

含剪胀效应界面张力-位移关系的一种构造方法

杨应华*, 郭生栋

(西安建筑科技大学 土木工程学院, 西安 710055)

摘 要: 为了研究异种材料界面的开裂过程, 在 Sørensen 等人工作的基础上, 给出一种含剪胀效应张力-位移关系的构造方法。在界面受拉状态下, 通过预先给定的剪胀函数及法向张力-位移关系导出切向张力-位移关系; 在界面受压状态下, 将切向张力分解为粘结力和摩擦力, 摩擦力的大小与法向压力和粘结界面的破坏程度相关。该方法的结果解释了 Sørensen 模型中切向张力-位移关系不连续及其不符合一致关联准则的原因。为便于进行数值计算, 给出了用于三维有限元模型的界面刚度矩阵计算方法。选取了一种特定形式的剪胀函数, 并将法向张力-位移关系假定为分段线性形式和指数形式, 分别求得对应的切向张力-位移关系。最后给出了两个工程应用的例子, 数值模拟结果与试验数据吻合较好。

关键词: 复合模式断裂; 脱粘; 界面分离; 界面性能; 有限元方法; 刚度矩阵

中图分类号: TB330.1; G346.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2017)12-2890-12

A method for determining interfacial traction-separation law with dilatancy

YANG Yinghua*, GUO Shengdong

(School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Based on the work conducted by Sørensen et al., a method for determining interfacial traction-separation law with dilatancy was presented to investigate interfacial cracking processes of composites. The tangential traction-separation law was derived via a pre-defined shear dilation function and the normal traction-separation law while the interface was in tension. On the contrary, the tangential traction was decomposed into bond strength and friction strength while the interface was in compression. The friction strength is related to the normal pressure and the damage process on the cohesive interface. The results of the method explain why the tangential traction-separation law of Sørensen model is not continuous and violates the consistently coupled rule. In order to facilitate numerical simulation, expressions of interface stiffness matrix applying to three dimensional finite element models were also presented. Then a particular shear dilation function was adopted and the normal traction-separation law was assumed as multilinear form and exponential form, respectively. The corresponding tangential traction-separation law was derived applying the method presented in this paper to those functions. Finally, two examples of engineering application were given. These numerical simulation results are in good agreement with the experimental data.

Keywords: mixed mode fracture; debonding; interface separation; interfacial properties; finite element method; stiffness matrix

内聚力模型(Cohesive Zone Models, CZM)最初由 Barenblatt^[1] 和 Dugdale^[2] 提出, 用于分析金属材料弹塑性断裂问题。Hillerborg 等^[3] 细致地研究了混凝土裂纹前缘微裂区的性态, 提出了虚拟

裂纹模型(Fictitious Crack Model, FCM)及断裂能的概念, 并将其应用于有限元计算。内聚力模型避免了裂纹尖端应力奇异性问题, 广泛用于模拟裂纹扩展行为和复合材料的界面力学行为^[4]。徐强和卢

子兴等^[5-6]利用连续介质力学理论建立了弹塑性界面内聚力模型和黏塑性界面内聚力模型,用于复合材料界面在准静态载荷和动态载荷下的脱粘分析。卢子兴等^[7]基于3D编织复合材料的细观结构,在纱线与基体界面引入内聚力模型,对材料的单轴拉伸应力-应变行为进行了渐进损伤数值模拟。此外,内聚力模型还有效地应用在层合板低速冲击损伤、脆性材料及其界面的开裂等问题研究^[8-10]中。

内聚力模型的一种实现方法是将开裂面上的张力表示为张开位移的函数,在典型的张力-位移关系(Traction-Separation Laws)中,界面张力随界面相对位移的增加上升到某一峰值后开始下降直至达到零。它的一个优点是将断裂面的粘结强度与断裂能结合起来。应用最多的张力-位移关系有分段线性形式^[11-15]和指数形式^[16-17]两种类型,Tvergaard等^[12]的研究指出,在小范围屈服的断裂过程中,张力峰值和张力-位移关系曲线下方的面积是最重要的两个参数,而张力-位移关系曲线的形状相对而言并不重要。

对于给定的张力-位移关系,如果界面法向张力只决定于界面间法向相对位移,而与界面间切向相对位移无关,则称此张力-位移关系为非耦合的;反之,则称张力-位移关系是耦合的。非耦合张力-位移关系的应用具有很大的局限性,仅适用于界面被限定为单一开裂模式(Mode I或Mode II)的情况。真实界面的开裂通常为复合模式(Mixed Mode),需要用耦合的张力-位移关系进行描述。何铭华等^[19]指出,耦合的张力-位移关系应满足一致关联准则,即界面法向相对位移的增加可导致切向粘结强度降低并最终消失,界面切向相对位移的增加亦可导致法向粘结强度降低并最终消失。

Xu等^[16]和Park等^[20]通过对势函数求导得到耦合的张力-位移关系,这个势函数表示界面单位面积上的张力在对应位移上做功的总和。基于势函数的张力-位移关系中,张力做功的大小与位移路径无关。然而,一些学者的研究表明张力做功与位移路径有关,如Cervenka等^[21]指出水泥材料粘结界面断裂能的大小依赖于加载路径,且纯I型和II型开裂具有不同的断裂能。McGarry等^[22]的研究指出了基于势函数的张力-位移关系在描述复合模式开裂问题中的不足,并给出几种修正的张力-位移关系,这些修正的张力-位移关系不能通过对某一势函数求导得到。

Leffler^[23]、Högberg^[24]和Sørensen等^[25]在试验中观察到粘结界面的剪胀现象,即:界面法向张力为零的条件下,施加界面切向相对位移会产生一定量的界面法向相对位移。Sørensen等^[26]认为剪胀起因于:(1)主拉应力在界面粘结层内诱发的规则排列的斜向微裂纹;(2)界面间连接纤维的压屈;(3)界面粗糙表面的相互错动。在上述分析的基础上,Sørensen等^[26]给出基于势函数的耦合张力-位移关系(Sørensen模型),该模型可描述单调加载界面开裂过程中的剪胀效应。Sørensen模型并不满足一致关联准则,且切向张力与切向相对位移关系不连续。

受Sørensen等研究工作的启发,本文给出一种含剪胀效应界面张力-位移关系的构造方法。在界面受拉状态下,通过预先定义的剪胀函数和假定的法向张力-位移关系导出切向张力-位移关系;在界面受压状态下,在切向张力中计入摩擦力的影响,摩擦力的大小与法向压力及粘结界面破坏程度相关。根据该方法的结论,本文指出了Sørensen模型切向张力-位移关系不连续以及违反一致关联准则的原因。根据所得张力-位移关系,将切向张力在切平面内沿任意相互正交的两个方向分解,给出界面刚度矩阵的计算方法。选取一种特定形式的剪胀函数并将法向张力-位移关系假定为最常用的分段线性形式和指数形式,按本文方法推导出相应的切向张力-位移关系。按所得的两种张力-位移关系编写通用有限元程序ABAQUS的用户子程序UINTER,用于模拟由Chen等^[27]完成的一组MMB(Mixed Mode Bending)试验以及李红等^[28]完成的浇筑于混凝土内钢板的拉拔试验,并将模拟结果与试验结果进行对比。

1 张力-位移关系构造方法

1.1 剪胀函数

两物体间的粘结面及其中的一个物体如图1所示,此物体粘结面上P点的外法线方向为 n ,以及此点切平面上任意两个相互正交的方向为 s 、 t 。另一物体与此物体在P点沿 n 、 s 、 t 的相对位移分别为 Δ_n 、 Δ_s 、 Δ_t ,并对此物体产生作用力 T_n 、 T_s 、 T_t 。假定粘结及其破坏后的接触性质在P点的切平面内是各向同性的,则界面的张力-位移关系(T - Δ)可由 (T_n, T_t) - (Δ_n, Δ_t) 表示,其中, $T_t = \sqrt{T_s^2 + T_i^2}$, $\Delta_t = \sqrt{\Delta_s^2 + \Delta_i^2}$ 。

