

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20161028.001

基于弹性-黏弹性对应原理的复合材料层合板 模态阻尼预测:理论及其有限元实现

刘彦清, 肖毅*, 张振, 何意

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海, 200092)

摘要: 提出一种利用通用有限元软件求解复合材料结构模态阻尼的有限元方法。该方法基于扩展弹性-黏弹性对应原理, 定义出具有频率依存性的黏弹性复合材料复刚度矩阵, 并借助ABAQUS提供的二次开发接口UMAT将其编入求解器中, 结合复特征值法求解任意铺层层合板的模态阻尼。与已有的理论方法相比, 本模型的计算结果更为接近实验数据。从而验证了本文提出的数值分析方法的有效性和精确性, 为利用ABAQUS软件分析各向异性材料阻尼提供了一条有效途径。

关键词: 复合材料层合板; 阻尼比; 有限元分析; 对应原理; 频率依赖性; ABAQUS

中图分类号: TB330.1 文献标志码: A 文章编号: 1000-3851(2017)07-1478-11

Modal damping prediction of laminated composites using elastic-viscoelastic correspondence principle: Theory and finite element implementation

LIU Yanqing, XIAO Yi*, ZHANG Zhen, HE Yi

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A finite element method for the modal damping analysis of composite structures by using a general purpose finite element software was proposed. The method was based on an extended elastic-viscoelastic correspondence principle, which accounted the frequency dependence of viscoelastic complex stiffness matrices. The implementation of the proposed model was described as a UMAT subroutine for ABAQUS/Standard. Subsequently, the analyses of modal damping and frequency response for laminated composites were implemented by using the complex eigenvalue method. As compared with existing approaches, the computed results from this model are more close to the test data. Thus the proposed numerical method is quite efficient and accurate, and capable of providing an effective way to determine the modal damping of anisotropic materials by using ABAQUS code.

Keywords: laminated composites; damping ratio; finite element analysis; correspondence principle; frequency dependence; ABAQUS

随着先进复合材料在新型或现代飞行器制造中的广泛应用, 结构模态分析的重要性也越来越受到重视。复合材料结构模态分析, 即以模态频率、模态阻尼和模态振型为基础的模态参数研究已在结构性能表征、动态设计以及损伤诊断和状态监测等方面中发挥着重要作用^[1-5]。当今有限元方法与应用的发展为工程界开展动态响应分析提供了一条极为

有效的途径。因此, 针对复合材料振动阻尼分析问题, 借助于通用有限元软件平台, 建立一种通用性强、功能完善以及求解便捷的数值方法是满足工程计算的迫切需求。

目前, 研究者们普遍使用复刚度法和应变能法来分析复合材料阻尼性能^[6]。前者主要是利用对应性原理, 并结合有效模量的概念表征纤维增强复合

收稿日期: 2016-07-31; 录用日期: 2016-10-19; 网络出版时间: 2016-10-28 11:44

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.tb.20161028.1144.002.html

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金(0220219105)

通讯作者: 肖毅, 教授, 博士生导师, 研究方向为结构健康监测、复合材料力学和结构强度分析与设计 E-mail: y_xiao@tongji.edu.cn

引用格式: 刘彦清, 肖毅, 张振, 等. 基于弹性-黏弹性对应原理的复合材料层合板模态阻尼预测:理论及其有限元实现[J]. 复合材料学报, 2017, 34(7): 1478-1488.

LIU Y Q, XIAO Y, ZHANG Z, et al. Modal damping prediction of laminated composites using elastic-viscoelastic correspondence principle: Theory and finite element implementation[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(7): 1478-1488 (in Chinese).

材料的阻尼^[7-8]。后者将材料与结构的总阻尼与每一个单元的耗散能量以及储存在该单元中的总应变能分数结合起来进行阻尼表征^[9]。一般而言黏弹性纤维复合材料的模量和损耗因子是依赖于频率变化的, 计算阻尼响应时必须考虑材料的频率依赖性^[10-11]。如果这些分析方法能够导入到现有通用有限元软件中, 则可免去大部分具有共性的工作, 达到事半功倍的效果。近年来人们早已认知其功效, 尝试利用通用有限元软件实现复合材料阻尼分析。如: Riccardo 等^[12]通过动态力学分析仪获取复合材料各方向的损耗因子, 之后运用应变能法并结合等效瑞利阻尼, 在 ABAQUS 软件中实现了复合材料飞机加筋板受脉冲激励后振动响应的仿真。梁森等^[13]运用 ANASY 软件, 基于模态应变能法对含黏弹性层纤维复合材料夹层结构的模态阻尼特性进行了分析, 并研究了模态参数随阻尼层厚度、数量、位置和分布的变化关系。罗忠等^[14]同样采用模态应变能法, 借助 ABAQUS 软件计算了复合材料层合梁的阻尼性能。关永军等^[15]为了考虑层合板厚度方向应力对阻尼的影响, 建立了复合材料结构模态阻尼的三维有限元预测方法。牛义等^[16]采用应变能法, 利用 MATLAB 软件计算了纤维增强复合薄板的阻尼。但这些研究对适用于广泛结构的通用性上仍带有很大的局限性。

本文旨在运用扩展弹性-黏弹性对应原理并借助 ABAQUS 提供的二次开发接口 UMAT, 定义出三维频域黏弹性复合材料的复刚度矩阵, 实现对任意铺层层合板模态参数的数值仿真。通过与前人研究结果的对比, 验证笔者所提出的数值方法的可行性与实用性。

1 理论方法

1.1 无阻尼振动系统

本文由广义位移理论^[17]导出的广义位移场表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, y, z; t) = u(x, y; t) + p(z) \frac{\partial w(x, y; t)}{\partial x} \\ \quad + q(z) \varphi(x, y; t) \\ \bar{v}(x, y, z; t) = v(x, y; t) + p(z) \frac{\partial w(x, y; t)}{\partial y} \\ \quad + q(z) \theta(x, y; t) \\ \bar{w}(x, y, z; t) = w(x, y; t) \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 表示任一时刻下层合板中任意一点

