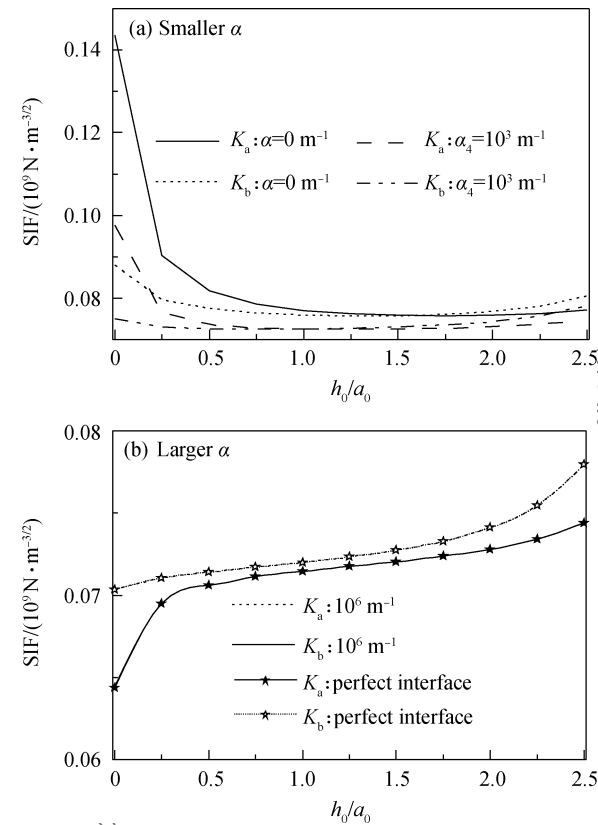


图 12 裂纹与界面距离 h_0/a_0 对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 12 Effect of the distance h_0/a_0 between crack and interface on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

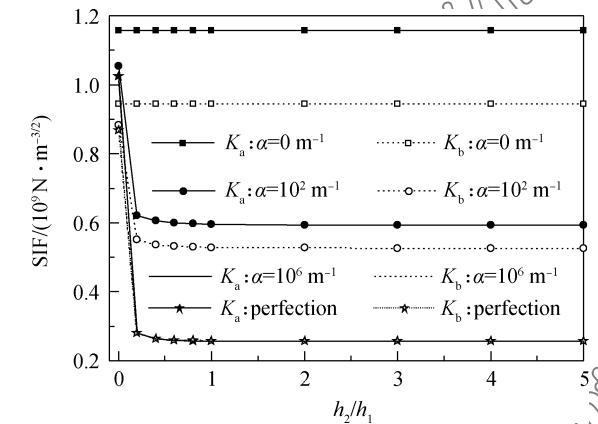


图 13 压磁层厚度 h_2/h_1 对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 13 Effect of the thickness of piezomagnetic layer h_2/h_1 on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