从物理现象上看,界面剪胀依赖于界面的切向相对位移,将剪胀量记为 $\bar{\Delta}_n$,它应是界面相对剪切位移 Δ_r 的非减函数,界面没有相对剪切位移时,剪胀量为零,而当 $\Delta_r \rightarrow +\infty$ 时, $\bar{\Delta}_n$ 趋向于某一固定值 Δ_n^d 。定义剪胀函数(图2):

$$\bar{\Delta}_n = [1 - \varphi(\Delta_r)]\Delta_n^d \quad \Delta_r \in [0, +\infty) \tag{1}$$

其中, $\varphi(\Delta_r)$ 为 Δ_r 的非增函数,且 $0 \leq \varphi(\Delta_r) \leq 1$,并满足

$$\varphi(\Delta_r)|_{\Delta_r=0} = 1 \quad \lim_{\Delta_r \rightarrow +\infty} \varphi(\Delta_r) = 0 \tag{2}$$

由式(1)及式(2)得

$$\frac{d\bar{\Delta}_n}{d\Delta_r} = -\frac{d\varphi}{d\Delta_r}\Delta_n^d \quad \Delta_r \in [0, +\infty) \tag{3}$$

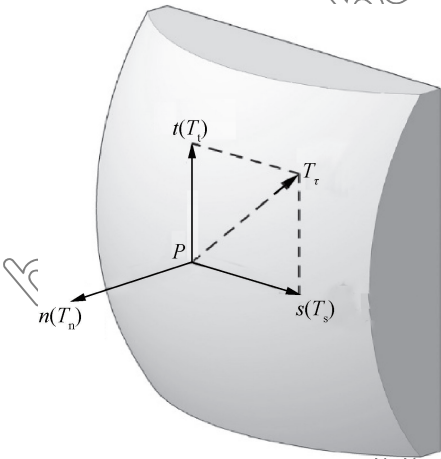


图1 粘结界面的张力
Fig.1 Traction on the interface

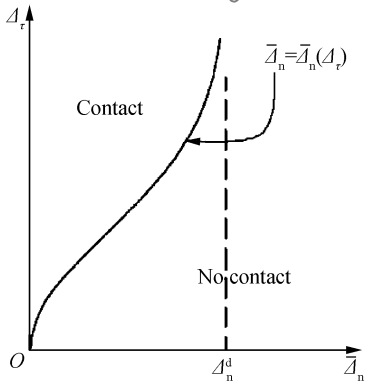


图2 剪胀函数
Fig.2 Shear dilation function

1.2 界面受拉区张力-位移关系推导

典型的单纯 I 型张力-位移关系如图 3(a)所示,曲线下的面积即为界面 I 型断裂能 G_f^I ,可表示为

$$T_n = f(\Delta_n) \quad \Delta_n \in [0, +\infty) \tag{4}$$

其中:

$$f(0) = 0; \quad \lim_{\Delta_n \rightarrow +\infty} f(\Delta_n) = 0 \tag{5}$$

且满足

$$\int_0^{+\infty} T_n d\Delta_n = G_f^I \tag{6}$$

用 $F(\Delta_n)$ 表示 $f(\Delta_n)$ 的任意一个原函数,由式(6)可得

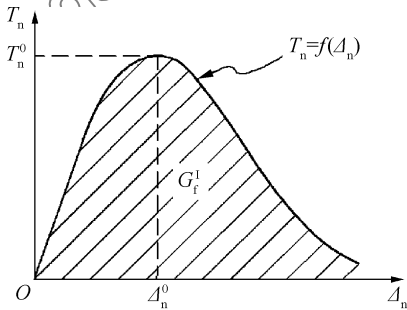
$$\lim_{\Delta_n \rightarrow +\infty} F(\Delta_n) - F(0) = G_f^I \tag{7}$$

复合模式开裂的法向张力-位移关系如图 3(b)所示,剪胀效应使 T_n - Δ_n 曲线向右平移了 $\bar{\Delta}_n$,且张力峰值出现一定程度的降低。将 T_n 表示为

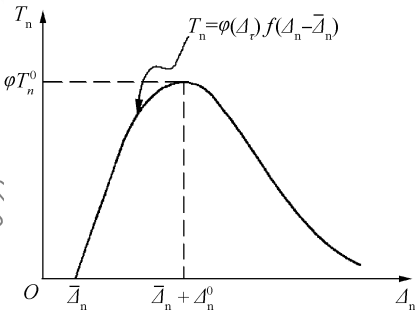
$$T_n = \varphi(\Delta_r) f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) \quad \Delta_n \in [\bar{\Delta}_n, +\infty) \tag{8}$$

式(8)满足一致关联准则,即

$$\lim_{\Delta_r \rightarrow +\infty} T_n = 0 \quad \Delta_n \in [\bar{\Delta}_n, +\infty) \tag{9}$$



(a) Traction-separation law for mode I



(b) Coupled normal traction-separation law

图3 法向张力-位移关系
Fig.3 Normal traction-separation law

基于势函数的张力-位移关系要求积分 $\int_L T_n d\Delta_n + T_r d\Delta_r$ 与路径无关,但考虑到现有的大量研究结果并不支持这一要求,所以这里人为地假定下式成立:

$$\beta \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_r} = \frac{\partial T_r}{\partial \Delta_n} \quad \Delta_r \in [0, +\infty), \Delta_n \in [\bar{\Delta}_n, +\infty) \tag{10}$$

其中, $\beta = 1$ 是积分 $\int_L T_n d\Delta_n + T_\tau d\Delta_\tau$ 与路径无关的充分必要条件。由式(8)得

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} = \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \left[f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) - \varphi_n^d \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \right] \quad (11)$$

注意到

$$\frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} = - \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \quad (12)$$

式(11)可写成

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} = \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \left[f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi_n^d \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \right] \quad (13)$$

将式(13)代入式(10)得

$$\begin{aligned} T_\tau &= \beta \int \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} d\Delta_n \\ &= \beta \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} [F(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi_n^d f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)] \\ &\quad + G(\Delta_\tau) \end{aligned} \quad (14)$$

根据一致关联准则的要求,有

$$\lim_{\Delta_n \rightarrow +\infty} T_\tau = 0 \quad \Delta_n \in [0, +\infty) \quad (15)$$

联合式(5)、式(14)和式(15)得

$$\beta \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \cdot \lim_{\Delta_n \rightarrow +\infty} F(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + G(\Delta_\tau) = 0 \quad (16)$$

由于 $F(\Delta_n)$ 是 $f(\Delta_n)$ 的任意一个原函数,令

$$\lim_{\Delta_n \rightarrow +\infty} F(\Delta_n) = 0 \quad (17)$$

相应地由式(7)、式(16)和式(17)得

$$G(\Delta_\tau) = 0 \quad (18)$$

$$F(0) = -G_f^I \quad (19)$$

$T_\tau = T_\tau(\bar{\Delta}_n, \Delta_\tau)$ 对应于纯 II 型张力-位移关系, II 型断裂能由下式计算:

$$\begin{aligned} G_f^{II} &= \int_0^{+\infty} T_\tau(\bar{\Delta}_n, \Delta_\tau) d\Delta_\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \beta \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} [F(0) + \varphi_n^d f(0)] + G(\Delta_\tau) \right\} d\Delta_\tau \end{aligned} \quad (20)$$