三个方向的位移, 该位移场中共有五个未知函数; u 、 v 和 w 代表板中面的位移分量; φ 和 θ 表示横向剪切效应对板中面的影响。 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是决定横向剪切应变和应力沿板厚方向分布情况的形函数。如令 $p(z) = -z$, $q(z) = 0$, 该理论可退化为经典层合板理论; 令 $p(z) = 0$, $q(z) = z$, 该理论可退化为一阶剪切变形理论^[18]; 同样给定 $p(z)$ 和 $q(z)$ 不同的函数形式, 可转化到相应的高阶剪切变形理论, 如 Reddy 三阶剪切变形理论^[19], 对应于 $p(z) = -4z^3/3h^2$, $q(z) = z - 4z^3/(3h^2)$ 。

根据几何关系, 由广义位移场推导出相应的应变场, 其中 ϵ_x 、 ϵ_y 表示法向应变, γ_{xy} 、 γ_{xz} 、 γ_{yz} 表示剪切应变:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial x} = \epsilon_x^0 + p\epsilon_x^1 + q\epsilon_x^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial y} = \epsilon_y^0 + p\epsilon_y^1 + q\epsilon_y^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial y} \\ &= \gamma_{xy}^0 + p\gamma_{xy}^1 + q\gamma_{xy}^2 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial z} \\ &= (1 + \frac{\partial p}{\partial z})\gamma_{xz}^0 + \frac{\partial q}{\partial z}\gamma_{xz}^1 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial z} \\ &= (1 + \frac{\partial p}{\partial z})\gamma_{yz}^0 + \frac{\partial q}{\partial z}\gamma_{yz}^1 \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_x^1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_x^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \epsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_y^1 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_y^2 = \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^1 = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xy}^2 = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^1 = \varphi, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^1 = \theta \end{aligned}$$

在正交各向异性材料中, 由 Hooke 定律可以给出材料主方向三维状态的应力-应变关系:

$$\begin{aligned} &\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}\}^T \\ &= [\mathbf{C}] \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\{\sigma\}$ 和 $\{\epsilon\}$ 是描述复合材料变形状态的主方向工程应力和应变, 前三项为法向应力(应变), 后三项为剪切应力(应变); $[\mathbf{C}]$ 是局部坐标系下的刚度矩阵, 可由该材料的工程常数求得。

任意方向的应力-应变关系为

$$\begin{aligned} & \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}^T \\ & = [\bar{C}] \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $[\bar{C}]$ 为整体坐标系下的刚度矩阵, 可通过刚度矩阵系数的坐标变换关系得到。

考虑层合板在自由振动下, 设板沿 x 、 y 和 z 三个方向的位移分别为 \bar{u} 、 \bar{v} 和 \bar{w} , 层合板受力如图 1 所示。 N_x 、 N_y 、 N_{xy} 为平面载荷, M_x^1 、 M_x^1 、 M_{xy}^1 、 M_x^2 、 M_y^2 和 M_{xy}^2 为弯矩, S_{xz}^1 、 S_{yz}^1 、 S_{xz}^2 和 S_{yz}^2 为剪力, I_i ($i = 1, \dots, 6$) 为相关转动惯量。基于 Hamilton 能量变分原理, 可得层合板的运动方程如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{x,x} + N_{xy,y} = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{w}_{,x} + I_3 \ddot{\varphi} \\ N_{y,y} + N_{xy,x} = I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{w}_{,y} + I_3 \ddot{\theta} \\ M_{x,xx}^1 + M_{y,yy}^1 + 2M_{xy,xy}^1 + S_{yz,y}^1 + S_{xz,x}^1 \\ = I_2 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y} + \ddot{w}_{,xx} + w) + I_3 \ddot{\varphi}_{,x} \\ + I_4 \ddot{\theta}_{,y} + I_6 \ddot{w}_{,yy} \\ M_{x,x}^2 + M_{xy,y}^2 + S_{xy}^2 = I_3 \ddot{u} + I_4 \ddot{w}_{,x} + I_5 \ddot{\varphi} \\ M_{y,y}^2 + M_{xy,x}^2 + S_{yz}^2 = I_3 \ddot{v} + I_4 \ddot{w}_{,y} + I_5 \ddot{\theta} \end{array} \right. \quad (5)$$

式中: , x 表示 $\frac{\partial}{\partial x}$, , y 表示 $\frac{\partial}{\partial y}$; “” 表示 $\frac{d^2}{dt^2}$; 推导过程及式中各参量表达式详见附录 I、II。

五个位移变量采用代数多项式的形式近似:

$$(u, v, w, \varphi, \theta) = \sum_{m=a} \sum_{n=b} (\alpha_{mn}^1, \alpha_{mn}^2, \alpha_{mn}^3, \alpha_{mn}^4, \alpha_{mn}^5) \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^a \left(1 - \frac{x}{L} \right)^c \left(\frac{y}{W} \right)^b \left(1 - \frac{y}{W} \right)^d e^{i\omega t} \quad (6)$$

式中: a, b, c, d 是与边界条件相关的系数; L 为板的长度; W 为板的宽度; α_{mn}^i ($i = 1, \dots, 5$) 为待定系数。

将式(6)代入式(5)中, 化简得到式(7), 写成代数特征值方程组的形式:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\varphi\} = \{0\} \quad (7)$$

$[\mathbf{K}]$ 为层合板总的刚度矩阵, ω 为特征值, $[\mathbf{M}]$ 为层合板总的质量矩阵, $\{\varphi\}$ 为待求位移向量。

目前, 求解特征值问题的方法主要分为两类, 一类是变换方法, 另一类是向量迭代法。变换方法

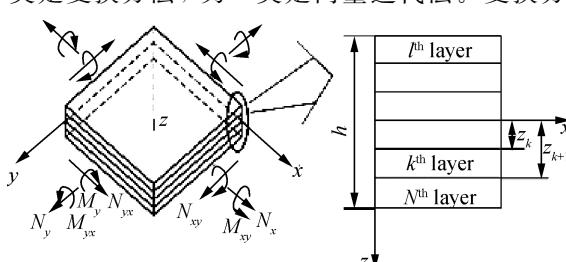


图 1 复合材料层合板和载荷坐标系

Fig. 1 Schematic of the laminated composite plates and loading coordinate systems