(2) 力学-磁学不完美性和力学-电学不完美性耦合越强，SIF 越小，而磁学-电学不完美耦合对 SIF 没有影响；

(3) 在磁场作用下，增大压磁层弹性模量会减小 SIF，而减小压电层弹性模量和介电常数或者增大压电常数均会减小 SIF；

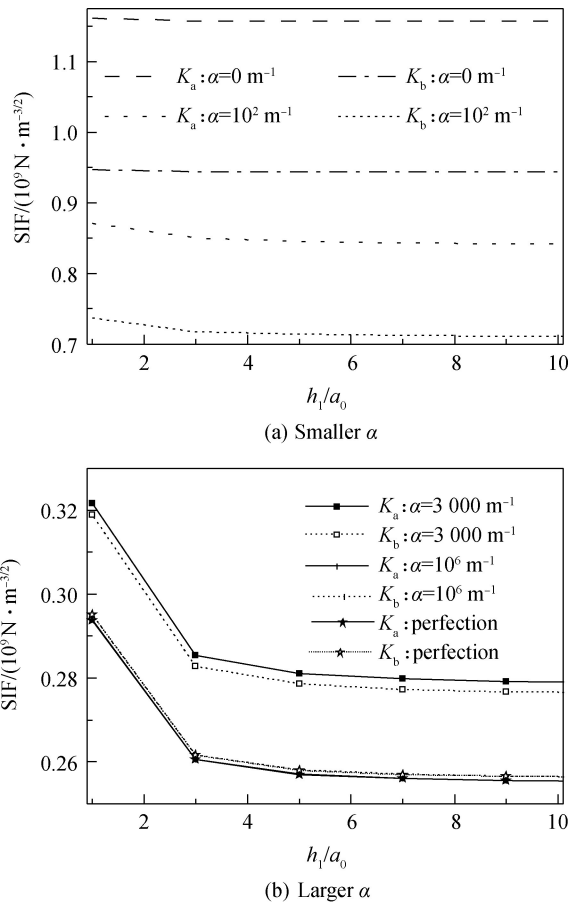


图 14 压磁层厚度 h_1/a_0 对磁电复合材料 SIF 的影响
Fig. 14 Effect of the thickness of piezoelectric layer h_1/a_0 on SIF of piezoelectric/piezomagnetic composite

(4) 裂纹尖端 SIF 随裂纹倾斜角度和裂纹尖端与界面之间距离的变化规律与界面的不完美程度有关；

(5) 界面力学脱粘，磁电不可渗透时，材料层厚度对 SIF 没有影响，除此外，在一定范围内，增加材料层厚度有助于减小 SIF。

参考文献：

[1] 李月芳. 功能梯度压电压磁材料反平面问题[D]. 宁夏：宁夏大学，2006.
LI Yuefang. Anti-plane problem in piezoelectric/piezomagnetic materials[D]. Ningxia: Ningxia University, 2006 (in Chinese).
[2] LIU Yulan, LU Xiaoyan, WANG Biao. Fracture toughness of multiferroic composite materials[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(17): 4973-4977.
[3] LI Yongdong, LEE Kangyong. Effects of magneto-electric loadings and piezomagnetic/piezoelectric stiffening on multiferroic interface fracture[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77(5): 856-866.