将式(2)、式(5)、式(18)及式(19)代入式(20)得

$$G_f^{II} = \beta G_f^I, \text{ 即}$$

$$\beta = \frac{G_f^{II}}{G_f^I} \quad (21)$$

1.3 界面受压区张力-位移关系推导

前文的讨论仅限于 $\Delta_n \geq \bar{\Delta}_n$ 的情况,相互粘结的两物体间界面上不产生压力。当界面两侧物体间存在相互挤压作用时,粘结层产生压缩,界面法向张力可表示为

$$T_n = \frac{T_n^0}{\Delta_n^0} (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) \quad \Delta_n < \bar{\Delta}_n \quad (22)$$

一般的分析中认为界面挤压不引起界面破坏,但一些研究表明,界面压力的存在使界面的抗剪能力有所提高。Lee 等^[29]在研究钢与混凝土界面的粘结强度时即考虑到界面压力对界面切向粘结强度的增强作用。王斌^[30]在计算型钢混凝土柱承载力时对型钢受拉、受压翼缘与混凝土之间的切向局部粘结强度采用了不同的计算式,实际上是考虑了界面压力对切向粘结强度的影响。当界面粘结完全破坏以后,界面压力对切向力的贡献即为界面间的摩擦力。在界面法向受压的情况下,典型的切向张力-位移关系如图 4 所示,切向张力随界面切向相对位移的增加趋于一稳定值,这一稳定值即为界面间的摩擦力。界面切向张力可分解为粘结力和摩擦力两部分:

$$T_\tau = T_\tau^{\text{bond}} + T_\tau^f \quad \Delta_n < \bar{\Delta}_n \quad (23)$$

粘结力 T_τ^{bond} 即为式(14)在 $\Delta_n = \bar{\Delta}_n$ 处的值:

$$T_\tau^{\text{bond}} = -G_f^I \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \quad (24)$$

摩擦力 T_τ^f 满足:

$$T_\tau \leq T_{\tau, \text{crit}}^f \quad (25)$$

临界摩擦力 $T_{\tau, \text{crit}}^f$ 与界面压力及加载历史有关,在不考虑卸载的情况下有

$$T_{\tau, \text{crit}}^f = -\mu T_n \quad \Delta_n < \bar{\Delta}_n, \Delta_\tau \in [0, +\infty) \quad (26)$$

其中: μ 是界面间的摩擦系数; φ 是仅与 Δ_τ 有关的单增函数,并且满足

$$\varphi(\Delta_\tau) |_{\Delta_\tau=0} = 0 \quad \lim_{\Delta_\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\Delta_\tau) = 1 \quad (27)$$

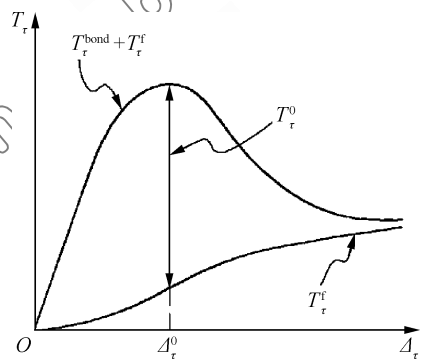


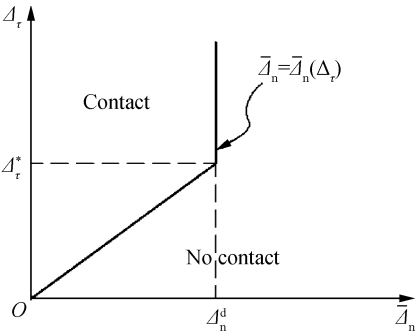
图 4 界面受压区切向张力-位移关系

Fig. 4 Tangential traction-separation law in zones with interfacial pressure

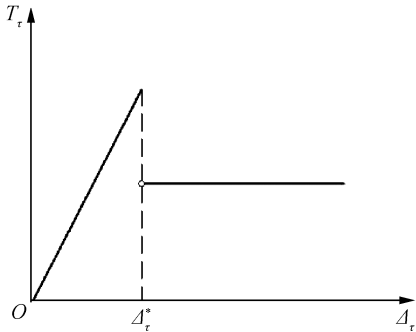
1.4 对 Sørensen 模型的讨论

由式(14)可以看出, $T_\tau(\Delta_n, \Delta_\tau)$ 的连续性依赖于 $\varphi(\Delta_\tau)$ 的一阶导数的连续性。Sørensen 选用的剪胀函数为如图 5(a)所示的双折线形式,并假定

T_n 和 T_τ 可通过对某一势函数求导得到 ($\beta = 1$)，由于剪胀函数在两折线的转折点处一阶导数不连续，故所得切向张力-位移关系不连续。图 5(b) 为 Sørensen 模型所给出的 $T_\tau(\bar{\Delta}_n, \Delta_\tau)$ 曲线，可以看出， $T_\tau(\Delta_n, \Delta_\tau)$ 不满足一致关联准则的要求。



(a) Shear dilation function for Sørensen model



(b) Tangential traction-separation law of Sørensen model

图 5 Sørensen 模型剪胀函数及切向张力-位移关系

Fig. 5 Shear dilation function and tangential traction-separation law of Sørensen model

2 张力-位移关系的有限元实现

2.1 界面受拉区刚度矩阵

对于三维模型， T_τ 和 Δ_τ 需向 s 、 t 方向分解为 T_s 、 Δ_s 及 T_t 、 Δ_t 。由 $\Delta_\tau = \sqrt{\Delta_s^2 + \Delta_t^2}$ 可得

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \Delta_s} = \frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} \quad \frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \Delta_t} = \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \quad (28)$$

由于粘结性能在 s 、 t 平面内是各向同性的，故 T_τ 可以分解为

$$T_s = \frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} T_\tau \quad T_t = \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} T_\tau \quad (29)$$

界面刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{sn} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{tn} & K_{ts} & K_{tt} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$K_{nn} = \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} \quad (31)$$

$$K_{ns} = \frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} \cdot \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} \quad (32)$$

$$K_{nt} = \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \cdot \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} \quad (33)$$

$$K_{sn} = \frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} \cdot \frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_n} \quad (34)$$

$$K_{ss} = \frac{T_\tau}{\Delta_\tau} \cdot \left(\frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} \right)^2 \cdot \frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_\tau} \quad (35)$$

$$K_{st} = K_{ts} = \frac{\Delta_s \Delta_t}{(\Delta_\tau)^2} \cdot \left(\frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_\tau} - \frac{T_\tau}{\Delta_\tau} \right) \quad (36)$$

$$K_{tn} = \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \cdot \frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_n} \quad (37)$$

$$K_{tt} = \frac{T_\tau}{\Delta_\tau} \cdot \left(\frac{\Delta_s}{\Delta_\tau} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \right)^2 \cdot \frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_\tau} \quad (38)$$

由式(8)和式(3)可得

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} = \varphi \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \quad (39)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} = \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} [f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi \Delta_n^d \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n}] \quad (40)$$

由式(30)、式(12) 及式(14)可得

$$\frac{\partial T_s}{\partial \Delta_n} = \beta \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \left[f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi \Delta_n^d \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \right] \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\tau}{\partial \Delta_\tau} = & \beta \left\{ \frac{d^2 \varphi}{d\Delta_\tau^2} [F(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi \Delta_n^d f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)] \right. \\ & \left. + \left(\frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \right)^2 \Delta_n^d \left[2f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) + \varphi \Delta_n^d \frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} \right] \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

2.2 界面受压区刚度矩阵

如前所述，界面受压时切向张力可分解为粘结力和摩擦力两部分，对于法向张力及切向张力之中的粘结力部分，可得与式(29)~(38)类似的结果，仅需将其中的 T_τ 换为 T_τ^{bond} 即可。由式(22)和式(24)可得