又称为直接求解法, 是直接对原矩阵进行一系列变换, 使它变成一个易于求解特征值的形式。而向量迭代法是通过一系列矩阵向量乘积, 进而求得特征值和特征向量, 并据此求出固有频率 ω_i 及相应的振型 $\{\varphi\}_i$ 。

1.2 黏弹性阻尼振动系统

弹性-黏弹性对应原理是黏弹性材料力学特性分析的基础^[20]。根据对应原理, 将静态的应力、应变以及弹性模量用相对应的动态应力、应变及复模量替换, 线性黏弹性问题便可采用线弹性的分析方法求解。

弹性范围内, 复合材料的力学性能可简单表示为

$$E = E(p_j) \quad (8)$$

式中: E 表示复合材料的某个弹性模量; p_j 表示复合材料 N 个子相的弹性模量。

Hashin^[21] 运用对应原理将黏弹性复合材料的性能表示为

$$E^* = E(p_j^*) \quad (9)$$

式中, p_j^* 为第 j 个子相材料的复模量, 可表示为

$$p_j^* = p'_j [1 + i\eta_j] \quad (10)$$

为了考虑黏弹性复合材料动态特性的频率依赖性, 将弹性黏弹性对应原理进行扩展, 并将复模量表示为频率的函数:

$$p_j^*(f) = p'_j(f) [1 + i\eta_j(f)] \quad (11)$$

式中: $p'_j(f)$ 为子相材料复模量的实数部分; $\eta_j(f)$ 为子相材料复模量的损耗因子。

因此, 复合材料的阻尼通过定义复刚度进行导入。复合材料工程常数用复模量的形式表示为

$$E_L^*(f) = E'_L(f)(1 + i\eta_L(f))$$

$$E_T^*(f) = E'_T(f)(1 + i\eta_T(f))$$

$$G_{LT}^*(f) = G'_{LT}(f)(1 + i\eta_{LT}(f)) \quad (12)$$

$$G_{TT}^*(f) = G'_{TT}(f)(1 + i\eta_{TT}(f))$$

式中: $E_L^*(f)$ 为复合材料纵向复模量; $E_T^*(f)$ 为横向复模量; $G_{LT}^*(f)$ 和 $G_{TT}^*(f)$ 分别为面内和面外剪切复模量。

复合材料的弹性本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (13)$$

应用对应原理得到复合材料黏弹性本构关系:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^* = \mathbf{C}_{ijkl}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* \quad (14)$$

其中: $\mathbf{C}_{ijkl}^* = \mathbf{C}_{ijkl}^{\text{Real}}(f) + i\mathbf{C}_{ijkl}^{\text{Imag}}(f)$

同样, 考虑了复合材料的阻尼后, 相关的刚度系数写成复数的形式, 即

$[Q^*]$ 、 $[\bar{Q}^*]$ 、 $[A^*]$ 、 $[B^{1*}]$ 、 $[B^{2*}]$ 、 $[D^{1*}]$ 、 $[D^{1*}]$ 和 $[E^*]$ (详见附录 II)。特征值方程中复刚度矩阵 $[K^*]$ 可写成:

$$[K^*] = [K_R] + i[K_I] \quad (15)$$

其中: $[K_R]$ 为复刚度矩阵的实数部分; $[K_I]$ 为复刚度矩阵的虚数部分。

此时, 求解特征值问题转化成求解复特征值的问题。即方程(8)转化为

$$([K^*] - (\omega^{*(r)})^2 [M]) \{\varphi^*\}^{(r)} = \{0\} \quad (16)$$

其中, $(\omega^{*(r)})^2$ 和 $\{\varphi^*\}^{(r)}$ 是第 r 阶复特征值和特征向量。即

$$\begin{aligned} \{\varphi^*\}^{(r)} &= \{\varphi_R\}^{(r)} + i\{\varphi_I\}^{(r)} \\ \omega^{*(r)} &= \omega^{(r)} \sqrt{1+i\eta^{(r)}} \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\eta^{(r)}$ 是第 r 阶模态的损耗因子。

泰勒级数展开得

$$\begin{aligned} \omega^* &= \\ \omega &\left[\left(1 + \frac{\eta^2}{8} - \frac{5\eta^4}{128} + \dots \right) + i \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\eta^3}{16} + \frac{7\eta^5}{256} - \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 有阻尼系统的固有频率 ω_D 定义为

$$\omega_D = \text{Re}(\omega^*) = \omega \left(1 + \frac{\eta^2}{8} - \frac{5\eta^4}{128} + \dots \right) \quad (19)$$

由式(19)得模态阻尼比

$$\eta_i = \text{Im}((\omega^*)^2) / \text{Re}(\omega^*)^2 \quad (20)$$

2 有限元分析

本文利用 ABAQUS 有限元软件计算复合材料层合板的阻尼性能, 以此为工程中快速准确地分析复杂结构问题提供理论和技术支持。由于 ABAQUS 软件的动力学分析模块中并不支持涉及各向异性黏弹性材料的直接定义接口, 不便于广大用户使用。因此, 本文提出借助 ABAQUS 提供的二次开发接口 UMAT, 引入考虑频率变化的黏弹性复合材料的复刚度矩阵, 以便最大程度地利用有限元软件对层合板动力学问题进行便捷求解。

2.1 材料阻尼导入

在 UMAT 中定义复雅各比矩阵 **DDSDDE** (NTENS, NTENS, 2), 其中复刚度矩阵中的实部和虚部分别定义为

$$\text{DDSDDE}(i, j, 1) = C'_{ij}(f) \quad (21)$$

$$\text{DDSDDE}(i, j, 2) = C''_{ij}(f)$$

从而实现了复合材料各向异性黏弹性阻尼的输入。

假设层合板划分成有限个单元, 则每个单元

中, 五个未知位移变量 (u, v, w, φ, θ) 可写成:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_i \\ \varphi &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i \end{aligned} \quad (22)$$