- [4] LI Yongdong, LEE Kangyong, FENG Feixiang. Magnetos- trictive/electrostrictive fracture of the piezomagnetic and pie- zoelectric layers in a multiferroic composite: Anti-plane case [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48 (9): 1311-1317.
- [5] WAN Yongping, YUE Yanpeng, ZHONG Zheng. Multilay- ered piezomagnetic/piezoelectric composite with periodic interface cracks under magnetic or electric field[J]. *Engineer- ing Fracture Mechanics*, 2012, 84(1): 132-145.
- [6] 王玮华. 压电/磁电弹性材料中孔边裂纹的断裂行为研究 [D]. 呼和浩特: 内蒙古工业大学, 2015.
WANG Weihua. Research on fracture behavior of holes with edge cracks in piezoelectric/magneto electroelastic materials [D]. Hohhot: Inner Mongolia University of Technology, 2015 (in Chinese).
- [7] YUE Yanpeng, WAN Yongping. Multilayered piezomagnet- ic/piezoelectric composite with periodic interfacial Yoffe-type cracks under magnetic or electric field[J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225: 2133-2150.
- [8] TIAN Wenxiang, ZHONG Zheng, LI Yaochen. Multilayered piezomagnetic/piezoelectric composites with periodic interfa- cial cracks subject to in-plane loading[J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(1): 15-29.
- [9] LIU Shilun, LI Yongdong. Fracture of a multiferroic semi- cylinder with a magneto-electroelastic interlayer: Piezoelectric stiffening/softening effects and peak removal of stress intensi- ty factor[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, 88-89: 110-118.
- [10] LI Yongdong, LEE Kangyong. The shielding effect of the imperfect interface on a mode III permeable crack in a layered piezoelectric sensor[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76: 876-883.
- [11] LI Yongdong, LEE Kangyong. Interaction between an elec- trically permeable crack and the imperfect interface in a func- tionally graded piezoelectric sensor[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47(3): 363-371.
- [12] LI Yongdong, LEE Kangyong. Crack tip shielding and anti- shielding effects of the imperfect interface in a layered piezo- electric sensor[J]. *International Journal of Solids and Struc- tures*, 2009, 46(7): 1736-1742.
- [13] LI Yongdong, XIONG Tao, LI Hongdong. A new interfacial imperfection coupling model (IICM) and its effect on the fac- ture behavior of a layered multiferroic composite: Anti-plane case[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2015, 52: 26-36.
- [14] LI Hongdong, XIONG Tao, CAI Qingge. Coupled interfacial imperfections and their effects on the fracture behavior of a layered multiferroic cylinder[J]. *Acta Mechanica*, 2015, 226 (4): 1183-1199.
- [15] LI Yongdong, ZHOU Kai, XIONG Tao. Fracture analysis on a multiferroic cylindrical shell: Effects of coupled inter- phase imperfections[J]. *Journal of Intelligent Material Sys- tems and Structures*, 2016, 27(2): 195-207.
- [16] LI Yongdong, XIONG Tao, LI Hongdong. Interfacial imper- fection coupling model with application to the in-plane frac- ture problem of a multiferroic composite[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 54(54): 31-41.
- [17] XIONG Tao, LI Yongdong, ZHANG Nan. Two bonded multiferroic ceramics half-planes with coupled interfacial imperfections: In-plane fracture and its dislocation-based physical mechanisms[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2016, 59: 1-13.
- [18] SHI Yin, WAN Yongping, ZHONG Zheng. Variational- bounds for the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites with electro-mechanical coupling spring-type inter- faces[J]. *Mechanics of Materials*, 2014, 72(5): 72-93.
- [19] WEI Hongxing, LI Yongdong, XIONG Tao, et al. Propaga- tion of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate: Effect of interfacial imperfection couplings and the related physical mechanisms[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(38): 3013-3021.
- [20] SHBEEB N, BINIENDA W K, KREIDER K. Analysis of the driving force for a generally oriented crack in a functionally graded strip sandwiched between two homogeneous half planes[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, 104(1): 23-50.
- [21] HSU W H, CHUE C H. Mode III fracture problem of an arbitrarily oriented crack in an FGPM strip bonded to a homo- geneous piezoelectric half plane[J]. *Meccanica*, 2009, 44(5): 519-534.
- [22] YEH C N, CHUE C H. Mode III fracture problem of an FG- PM strip bonded to an FGPM half plane with embedded arbi- trarily oriented cracks[J]. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2012, 35(2): 193-209.
- [23] ZHONG Xianci, LI Xianfang, LEE Kangyong. Analysis of a mode I crack perpendicular to an imperfect interface [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(6): 9456-9463.
- [24] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 259-260.
LI Xing. Integral equation[M]. Beijing: Science Press, 2008: 259-260 (in Chinese).
- [25] ERDOGAN F, GUPTA G D. On the numerical solution of sin- gular integral equations[J]. *Quarterly of Applied Mathema- tics*, 1972, 29(4): 525-534.
- [26] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 77-102.
FAN Tianyou. Foundation of the fracture mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2003: 77-102 (in Chinese).
- [27] 钟献词, 张克实. 垂直于双材料非完美界面 II 型裂纹的断裂分析[J]. *应用数学和力学*, 2012, 33(3): 342-352.
ZHONG Xianci, ZHANG Keshi. Fracture analysis of a mode II crack terminating at the imperfect interface in a bi-material [J]. *Application Mathematics and Mechanics*, 2012, 33(3): 342-352.