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} = \frac{T_n^0}{\Delta_n^0} \quad (43)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_\tau} = \frac{T_n^0 \Delta_n^d}{\Delta_n^0} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \quad (44)$$

$$\frac{\partial T_\tau^{\text{bond}}}{\partial \Delta_n} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial T_\tau^{\text{bond}}}{\partial \Delta_\tau} = -G_{II}^n \frac{d^2 \varphi}{d\Delta_\tau^2} \quad (46)$$

式(30)中与 T_s 和 T_t 有关分量尚应计入 T_τ^f 的影响，经典的库仑摩擦理论认为在 T_τ^f 达到 $T_{\tau, \text{crit}}^f$ 之前，界面间没有相对滑动。为了避免数值计算上

的困难, 一种常用的处理方法是人为地规定一个较小的数值 Δ_{crit} 。当界面相对滑动量小于 Δ_{crit} 时, 界面上的摩擦力是“弹性”的, 其值与界面相对滑动量成正比; 当界面相对滑动量大于等于 Δ_{crit} 时, 界面上的摩擦力与 $T_{\tau, \text{crit}}^f$ 相等。在某一特定的位移增量步中, 界面的初始“弹性”位移记为 Δ_s^{el} 、 Δ_t^{el} , 当前计算步 s 和 t 方向的位移增量分别为 Δ_s^+ 和 Δ_t^+ , 此增量步中对摩擦力产生影响的界面相对切向位移记为

$$\Delta_{\tau}^f = \sqrt{(\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+)^2 + (\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+)^2} \quad (47)$$

如果 $\Delta_{\tau}^f < \Delta_{\text{crit}}$, 则界面处于“弹性”状态:

$$T_s^f = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\text{crit}}} T_{\tau, \text{crit}}^f \quad T_t^f = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\text{crit}}} T_{\tau, \text{crit}}^f \quad (48)$$

对于一个特定的增量步, Δ_s^{el} 和 Δ_t^{el} 为已知的量, 从而

$$\frac{d\Delta_s^+}{d\Delta_s} = 1 \quad \frac{d\Delta_s^+}{d\Delta_n} = \frac{d\Delta_s^+}{d\Delta_{\tau}^f} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d\Delta_t^+}{d\Delta_t} = 1 \quad \frac{d\Delta_t^+}{d\Delta_n} = \frac{d\Delta_t^+}{d\Delta_s^+} = 0 \quad (50)$$

由式(28)及式(48)~(50)可得

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_n} = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_n} \quad (51)$$

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_s} = \frac{T_{\tau, \text{crit}}^f}{\Delta_{\text{crit}}} + \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (52)$$

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_t} = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\Delta_t}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (53)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_n} = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_n} \quad (54)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_s} = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (55)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_t} = \frac{T_{\tau, \text{crit}}^f}{\Delta_{\text{crit}}} + \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\text{crit}}} \cdot \frac{\Delta_t}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (56)$$

若 $\Delta_{\tau}^f \geq \Delta_{\text{crit}}$, 则界面上的摩擦力达到 $T_{\tau, \text{crit}}^f$, 界面间开始产生“塑性”滑动, 摩擦力在 s 和 t 方向的分量为

$$T_s^f = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} T_{\tau, \text{crit}}^f \quad T_t^f = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} T_{\tau, \text{crit}}^f \quad (57)$$

同前所述, 对于一个特定的增量步, Δ_s^{el} 和 Δ_t^{el} 为已知的量, 由式(47)、式(49)及式(50)可得

$$\frac{\partial \Delta_{\tau}^f}{\partial \Delta_n} = 0 \quad \frac{\partial \Delta_{\tau}^f}{\partial \Delta_s} = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} \quad \frac{\partial \Delta_{\tau}^f}{\partial \Delta_t} = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} \quad (58)$$

由式(57)并结合式(49)、式(50)、式(58)可得

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_n} = \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_n} \quad (59)$$

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_s} = \frac{T_{\tau, \text{crit}}^f}{\Delta_{\tau}^f} \left[1 - \left(\frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (60)$$

$$\frac{\partial T_s^f}{\partial \Delta_t} = - \frac{(\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+)(\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+) T_{\tau, \text{crit}}^f}{(\Delta_{\tau}^f)^3} + \frac{\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\Delta_t}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (61)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_n} = \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_n} \quad (62)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_s} = - \frac{(\Delta_s^{\text{el}} + \Delta_s^+)(\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+) T_{\tau, \text{crit}}^f}{(\Delta_{\tau}^f)^3} + \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (63)$$

$$\frac{\partial T_t^f}{\partial \Delta_t} = \frac{T_{\tau, \text{crit}}^f}{\Delta_{\tau}^f} \left[1 - \left(\frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} \right)^2 \right] + \frac{\Delta_t^{\text{el}} + \Delta_t^+}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\Delta_t}{\Delta_{\tau}^f} \cdot \frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} \quad (64)$$

在式(51)~(56)及式(59)~(64)中, 由式(26)得

$$\frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_n} = - \mu \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} \quad (65)$$

$$\frac{\partial T_{\tau, \text{crit}}^f}{\partial \Delta_{\tau}^f} = - \mu \left\{ \psi \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_{\tau}^f} + T_n \frac{d\psi}{d\Delta_{\tau}^f} \right\} \quad (66)$$

以上两式中 T_n 、 $\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n}$ 和 $\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_{\tau}^f}$ 分别由式(22)、式(43)和式(44)确定。

3 两种常用的张力-位移关系

3.1 剪胀函数的选择

式(1)和式(2)虽然并未规定 $\varphi(\Delta_{\tau})$ 的具体形式, 但它的选择将影响 $T_{\tau}(\Delta_n, \Delta_{\tau})$ 的形状, 一个实用的要求是, $d\varphi/d\Delta_{\tau}$ 应具有与图 3(a)相似的图像。考虑以下两个 $\varphi(\Delta_{\tau})$ 形式及其一阶导数(见图 6):

$$\varphi_1(\Delta_{\tau}) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0} \right)^2} \quad (67)$$

$$-\frac{d\varphi_1}{d\Delta_{\tau}} = \frac{1}{\Delta_{\tau}^0} \cdot \frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0} \cdot \varphi_1(\Delta_{\tau}) \quad (68)$$

$$\varphi_2(\Delta_{\tau}) = \left[\frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0} + 1 \right] \cdot e^{-\frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0}} \quad (69)$$

$$-\frac{d\varphi_2}{d\Delta_{\tau}} = \frac{1}{\Delta_{\tau}^0} \cdot \frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0} \cdot e^{-\frac{\Delta_{\tau}}{\Delta_{\tau}^0}} \quad (70)$$

从图 6 可以看出, $\varphi_1(\Delta_{\tau})$ 及其导数比 $\varphi_2(\Delta_{\tau})$ 及其导数具有更快的衰减速度, 且两个函数在 $\Delta_{\tau}/\Delta_{\tau}^0 = 1$ 时衰减速度最大, 此点对应于切向张力的峰值点。可选择 $\varphi_1(\Delta_{\tau})$ 和 $\varphi_2(\Delta_{\tau})$ 的线性组合:

$$\varphi(\Delta_{\tau}) = k\varphi_1(\Delta_{\tau}) + (1-k)\varphi_2(\Delta_{\tau}) \quad (71)$$

$$\frac{d\varphi}{d\Delta_{\tau}} = k \frac{d\varphi_1}{d\Delta_{\tau}} + (1-k) \frac{d\varphi_2}{d\Delta_{\tau}} \quad (72)$$