式中: n 为单元中的节点数; φ_i 是插值函数, 与有限元选用的单元类型有关, 即不同的单元类型对应着不同形式的待求位移场; $u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \theta_i$ 为各节点处的位移值。

将式(22)代入式(5), 获得离散的复特征值方程组:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K^*]\{u\} = \{F\} \quad (23)$$

式中, $\{F\}$ 指层合板所受外力。

有限元 ABAQUS 求解复特征值主要采用的是向量迭代法, 本文采用的是迭代法中的 Lanczos 求解法, 最终解得复合材料层合板的复特征值 ω^* , 根据式(19)和式(20)计算结构的模态频率和模态阻尼。

2.2 ABAQUS 分析的流程

图 2 为 ABAQUS 分析的流程, 主要步骤如下。

(1) 初始基频确定。运用 ABAQUS 中频率提

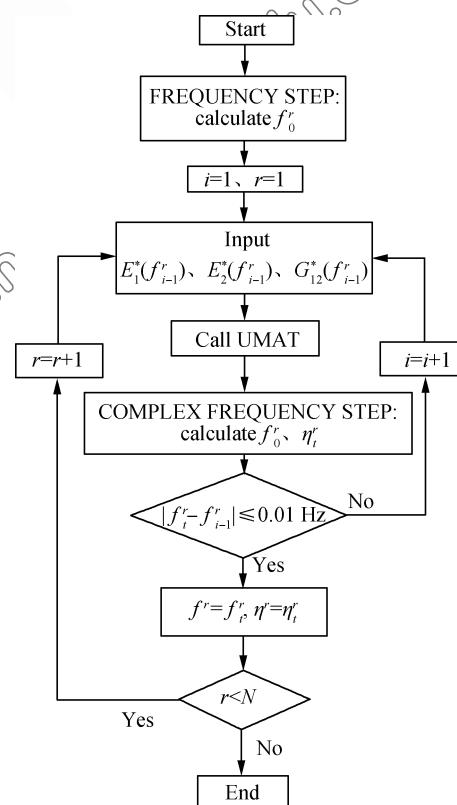


Fig. 2 Flow chart of numerical analysis

取分析步计算无阻尼层合板的前 N 阶固有频率 $f_0^r (r = 1, 2, \dots, N)$ 。

(2) 迭代求解第 r 阶模态阻尼 η^r 。(a) 有阻尼层合板的模态参数的求解: 输入频率 f_0^r 对应的基本复模量值, 调用由 UMAT 编写的三维黏弹性本构方程。运用 ABAQUS 中复频率提取分析步计算有阻尼层合板的前 N 阶固有频率 f_1^r 和模态阻尼 η_1^r 。(b) 逼近真实阻尼结果: 考虑阻尼的频率依赖性, 由 f_1^r 对应的基本复模量再次用复频率提取分析步计算前 N 阶固有频率 f_i^r 和模态阻尼 η_i^r , 这一过程需多次迭代 ($i = 2, 3, 4, \dots$)。

(3) 判断迭代停止的条件。前后两次固有频率计算结果偏差的绝对值小于 0.1 Hz 时, 停止迭代, 并将最后迭代结果 f_i^r 和 η_i^r 作为该层合板第 r 阶的固有频率和模态阻尼。

(4) 重复步骤(2)和(3), 直到获取所有 N 阶模态阻尼值, 分析结束。

3 算例验证

为了验证本文提出的数值方法及 UMAT 子程序的有效性, 对现有文献中的五个算例进行数值计算, 并与实验测试结果和其他理论计算结果进行对比。其中前三个算例的数据来自 Lin 等^[21] 和 Alam 等^[22] 的论文, 理论分析是基于 Hu^[23] 复特征值法 (VED 法) 和模态应变能法 (SDC 法) 的计算结果, 这三个算例均不考虑复合材料阻尼的频率依赖性, 各方向的损耗因子为定值。而后两个算例的数据来自 Crane^[11] 的论文, 考虑了复合材料阻尼的频率依赖性, 即各方向上的损耗因子为频率的函数。本文所选取的 5 个算例涉及单向板(含偏轴)、正交层合板、斜交层合板和准各向同性层合板等不同类型的常用层合板, 且考虑了材料阻尼的频率依赖性与否的情况。各算例间相互支持, 以表明本数值方法的有效性及广适性。表 1 和表 2 分别给出了算例中试件几何尺寸和材料参数。

表 1 复合材料层合板试件尺寸

Table 1 Specimen dimension of composite laminates

Case	Layer-up	Boundary condition	Geometrical configuration/mm
1 ^[21]	$[0^\circ]_8$	Free	$182.75 \times 182.75 \times 1.64$
2 ^[21]	$[0^\circ/90^\circ]_{2S}$	Free	$227 \times 227 \times 2.05$
3 ^[22]	$[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$	Simple support	$150 \times 37.5 \times 1$
4 ^[11]	$[\theta]_{16}$	Cantilever beam	$a \times 25.4 \times 5$
5 ^[11]	$[45^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$		

表 2 复合材料层合板的材料参数

Table 2 Material parameters of composite laminates

Case	Parameters								
	E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	G_{23}/GPa	ν_{12}	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\varphi_1/\%$	$\varphi_2/\%$	$\varphi_{12}, \varphi_{13}/\%$
1 ^[23]	42.64	12.5	5.71	2.855	0.3	1971.0	0.87	5.05	6.91
2 ^[23]	34.49	9.40	4.49	2.245	0.3	1813.0	0.87	4.75	6.13
3 ^[23]	211.0	5.3	2.60	1.30	0.25	1524.0	0.0	50.0	50.0
4 ^[11]	57.8	19.86	6.1	3.05	0.264	1700.0	$5.15 \times 10^{-5}f$	$8.37 \times 10^{-2}\ln(f)$	$25.5 \times 10^{-2}\ln(f)$
5 ^[11]							$+ 5.99 \times 10^{-1}$	$+ 4.07 \times 10^{-1}$	$- 50.37 \times 10^{-2}$

Notes: φ_1 — Longitudinal loss factor; φ_2 — Transverse loss factor; $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ — Shear direction loss factor; f — Frequency.