附录:

$$Q_1 = \frac{1}{4\pi|\xi|} e^{h_1|\xi| + ih_1\xi \cot\theta} \times \left[e^{-i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}(t-h_1 \csc\theta)}}{\xi - \lambda e^{-i\theta}} d\lambda - e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}(t-h_1 \csc\theta)}}{\xi - \lambda e^{i\theta}} d\lambda \right] \quad (A.1)$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\pi|\xi|} \times \left[e^{-i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}t}}{\xi - \lambda e^{-i\theta}} d\lambda - e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}t}}{\xi - \lambda e^{i\theta}} d\lambda \right] \quad (A.2)$$

$$Q_3 = \frac{1}{4\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}t}}{\lambda(\xi - \lambda e^{-i\theta})} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\tilde{\alpha}t}}{\lambda(\xi - \lambda e^{i\theta})} d\lambda \right] \quad (A.3)$$

$$Q_7(x_1, t) = e^{i\theta} \int_{-\infty}^0 e^{\tilde{\alpha}x_1(\sin\theta - i\cos\theta)} Q_1 \xi d\xi - e^{-i\theta} \int_0^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}x_1(\sin\theta + i\cos\theta)} Q_1 \xi d\xi \quad (A.4)$$

$$H_{11}(t, \xi) = \frac{P_6 P_8 Q_4 - P_5 P_9 Q_4 - P_3 P_8 Q_5 + P_2 P_9 Q_5 + P_3 P_5 Q_6 - P_2 P_6 Q_6}{P_3 P_5 P_7 - P_2 P_6 P_7 - P_3 P_4 P_8 + P_2 P_5 P_8 + P_2 P_4 P_9 - P_1 P_5 P_9} \\ H_{21}(t, \xi) = \frac{-P_6 P_7 Q_4 + P_4 P_9 Q_4 + P_3 P_7 Q_5 - P_1 P_9 Q_5 - P_3 P_4 Q_6 + P_1 P_6 Q_6}{P_3 P_5 P_7 - P_2 P_6 P_7 - P_3 P_4 P_8 + P_1 P_6 P_8 + P_2 P_4 P_9 - P_1 P_5 P_9} \quad (A.5)$$

$$H_{31}(t, \xi) = \frac{P_5 P_7 Q_4 - P_4 P_8 Q_4 - P_3 P_7 Q_5 + P_1 P_8 Q_5 + P_2 P_4 Q_6 - P_1 P_5 Q_6}{P_3 P_5 P_7 - P_2 P_6 P_7 - P_3 P_4 P_8 + P_1 P_6 P_8 + P_2 P_4 P_9 - P_1 P_5 P_9}$$

$$P_1(\xi) = c_{44}^{(1)} (1 - e^{2h_1|\xi|}) |\xi| - c_{44}^{(0)} (1 + e^{2h_1|\xi|}) \alpha_1 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)} (c_{44}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_1 + h_{15}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_4) + e_{15}^{(0)} e_{15}^{(1)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_5)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.6)$$

$$P_2(\xi) = (1 + e^{2h_1|\xi|}) h_{15}^{(0)} \alpha_4 - \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \mu_{11}^{(1)} \left(\frac{c_{44}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_1 - c_{44}^{(2)} h_{15}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_4}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.7)$$

$$P_3(\xi) = (1 - e^{2h_1|\xi|}) e_{15}^{(1)} |\xi| - (1 + e^{2h_1|\xi|}) e_{15}^{(0)} \alpha_5 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{e_{15}^{(1)} (c_{44}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_1 + h_{15}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_4) - e_{15}^{(0)} e_{15}^{(1)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_5)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.8)$$

$$P_4(\xi) = - (1 + e^{2h_1|\xi|}) h_{15}^{(0)} \alpha_4 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)} (h_{15}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_4 - h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_2) - d_{11}^{(0)} e_{15}^{(1)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_6)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.9)$$

$$P_5(\xi) = - (1 - e^{2h_1|\xi|}) |\xi| \mu_{11}^{(1)} + (1 + e^{2h_1|\xi|}) \mu_{11}^{(0)} \alpha_2 - \\ \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|}) \mu_{11}^{(1)} \left(\frac{c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(0)} \alpha_2 + h_{15}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_4}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right)}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \quad (A.10)$$

$$P_6(\xi) = d_{11}^{(0)} (1 + e^{2h_1|\xi|}) \alpha_6 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{e_{15}^{(1)} (h_{15}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_4 - h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(0)} \alpha_2) + d_{11}^{(0)} e_{15}^{(1)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_6)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.11)$$