其中, $k \in [0, 1]$ 。

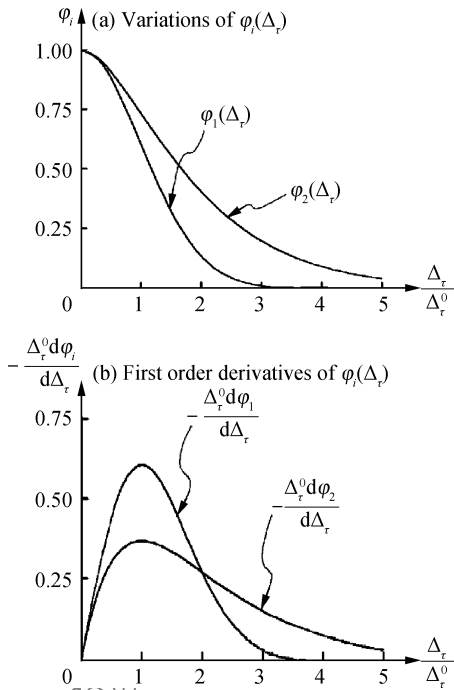


图 6 $\varphi_i(\Delta_r)$ 及其一阶导数
Fig. 6 $\varphi_i(\Delta_r)$ and its first order derivatives

下文将以式(67)~(72)为基础展开, 需要指出, 这种选择并不排除其他合适的 $\varphi(\Delta_r)$ 形式。在选定了 $\varphi(\Delta_r)$ 之后, 可由式(1)求得剪胀函数 $\bar{\Delta}_n(\Delta_r)$ 。根据式(42)编写有限元程序, 尚需求得

$$\frac{d^2 \varphi}{d\Delta_r^2} = k \frac{d^2 \varphi_1}{d\Delta_r^2} + (1 - k) \frac{d^2 \varphi_2}{d\Delta_r^2} \quad (73)$$

其中:

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d\Delta_r^2} = \left[\frac{1}{\Delta_r^0} \right]^2 \cdot \left[\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0} \right)^2 - 1 \right] \cdot \varphi_1(\Delta_r) \quad (74)$$

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\Delta_r^2} = \left[\frac{1}{\Delta_r^0} \right]^2 \cdot \left[\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0} - 1 \right] \cdot e^{-\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0}} \quad (75)$$

3.2 临界摩擦力的确定

由式(26)可知, 确定临界摩擦力的关键在于确定函数 $\psi(\Delta_r)$, 它反映了摩擦作用对切向张力的作用程度, 与界面的破损程度相关联, 可选择如下的函数形式:

$$\psi = 1 - e^{\frac{1-p}{p} \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0} \right)^p} \quad p > 1 \quad (76)$$

上式使 ψ 在 $\Delta_r/\Delta_r^0 = 1$ 时具有最快的增长速度, 如前所述, 此时切向张力位于其峰值点处。

$$\frac{d\psi}{d\Delta_r} = \frac{p-1}{\Delta_r^0} \cdot \left[\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0} \right]^{p-1} \cdot e^{\frac{1-p}{p} \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_r^0} \right)^p} \quad (77)$$

将式(76)代入式(26)、式(65)和式(66)即可得到 $T_{r, \text{crit}}$ 及摩擦力对界面刚度矩阵中相关分量的贡

献值。

3.3 分段线性法向张力-位移关系

分段线性模型是应用最广泛的张力-位移关系形式之一, 在 Sørensen 等^[26] 和 Chen 等^[27] 的研究中均采用这种形式。将法向张力-位移关系表示为式(78) (如图 7 所示)。

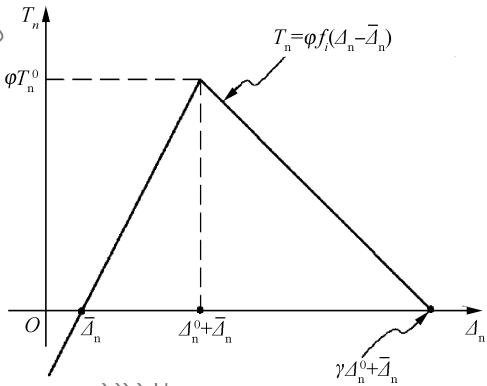


图 7 分段线性法向张力-位移关系
Fig. 7 Multilinear normal traction-separation law

$$\begin{cases} f_1(\Delta_n - \bar{\Delta}_n), & \Delta_n < \bar{\Delta}_n \\ \varphi f_1(\Delta_n - \bar{\Delta}_n), & \bar{\Delta}_n \leq \Delta_n < \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \\ \varphi f_2(\Delta_n - \bar{\Delta}_n), & \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \leq \Delta_n < \gamma \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \\ \varphi f_3(\Delta_n - \bar{\Delta}_n), & \Delta_n \geq \gamma \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \end{cases} \quad (78)$$

其中:

$$f_1(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) = \frac{T_n^0}{\Delta_n^0} \cdot (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) \quad (79)$$

$$f_2(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) = \frac{T_n^0}{(\gamma - 1)\Delta_n^0} \cdot (\gamma \Delta_n^0 - \Delta_n + \bar{\Delta}_n) \quad (80)$$

$$f_3(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) = 0 \quad (81)$$

式(79)、式(80)和式(81)对应的原函数分别为

$$F_1 = \frac{T_n^0}{2\Delta_n^0} \cdot (\Delta_n - \bar{\Delta}_n)^2 + C_1 \quad (82)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{T_n^0}{(\gamma - 1)\Delta_n^0} \cdot \left[\gamma \Delta_n^0 (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\Delta_n - \bar{\Delta}_n)^2 \right] + C_2 \end{aligned} \quad (83)$$

$$F_3 = C_3 \quad (84)$$

由式(6)计算 I 型断裂能为

$$G_I^I = \int_0^{+\infty} T_n(\Delta_n, 0) d\Delta_n = \frac{\gamma}{2} T_n^0 \Delta_n^0 \quad (85)$$

由式(19)和式(82)得 $F_1|_{\Delta_n=\bar{\Delta}_n} = F_1(0) = -G_I^I$, 从而

$$C_1 = -G_I^I = -\frac{\gamma}{2} T_n^0 \Delta_n^0 \tag{86}$$

由 F_1 、 F_2 和 F_3 在 $\Delta_n = \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n$ 及 $\Delta_n = \gamma \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n$ 处的连续性可得

$$C_2 = -\frac{\gamma^2}{2(\gamma-1)} T_n^0 \Delta_n^0 \tag{87}$$

$$C_3 = 0 \tag{88}$$

将式(72) 及式(79)~(88)代入式(14)得

$$T_\tau = \frac{\beta T_n^0}{2 \Delta_n^0} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \cdot [(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)^2 + 2\varphi \Delta_n^d (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) - \gamma(\Delta_n^0)^2], \bar{\Delta}_n \leq \Delta_n < \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \tag{89}$$

$$T_\tau = \frac{\beta T_n^0}{2(\gamma-1)\Delta_n^0} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \cdot [2\gamma \Delta_n^0 (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) - (\Delta_n - \bar{\Delta}_n)^2 - (\gamma \Delta_n^0)^2 + 2\varphi \Delta_n^d (\gamma \Delta_n^0 - \Delta_n + \bar{\Delta}_n)], \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \leq \Delta_n < \gamma \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \tag{90}$$

$$T_\tau = 0, \Delta_n \geq \gamma \Delta_n^0 + \bar{\Delta}_n \tag{91}$$

将 $\Delta_n = \bar{\Delta}_n$ 代入式(89), 并由式(23)计算界面摩擦力的影响, 得到粘结界面受压时的切向张力为

$$T_\tau = -\frac{\beta T_n^0 \Delta_n^0}{2} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} + T_\tau^f, \Delta_n < \bar{\Delta}_n \tag{92}$$

记 $T_\tau^0 = T_\tau(\bar{\Delta}_n(\Delta_\tau^0), \Delta_\tau^0)$, 由式(24)得

$$G_I^{II} = \frac{e T_\tau^0 \Delta_\tau^0}{k(\sqrt{e}-1)+1} \tag{93}$$

3.4 指数形式法向张力-位移关系

指数型张力-位移关系是另一种广泛应用的形式, Xu 等^[16] 和 Bosch 等^[17] 的研究中都采用了指数型张力-位移关系。将法向张力-位移关系表示为

$$T_n = \begin{cases} T_n^0 \cdot (\Delta_n - \bar{\Delta}_n) & \Delta_n < \bar{\Delta}_n \\ \varphi f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) & \Delta_n \geq \bar{\Delta}_n \end{cases} \tag{94}$$