众所周知, 单元网格划分密度是衡量有限元分析结果精确与否的重要标准。为保证有限元解满足工程实际精度要求, 本文首先考察了网格密度与有限元求解精度的内在联系, 确定合适的网格密度及其计算效率。有限元分析中以自由约束下正方形 GFRP 单向层合板为例, 采用 C3D8 单元进行建模。为定量分析单元长宽比的影响, 在宽度方向网格数目一定的情况下(180 个网格), 改变长度方向网格数目, 共设计 9 个形式, 分别为 50×180 、 $100 \times$

180 、 130×180 、 150×180 、 170×180 、 180×180 、 190×180 、 200×180 、 230×180 , 其对应的长宽网格数目比 α 分别为: 0.28、0.56、0.72、0.83、0.94、1、1.06、1.11、1.28。图 3(a)和图 3(b)分别为复合材料层合板一阶固有频率以及一阶阻尼比的计算结果随网格疏密的变化情况。结果表明, 随着长度方向网格的加密, 计算结果逐渐趋于收敛, 考虑到计算的时间成本, 后续算例分析中选择单元长宽比为 1 的网格作为有限元建模标

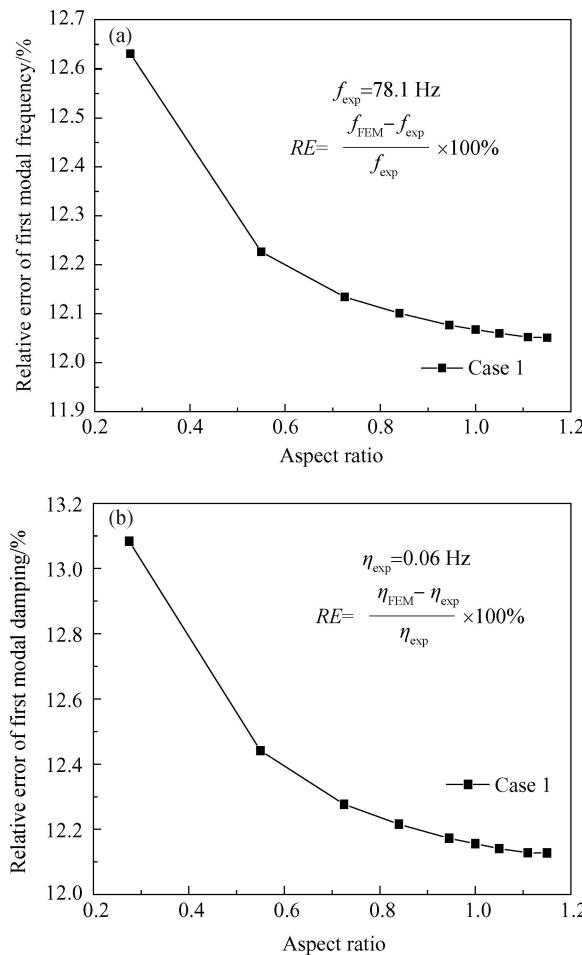


图 3 复合材料层合板模态参数的有限元计算精度与网格密度的关系

Fig. 3 Relationship between computational accuracy and grid density of modal parameters of composite laminates

准, 即网格数目为 180×180 。

图 4(a)为算例 1 中自由约束下正方形 GFRP 单向层合板, 铺层方式为 $[0]_8$, 前六阶模态阻尼与模态频率的关系。图中红色点为本文提出的 FE 分析结果, 蓝色和绿色点分别是 VED 法和 SDC 法的理论解, 黑色点是实验数据。有限元计算结果无论是在模态频率还是在模态阻尼方面, 均与两种理论解结果相吻合, 与实验数据较吻合。对于模态频率, 有限元前六阶的模态结果与试验结果的平均偏差为 3.83%, 最大发生在第一阶, 偏差为 12.4%; 其余各阶偏差均小于 5%; 对于模态阻尼, 有限元前六阶的模态结果与试验结果的平均偏差为 12.73%, 除第六阶(偏差为 27.5%), 其余各阶相对偏差均小于 15%。对于模态频率, 有限元与 VED 法和 SDC 法结果偏差均小于 3%; 对于模态阻尼, 除第四阶(偏差约 20%), 其余偏差均小于