$$P_7(\xi) = (1 - e^{2h_1|\xi|}) e_{15}^{(1)} |\xi| - (1 + e^{2h_1|\xi|}) e_{15}^{(0)} \alpha_5 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)} (e_{15}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_5 - d_{11}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_6) - e_{15}^{(1)} e_{15}^{(0)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_3)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.12)$$

$$P_8(\xi) = d_{11}^{(0)} (1 + e^{2h_1|\xi|}) \alpha_6 - \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \mu_{11}^{(1)} \left(\frac{e_{15}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_5 + c_{44}^{(2)} d_{11}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_6}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.13)$$

$$P_9(\xi) = - (1 - e^{2h_1|\xi|}) \epsilon_{11}^{(1)} |\xi| + (1 + e^{2h_1|\xi|}) \epsilon_{11}^{(0)} \alpha_3 + \frac{(1 - e^{2h_1|\xi|})(1 + e^{-2h_2|\xi|})}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{\epsilon_{11}^{(0)} \epsilon_{11}^{(1)} (- (h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}) \alpha_3 + e_{15}^{(1)} (e_{15}^{(0)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)} \alpha_5 - d_{11}^{(0)} h_{15}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \alpha_6)}{(h_{15}^{(2)})^2 \epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} \mu_{11}^{(2)}} \right) \quad (A.14)$$

$$Q_4(\xi) = c_{44}^{(1)}(Q_1 - Q_2)|\xi| + c_{44}^{(0)}(Q_1 + Q_3)\alpha_1 + \frac{(1 + e^{-2h_2|\xi|})(Q_1 - Q_2)}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)}(c_{44}^{(0)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}\alpha_1 + h_{15}^{(0)}h_{15}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\alpha_4) + e_{15}^{(1)}e_{15}^{(1)}(-(h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)}\mu_{11}^{(2)})\alpha_5)}{(h_{15}^{(2)})^2\epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}} \right) \tag{A.15}$$

$$Q_5(\xi) = h_{15}^{(0)}(Q_1 + Q_3)\alpha_4 + \frac{(1 + e^{-2h_2|\xi|})(Q_1 - Q_2)}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)}(h_{15}^{(0)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}\alpha_4 - h_{15}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(0)}\alpha_2) - d_{11}^{(0)}e_{15}^{(1)}(-(h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)}\mu_{11}^{(2)})\alpha_6)}{(h_{15}^{(2)})^2\epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}} \right) \tag{A.16}$$

$$Q_6(\xi) = e_{15}^{(1)}(Q_1 - Q_2)|\xi| + e_{15}^{(0)}(Q_1 + Q_3)\alpha_5 + \frac{(1 + e^{-2h_2|\xi|})(Q_1 - Q_2)}{1 - e^{-2h_2|\xi|}} \times \\ \left(\frac{c_{44}^{(1)}(e_{15}^{(0)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}\alpha_5 - d_{11}^{(0)}h_{15}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\alpha_6) - e_{15}^{(1)}e_{15}^{(0)}(-(h_{15}^{(2)})^2 - c_{44}^{(2)}\mu_{11}^{(2)})\alpha_3)}{(h_{15}^{(2)})^2\epsilon_{11}^{(2)} + c_{44}^{(2)}\epsilon_{11}^{(2)}\mu_{11}^{(2)}} \right) \tag{A.17}$$

$$R(x_1, t) = \int_{-\infty}^0 (e^{-2h_1\xi+x_1\xi(\sin\theta-icos\theta)+i\theta} - e^{-x_1\xi(\sin\theta+icos\theta)-i\theta})\xi\mathbf{I}^T\mathbf{M}_1\mathbf{H}d\xi - \\ \int_0^\infty (e^{x_1\xi(\sin\theta-icos\theta)+i\theta} - e^{2h_1\xi-x_1\xi(\sin\theta+icos\theta)-i\theta})\xi\mathbf{I}^T\mathbf{M}_1\mathbf{H}d\xi \tag{A.18}$$