其中,

$$f(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) = T_n^0 \left[a \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)^2 + b \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right) \right] \cdot e^{-m \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)} \tag{95}$$

由上式可得

$$\frac{df(\Delta_n - \bar{\Delta}_n)}{d\Delta_n} = -\frac{T_n^0}{\Delta_n^0} \left[ma \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)^2 - (2a - mb) \cdot \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right) - b \right] \cdot e^{-m \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)} \tag{96}$$

由上式可得 $f'(0) = b \frac{T_n^0}{\Delta_n^0}$, 一般的经验表明, 张力-位移关系的初始刚度应大于从原点到其峰值点的割线刚度, 即 $b > 1$ 。

在界面无切向位移时, 由 $f(\Delta_n^0) = T_n^0$ 可得 $m = \ln(a+b)$ (97)

又由 $f'(\Delta_n^0) = 0$ 可得

$$m = \frac{2a+b}{a+b} \tag{98}$$

联立式(97)和式(98)可得 a 、 b 需满足:

$$2a+b = (a+b)\ln(a+b) \tag{99}$$

若 $b > e$, 求得 $a < 0$, 则由式(95)确定的法向张力产生负值, 显然与真实的物理事实不符, 故 b 的取值范围应限定为 $1 < b \leq e$ 。给定了 b 的取值, 由式(99)即可确定对应的 a 的大小, 再由式(97)或式(98)得到 m 值。

式(95)的原函数为

$$F(\Delta_n - \bar{\Delta}_n) = -\frac{T_n^0 \Delta_n^0}{m^2} \left[m^2 a \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)^2 + m(2a + mb) \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right) + 2a + mb \right] \cdot e^{-m \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)} + C \tag{100}$$

由式(6)计算 I 型断裂能为

$$G_I^I = \int_0^{+\infty} T_n(\Delta_n, 0) d\Delta_n = \frac{2a+mb}{m^3} \cdot T_n^0 \Delta_n^0 \tag{101}$$

由式(19)和式(100)得 $F|_{\Delta_n=\bar{\Delta}_n} = F(0) = -G_I^I$, 从而

$$C = 0 \tag{102}$$

将式(95)和式(100)代入式(14)得

$$T_\tau = -\frac{\beta T_n^0 \Delta_n^0}{m^3} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} \left\{ m^2 a \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)^2 + m(2a + mb) \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right) + 2a + mb - m^3 \varphi \frac{\Delta_n^d}{\Delta_n^0} \right. \\ \left. \cdot \left[a \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)^2 + b \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right) \right] \right\} \cdot e^{-m \left(\frac{\Delta_n - \bar{\Delta}_n}{\Delta_n^0} \right)}, \Delta_n \geq \bar{\Delta}_n \tag{103}$$

将 $\Delta_n = \bar{\Delta}_n$ 代入式(103), 并由(23)式计算界面摩擦力的影响, 得到粘结界面受压时的切向张力为

$$T_\tau = -\frac{\beta T_n^0 \Delta_n^0 (2a+mb)}{m^3} \cdot \frac{d\varphi}{d\Delta_\tau} + T_\tau^f, \Delta_n < \bar{\Delta}_n \tag{104}$$

II 型断裂能计算式同式(93)。

4 工程应用

4.1 MMB(Mixed Mode Bending)试验模拟

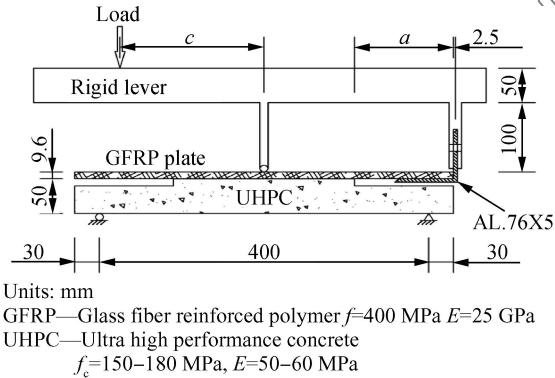
Chen 等^[27] 利用图 8(a)所示装置对玻璃纤维增强聚合物(GFRP)与超高性能混凝土(UHPC)粘结

界面的复合模式开裂进行了 MMB 试验，试件宽度为 130 mm，图中标注数字均以毫米为单位。根据试验结果的分析，Chen^[27] 给出 $G_I^I = 0.30 \text{ kJ/m}^2$ 、 $G_{II}^{II} = 0.90 \text{ kJ/m}^2$ 、 $T_n^0 = 2 \text{ MPa}$ 、 $T_r^0 = 6 \text{ MPa}$ ，Chen^[27] 的计算中采用 $\gamma = 5$ 的多线性模型。取 $\Delta_d^d = 0.03 \text{ mm}$ ，此值相当于两种材料间过渡层厚度的一半。利用本文给出的两种张力-位移关系，编写 ABAQUS 用户子程序 UINTER，对 Chen^[27] 的试验进行数值模拟，GFRP 和 UHPC 材料均采用线弹性模型，粘结界面计算参数如表 1 所示。所有的单元类型都采用六面体线性减缩积分单元。为消除“沙漏”问题的影响，GFRP 板沿厚度划分六个单元，UHPC 板沿厚度划分七个单元。在预期会产生界面开裂的区域细划网格，沿裂纹扩展方向上，GFRP 与 UHPC 所用的单元尺寸分别为 2 mm 和 3 mm。对试验的模拟采用隐式分析过程、非对称直接线性求解器、完全牛顿迭代法。图 8(b) 为有限元模型及 $a=100 \text{ mm}$ 、 $c=250 \text{ mm}$ 、加载点竖向位移为 15 mm 时两种材料界面的剥离情况。将部分试验数据、本文模型有限元分析数据以及 Chen

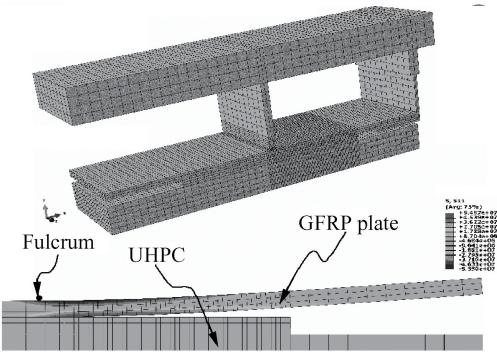
等^[27] 利用双线性张力-位移关系对试验进行的三维有限元分析数据绘入图 8(c) 和图 8(d)，对比可知，用本文模型计算所得数据与 Chen 等^[27] 用有限元分析所得的数据基本相当，大体上反映了试验数据的大小及变化趋势。