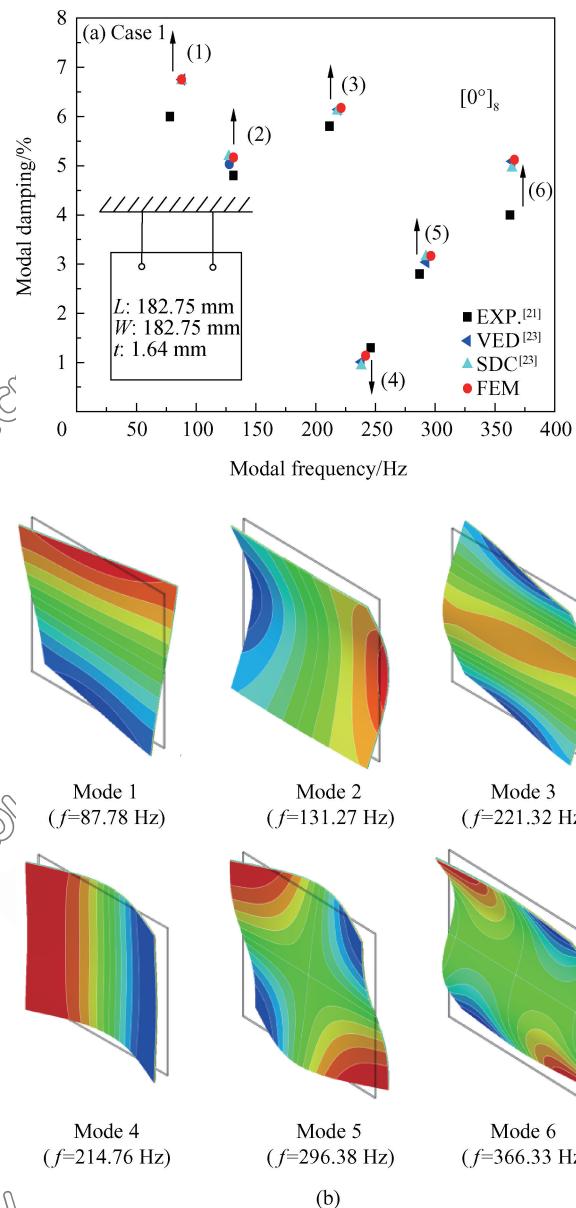


图 4 算例 1 中复合材料层合板的前六阶模态特性: 模态阻尼和模态频率以及振型

Fig. 4 First six-order modal properties of composite laminates for case 1: modal damping, modal frequency and mode shapes

4%。图 4(b)为有限元计算的前六阶振型(变形比例为 200 倍), 与文献中给出的振型结果一致, 而且发现含扭转成分较多的振型, 其对应的阻尼比往往较大, 如一阶和三阶模态。

图 5(a)为算例 2 中自由约束下正方形 GFRP 正交层合板, 铺层方式为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$, 前六阶模态阻尼与模态频率的关系。对于模态频率, 有限元法与 VED 法和 SDC 法的结果偏差均小于 2.8%。对于模态阻尼, 除第二阶和第三阶外, 其余偏差均小于 6%。第二阶偏差小于 20%, 第三阶小于 60%。与

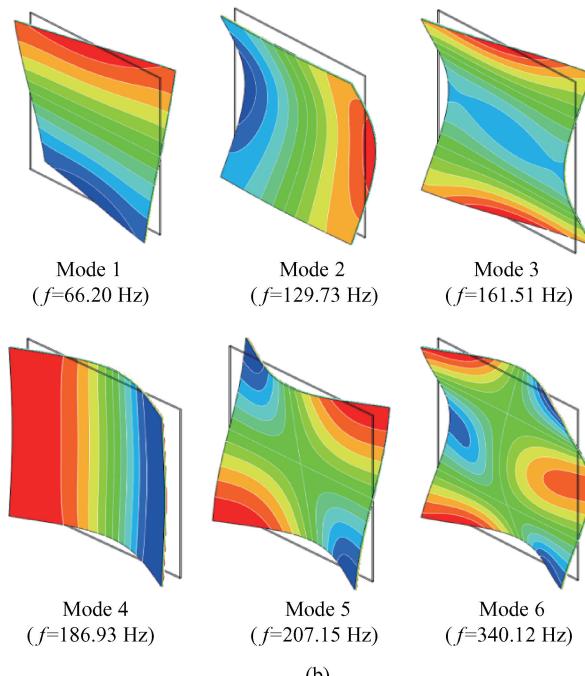
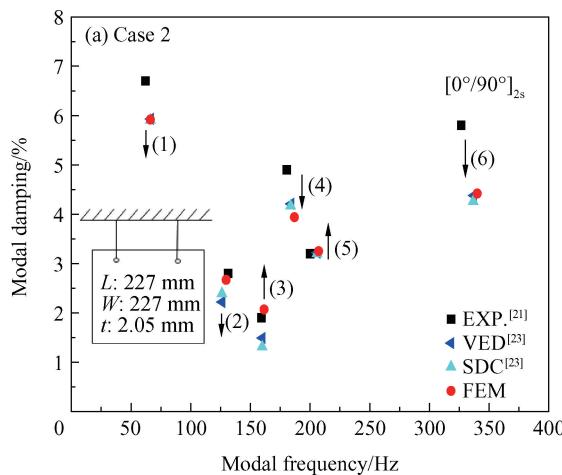


图 5 算例 2 复合材料层合板的前六阶模态特性: 模态阻尼与模态频率以及振型

Fig. 5 First six-order modal properties of composite laminates for case 2: modal damping, modal frequency and mode shapes

试验结果相比, 前六阶模态频率结果与实验值的平均偏差为 3.37%, 模态阻尼的平均偏差为 12.2%。模态频率的最大相对偏差发生在第一阶, 偏差值为 6.4%, 模态阻尼在第四阶和第六阶时偏差较大, 分别为 -20% 和 -24%。图 5(b)给出了有限元计算的前六阶的振型, 与文献中给出的振型结果一致, 与算例 1 的振型结果对比, 只有第六阶振型有所不同, 可见同样约束条件下, 铺层的改变对振型的影响往往首先发生在高阶模态上。

图 6(a)和图 6(b)给出了算例 3 中四边简支角

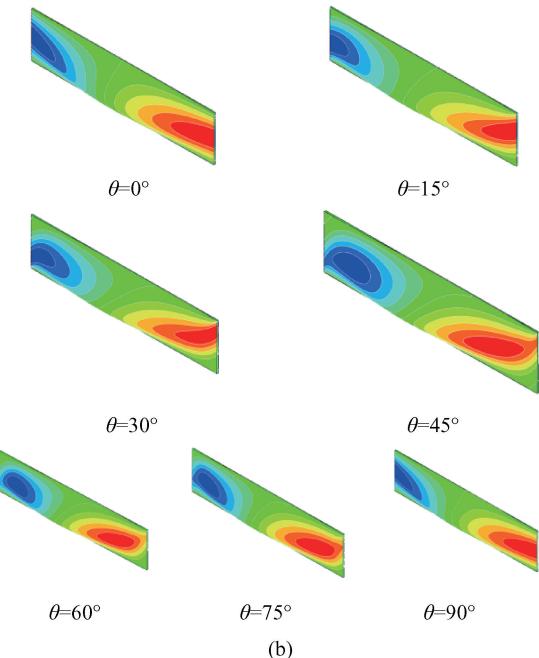
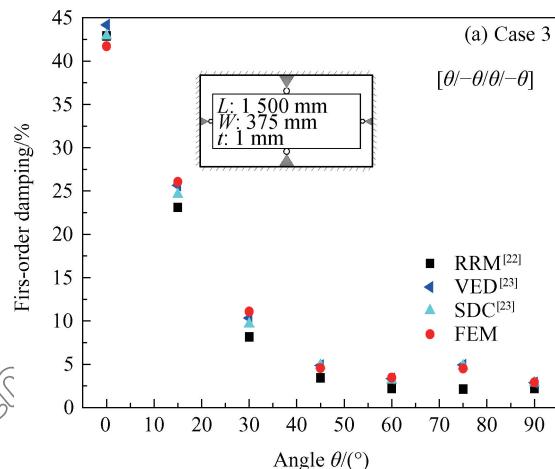


图 6 算例 3 中复合材料层合板的一阶模态特性: 模态阻尼与角度以及各角度下的一阶振型

Fig. 6 First order modal properties of composite laminates for case 3: modal damping, angle and first mode shapes of different angles

铺设层合板的一阶模态阻尼随铺设角的变化规律以及不同铺设角所对应的一阶振型结果。图中可见, 随着铺设角(角度间隔为 15°)的增大, 一阶模态阻尼减小; 且在铺设角为 15° 和 30° 时阻尼变化最大, 而其他角度间的阻尼变化不大, 主要是由于 0°~30° 内, 角度的改变对弯扭耦合的作用较大, 对阻尼比的影响也较大。图中同时给出了三种理论推导结果。有限元法与瑞利里兹法(RRM 法)相比, 偏差较大, 最大发生在 75° 时, 偏差达 120%, 而与 VED 法和 SDC 法两种理论的结果相比, 吻合较好, 最大

偏差发生在 30° , 为14%, 其余均小于8%。有限元法与瑞利里兹法的基础都是泛函变分, 瑞利里兹法将近似函数定义在整个定义域中, 试探函数越复杂、项数越高, 结果越精确, 本例中认为瑞利里兹法结果较精确, 但该法不太适用于复杂结构及工程应用, 与之相比, 有限元法精度既能达到要求又便于工程求解。

图7是算例4中在悬臂梁约束条件下, 偏轴单向板一阶模态阻尼随频率变化的结果。不同偏轴单向板的阻尼均呈现随频率的增加而增大的现象, 且在 $0\sim400$ Hz频率段, 阻尼变化幅度最明显, 大于400 Hz频率段时, 阻尼变化较平缓。可见考虑复合材料的频率依存关系非常重要, 尤其是分析低阶模态时显得更为必要。结果还表明一阶模态阻尼与频率的关系随着角度的增加, 基本呈现先增大后减小的趋势, 即偏角在 $0^\circ\sim45^\circ$ 区间内, 阻尼比越来越大, 而且变化幅度很大, 主要是弯扭耦合的影响; 偏角在 $45^\circ\sim90^\circ$ 区间内, 阻尼比变化幅度逐渐降低, 可归结于弯扭耦合效应的减弱的原因。有限元计算结果与Crane的预测结果相比较可见, 本结果从数值到变化规律均与Crane结果吻合良好。

图8(a)是算例5中准各向同性层合板一阶模态阻尼随频率变化的结果。结果表明, 层合板的一阶阻尼比随着频率增大而增大; 有限元预测结果与Crane采用的复刚度法相比, 偏差小于6.7%, 且更接近Crane提出的实验曲线。图8(b)给出了前四阶振型, 第一阶和第六阶是弯曲模态, 第二阶是面内弯曲模态, 第三阶是扭转模态。

纵观五个算例结果, 整体而言本有限元法与实

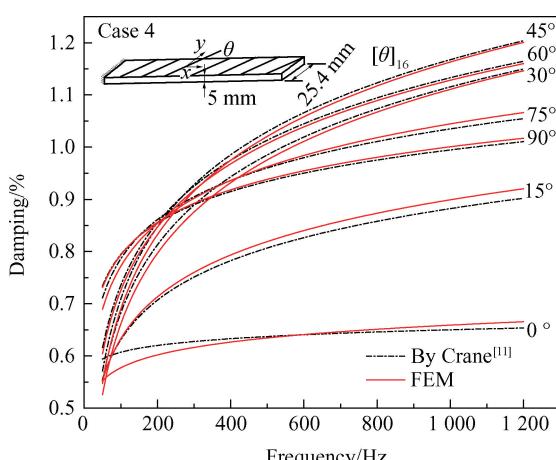


图7 算例4中复合材料层合板的阻尼频率关系曲线

Fig. 7 Curve of damping vs. frequency of composite laminates for case 4

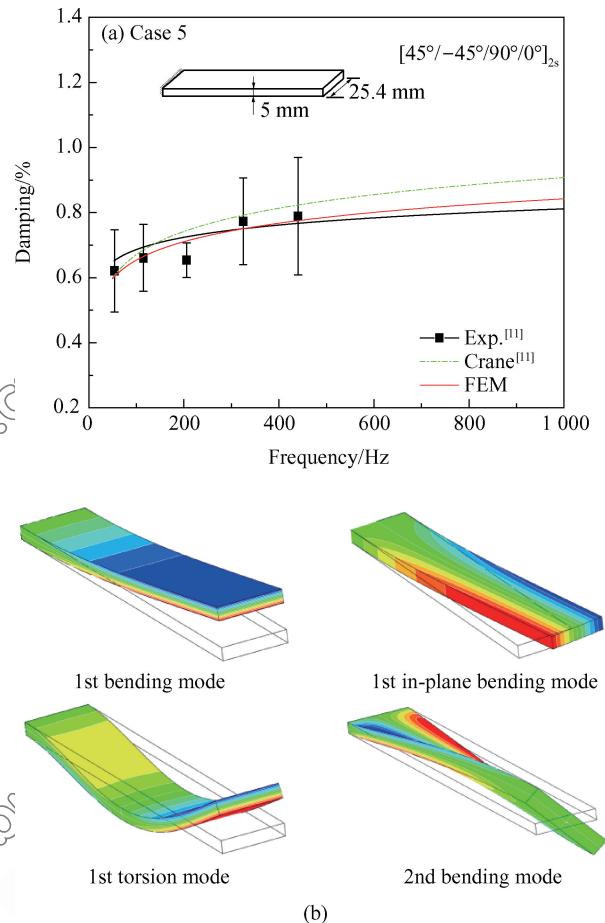


图8 算例5中复合材料层合板的模态特性: 一阶模态阻尼的频率依赖关系及前四阶振型

Fig. 8 Modal properties of composite laminates for case 5: frequency dependency of first modal damping and first four-order mode shapes