4.2 钢板拉拔试验模拟

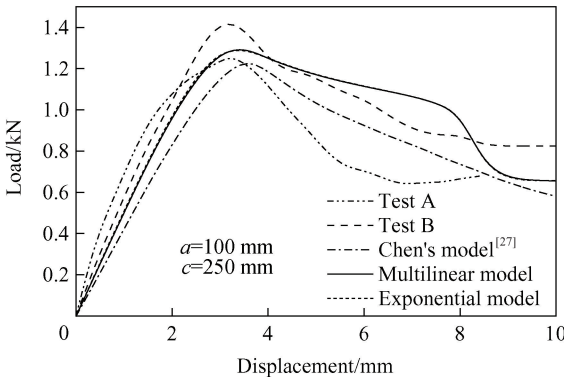
李红等^[28] 通过对浇筑于混凝土内的钢板进行拉拔试验研究型钢与混凝土之间的粘结性能，在钢板拔出过程中，粘结面间的法向相对位移受到约束，界面上由于剪胀效应产生压力和摩擦力。试件尺寸如图 9(a) 所示，混凝土立方体抗压强度 $f_{cu} = 24.47 \text{ MPa}$ ，钢板尺寸 $50 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$ ，箍筋 $\Phi 6 @ 50$ ，上部钢筋 $2\Phi 6$ ，下部钢筋 $2\Phi 10$ 。钢板和钢筋采用线弹性材料；混凝土块下部 110 mm 高度范围内材料采用损伤塑性模型，按照田连波等^[31] 给出的方法计算混凝土的损伤因子；混凝土块上部 150 mm 高度范围内材料采用线弹性模型；粘结界面计算参数如表 1 所示。钢筋与混凝土采用分离式建模，将钢筋单元内嵌 (Embedded 方法) 于混凝土单元内。钢板和混凝土的单元类型都采用六面体线性减缩积



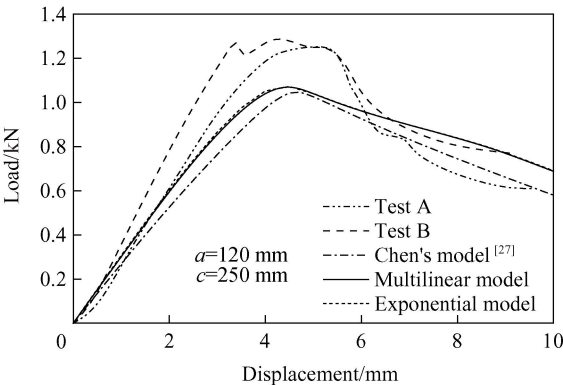
(a) MMB test configuration



(b) Finite element model of MMB tests



(c) Data of specimen S-a100-c250



(d) Data of specimen S-a120-c250

图 8 GFRP 与 UHPC 粘结界面的 MMB(Mixed Mode Bending) 试验模拟

Fig. 8 Simulation of MMB (Mixed Mode Bending) tests on the interface between GFRP and UHPC

分单元, 钢筋采用桁架单元。钢板锚固于混凝土内的部分网格细化, 沿钢板厚度、宽度及长度方向的单元尺寸分别为 2 mm、3 mm 和 4 mm, 与钢板粘结的混凝土单元沿上述方向的尺寸分别为 4 mm、4 mm、16 mm。对试验的模拟采用隐式分析过程、非对称直接线性求解器和完全牛顿迭代法。拉拔力与混凝土端面位置的相对滑移值如图 9(b) 所示, 通过与试验数据对比, 发现本文给出的两种张力-位

移关系计算所得曲线的初始刚度和峰值拉力与试验值接近, 过峰值点后计算所得曲线回落较快, 计算得到的残余拉拔力接近于试验值。图 9(c) 为滑移量为 1.25 mm 时试件水平截面上钢板与混凝土内竖直方向应力云图, 界面膨胀使钢板内产生均匀的压力, 混凝土边缘产生拉力与之平衡, 若混凝土保护层厚度较小, 此拉力值可导致混凝土产生劈裂破坏。

表 1 GFRP-UHPC 界面和钢板-混凝土界面模拟参数

Table 1 Simulation parameters for GFRP-UHPC interface and steel-concrete interface

		μ	$\Delta_{crit} / \text{mm}$	Δ_n^d / mm	Δ_n^0 / mm	Δ_r^0 / mm	T_n^0 / MPa	T_r^0 / MPa	k	p	γ	b
Multilinear model	MMB test	0.60	0.002	0.030	0.060	0.080	2.00	6.00	0.685	1.575	5.0	—
	Pull-out test	0.60	0.002	0.040	0.031	0.550	0.97	1.63	0.000	1.575	5.0	—
Exponential model	MMB test	0.60	0.002	0.030	0.072	0.080	2.00	6.00	0.685	1.575	—	1.5
	Pull-out test	0.60	0.002	0.040	0.037	0.550	0.97	1.63	0.000	1.575	—	1.5

Notes: μ —Interfacial friction coefficient; Δ_{crit} —Arbitrarily specified finite quantity which defines the initiation of interface slip; Δ_n^d —Upper limit of shear dilation; Δ_n^0 —Separation at peak in mode I fracture; Δ_r^0 —Separation at peak in mode II fracture; T_n^0 —Peak traction in mode I fracture; T_r^0 —Peak traction in mode II fracture; k —Combination coefficient of shear dilation; p —Exponent specifies evolution of friction effect; γ —Multiplier of peak separation where traction vanishes in mode I fracture; b —Initial slope of mode I traction-separation curve.

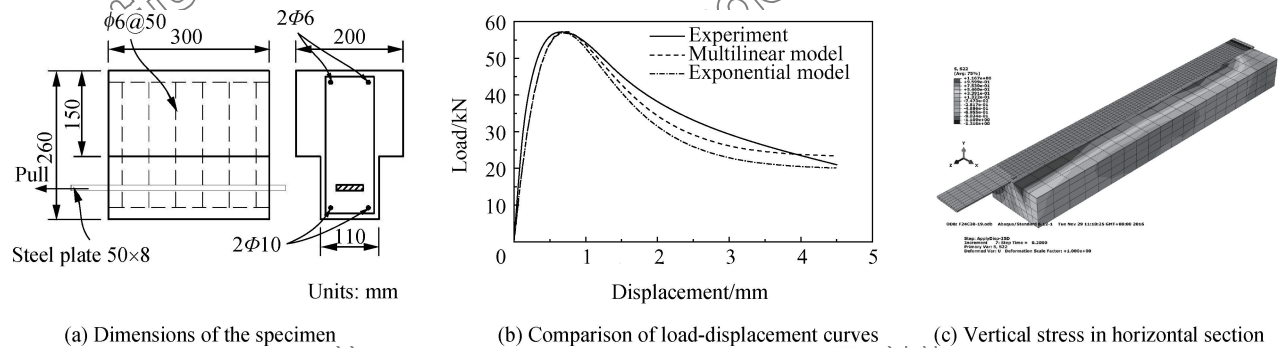


图 9 钢板拉拔试验模拟

Fig. 9 Simulation of steel plate pull-out test

4.3 对两个算例的讨论

正如文献[12]所指出, 张力峰值和张力-位移曲线下方的面积是最重要的两个参数, 对比图 8(c)、图 8(d)以及图 9(b)中由多线性模型及指数模型计算得到的曲线, 二者相差很小。对于开裂界面法向不受约束的情况, Δ_n^d 的取值偏差对分析结果影响有限, 可以取界面过渡层厚度的一半; 而对于开裂界面法向有约束的情况, Δ_n^d 的大小必须结合界面法向刚度确定。图 9(a) 的钢板包裹于混凝土中, 界面的剪胀使界面始终处于受压状态, 界面上压力的大小与法向刚度 T_n^0/Δ_n^0 以及最大剪胀量 Δ_n^d 有关。由于界面受压时法向刚度的差异, 图 9(b) 中两种模型所得曲线的后半段产生了一些差别。对于具体的工程问题, 如果界面法向不受约束, 可采用文

献[27]给出的试验和分析方法获取有限元计算所需的数据; 如果界面法向受到约束, 可借助楔入劈拉试验和反分析方法获得 T_n^0 和 Δ_n^0 , 再由类似于文献[28]的拉拔或推出试验获得 T_r^0 、 Δ_r^0 及 Δ_n^d 。在对钢板拉拔试验的计算中发现, T_r^0 主要决定拉力的最大值, Δ_r^0 主要决定拉力最大值对应的滑移值, $(T_n^0/\Delta_n^0)\Delta_n^d$ 主要决定残余拉力值的大小。

5 结 论

(1) 给出一种含剪胀效应张力-位移关系的构造方法, 在界面受拉区域内, 该方法通过给定的剪胀函数和法向张力-位移关系导出切向张力-位移关系, 所得张力-位移关系满足一致关联准则; 在界面受压区域内, 将切向张力分解为粘结力和摩擦力两

部分, 摩擦力的大小与法向压力和粘结界面破坏程度相关。

(2) 根据该构造方法的结论, 解释了 Sørensen 模型中切向张力-位移关系不连续的原因, 并指出 Sørensen 模型不满足一致关联准则。

(3) 将切向张力沿切平面内任意两个相互正交的方向分解, 给出界面刚度矩阵的计算方法。

(4) 选取一种特定形式的剪胀函数, 将界面法向张力-位移关系假定为最常用的分段线性形式和指数形式, 分别求得对应的切向张力-位移关系, 所得张力-位移关系可用于模拟异种材料界面的复合模式(Mixed Mode)开裂问题。与 Sørensen 模型相比, 界面张力是界面相对位移的连续函数, 便于进行数值计算。

(5) 编写 ABAQUS 用户子程序 UINTER, 给出本文所得张力-位移关系在 MMB(Mixed Mode Bending)试验及钢板拉拔试验中的应用例子, 有限元计算结果与试验数据吻合较好。

参考文献:

- [1] BARENBLATT G I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks[J]. *Journal of Applied Mathematics & Mechanics*, 1959, 23(3): 622-636.
- [2] DUGDALE D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1960, 8(2): 100-104.
- [3] HILLERBORG A, MODÉER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. *Cement and Concrete Research*, 1976, 6(6): 773-781.
- [4] 卢子兴. 复合材料界面的内聚力模型及其应用[J]. *固体力学学报*, 2015, 36(S1): 85-94.
LU Zixing. A simple review for cohesive zone models of composite interface and their applications [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, 36(S1): 85-94 (in Chinese).
- [5] XU Qiang, LU Zixing. An elastic-plastic cohesive zone model for metal-ceramic interfaces at finite deformations[J]. *International Journal of Plasticity*, 2013, 41(2): 147-164.
- [6] LU Zixing, XU Qiang. Cohesive zone modeling for viscoplastic behavior at finite deformations[J]. *Composites Science and Technology*, 2013, 74(4): 173-178.
- [7] LU Zixing, WANG Chengyu, XIA Biao, et al. Effect of interfacial properties on the uniaxial tensile behavior of three-dimensional braided composites[J]. *Computational Materials Science*, 2013, 79(436): 547-557.
- [8] 于飞, 陈向明, 张阿盈, 等. 一种改进的内聚力损伤模型在复合材料层合板低速冲击损伤模拟中的应用[J]. *复合材料学报*, 2015, 32(6): 1745-1753.
YU Fei, CHEN Xiangming, ZHANG Aying, et al. Application of modified cohesive zone damage model in damage simulation of composite laminates subject to low-velocity impact [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, 32(6): 1745-1753 (in Chinese).
- [9] 吴业飞, 陈伟球. 基于内聚力模型的 FRP-混凝土粘结强度分析[J]. *工程力学*, 2010, 27(7): 113-119.
WU Yefei, CHEN Weiqiu. Cohesive zone model based analysis of bond strength between FRP and concrete[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(7): 113-119 (in Chinese).
- [10] 卿龙邦, 李庆斌, 管俊峰, 等. 基于虚拟裂缝模型的混凝土断裂过程区研究[J]. *工程力学*, 2012, 29(9): 112-116, 132.
QING Longbang, LI Qingbin, GUAN Junfeng, et al. Study of concrete fracture process zone based on fictitious crack model[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(9): 112-116, 132 (in Chinese).
- [11] YANG Q D, THOULESS M. Mixed-mode fracture analyses of plastically-deforming adhesive joints [J]. *International Journal of Fracture*, 2001, 110(2): 175-187.
- [12] TVERGAARD V, HUTCHINSON J W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1992, 40(6): 1377-1397.
- [13] TVERGAARD V, HUTCHINSON J W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1993, 41(6): 1119-1135.
- [14] SUO Z, BAO G, FAN B. Delamination R-curve phenomena due to damage [J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1992, 40(1): 1-16.
- [15] CAMANHO P P, DÁVILA C G, MOURA D M F. Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials [J]. *Journal of Composite Materials*, 2003, 37(16): 1415-1438.
- [16] XU X P, NEEDLEMAN A. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix[J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1993, 1(2): 111.
- [17] BOSCH M J V D, SCHREURS P J G, GEERS M G D. An improved description of the exponential Xu and Needleman cohesive zone law for mixed-mode decohesion[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(9): 1220-1234.
- [18] XU X P, NEEDLEMAN A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1994, 42(9): 1397-1434.
- [19] 何铭华, 辛克贵. 粘聚律的分离功分析以及一种一致关联粘聚律[J]. *应用数学和力学*, 2011, 32(11): 1342-1351.
HE Minghua, XIN Kegui. Separation work analysis of cohe-

- sive law and consistently coupled cohesive law[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 32(11): 1342-1351 (in Chinese).
- [20] PARK K, PAULINO G H, ROESLER J R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2009, 57(6): 891-908.
- [21] ČERVENKA J, KISHEN J M C, SAOUMA V E. Mixed mode fracture of cementitious bimaterial interfaces. Part II: Numerical simulation[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 60(1): 95-107.
- [22] MCGARRY J P, MÁIRTÍN É Ó, PARRY G, et al. Potential-based and non-potential-based cohesive zone formulations under mixed-mode separation and over-closure. Part I: Theoretical analysis[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2014, 63(1): 336-362.
- [23] LEFFLER K, ALFREDSSON K S, STIGH U. Shear behavior of adhesive layers[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2007, 44(2): 530-545.
- [24] HÖGBERG J L, SØRENSEN B F, STIGH U. Constitutive behaviour of mixed mode loaded adhesive layer [J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2007, 44(25): 8335-8354.
- [25] SØRENSEN B F, GOUTIANOS S, JACOBSEN T R. Strength scaling of adhesive joints in polymer-matrix composites[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2009, 46(3): 741-761.
- [26] SØRENSEN B F, GOUTIANOS S. Mixed mode cohesive law with interface dilatation [J]. *Mechanics of Materials*, 2014, 70(1): 76-93.
- [27] CHEN D, ELHACHA R. Cohesive fracture study of a bonded coarse silica sand aggregate bond interface subjected to mixed-mode bending conditions[J]. *Polymers*, 2014, 6(6): 12-38.
- [28] 李红, 安建利, 姜维山. 型钢与混凝土粘结性能的试验研究[J]. *哈尔滨建筑工程学院学报*, 1993, 1993(S1): 84-93.
- LI Hong, AN Jianli, JIANG Weishan. An experimental investigation on bond behavior between steel and concrete[J]. *Journal of Harbin University of Civil Engineering and Architecture*, 1993, 1993(S1): 84-93 (in Chinese).
- [29] LEE Y K, JOO Y T, LEE T, et al. Mechanical properties of constitutive parameters in steel-concrete interface [J]. *Engineering Structures*, 2011, 33(4): 1277-1290.
- [30] 王斌. 型钢高强高性能混凝土构件及其框架结构的地震损伤研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2010.
- WAN Bin. Research on seismic damage of steel reinforced high strength and high performance concrete members and frame structures[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2010 (in Chinese).
- [31] 田连波, 侯建国. ABAQUS中混凝土塑性损伤因子的合理取值研究[J]. *湖北大学学报(自然科学版)*, 2015, 37(4): 340-345, 358.
- TIAN Lianbo, HOU Jianguo. Reasonable plastic damaged factor of concrete damaged plastic model of ABAQUS [J]. *Journal of Hubei University (Natural Science)*, 2015, 37(4): 340-345, 358 (in Chinese).