验结果吻合较好, 个别处存在明显偏差(如算例1和算例2中第一、第六阶模态频率及阻尼等), 但这些偏差对比其他理论分析也同样存在类似问题。一般而言, 有限元分析能否真实再现试验结果, 其好坏取决于构建本构模型和输入数据方面满足于试验条件的程度。一旦前者确立后, 后者输入数据的影响是关键。Lin等^[21]指出, 影响实验数据的因素可归结于以下方面。首先, 试件完整性方面, 试件在制备过程中不可避免地存在如厚度偏差、铺层角度偏差、纤维褶皱等缺陷。其次, 测试环境方面, 动态测试过程中除了试件自身黏弹性能量耗散外, 还存在如空气阻尼(尤其是在非真空操作下)、夹持端能量耗散等。这些因素将影响到材料参数(包括静态模量以及动态损耗因子)测试结果的准确性。导致有限元计算中输入数据与实际测试数据之间产生偏差, 影响到有限元计算结果的可靠性。另算例4

及算例 5 中, Crane 采用等效弯曲复刚度来计算层合板的阻尼。振动过程中, 虽然多数处于弯曲振动状态, 能量耗散也以弯曲耗能为主, 但仍有部分扭转及面内弯曲造成的能力耗散, 尤其是对于算例 4 中非对称层合板(15°偏轴板的偏差较大, 此时扭转成分较大)。而有限元法则综合考虑了各种能耗, 相比而言, 计算结果较准确。因此, 本文所提出的数值方法对层合板阻尼预测, 可以比拟于或更优于现有理论方法, 更具有工程应用的普遍意义。

4 结 论

(1) 利用用户材料子程序 UMAT 的开发, 成功地导入了考虑频率依赖性的各向异性黏弹性材料本构方程求解模块, 提高了通用有限元软件的求解功能。

(2) 通过对单向板、不同角度斜角板以及准各向同性复合材料层合板的阻尼分析, 系统验证了本算法的有效性和精确性。结果表明, 运用本数值方法与 VED 法和 SDC 法相比基本在 8% 以内, 相比复刚度阻尼法, 最大偏差小于 6.7%, 且本结果更接近于实验值。

(3) 应用本方法可以比拟于或更优于现有其他理论方法, 其求解效率和精度令人满意, 有望成为分析预测复合材料结构模态阻尼的实用数值工具, 指导工程实践。

附录 I :

运用 Hamilton 变分原理, 推导层合板的运动方程, 层合板中总的能量表示为

$$II = U - V - T \quad (I-1)$$

式中: U 为层合板中总的应变能; V 为外力所做的功; T 为层合板中总的动能; Hamilton 原理表示为对总能量的变分, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (I-2)$$

层合板自由振动中无外力做功, 则式(I-2)化简并合并相同积分项得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_V ((\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \\ & + \tau_{zx} \delta \gamma_{xz}) - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w)) dV] dt = 0 \end{aligned} \quad (I-3)$$

将式(I-2)和式(I-4)代入式(I-3)中, 得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_A ((\delta u N_{x,x} + \delta w M_{x,xx}^1 + \delta \varphi M_{x,x}^2 + \delta v N_{y,y} + \delta w M_{y,yy}^1 \\ & + \delta \vartheta M_{y,y}^2 + \delta v N_{xy,x} + \delta u N_{xy,y} + 2 \delta w M_{xy,xy}^1 + \delta \vartheta M_{xy,xy}^2 \\ & + \delta \varphi M_{xy,y}^2 + \delta w S_{yz,y}^1 + \delta \vartheta S_{yz}^2 + \delta w S_{xz,x}^1 + \delta \varphi S_{xz,x}^2) dA \\ & - \int_A \{\delta u (I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{w},_x + I_3 \ddot{\varphi}) + \delta v (I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{w},_y + I_3 \ddot{\theta}) + \\ & \delta w (I_2 (\ddot{u},_x + \ddot{v},_y + \ddot{w},_{xx} + w) + I_3 \ddot{\varphi},_x + I_4 \ddot{\theta},_y + I_6 \ddot{w},_{yy}) + \\ & \delta \varphi (I_3 \ddot{u} + I_4 \ddot{w},_x + I_5 \ddot{\varphi}) + \delta \vartheta (I_3 \ddot{v} + I_4 \ddot{w},_y + I_5 \ddot{\theta})\} dA] dt = 0 \end{aligned} \quad (I-4)$$

将 N 、 M 和 S 定义为

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^1, M_y^1, M_{xy}^1) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) p(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) p(z) dz \\ (M_x^2, M_y^2, M_{xy}^2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) q(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) q(z) dz \quad (I-5) \\ (S_{xz}^1, S_{yz}^1) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) (1 + \frac{\partial p(z)}{\partial z}) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) (1 + \frac{\partial p(z)}{\partial z}) dz \\ (S_{xz}^2, S_{yz}^2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{\partial q(z)}{\partial z} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{\partial q(z)}{\partial z} dz \\ I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 &= \\ & \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, p(z), q(z), p^2(z), p(z)q(z), q^2(z)) dz \quad (I-6) \end{aligned}$$

附录 II :

将式(I-4)代入式(I-5), 并沿板厚方向进行积分, 从而得到单位面积的内力和内力矩:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{M}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{B}^1 & \mathbf{D}^1 & \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{B}^2 & \mathbf{D}^2 & \mathbf{E} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 \\ \boldsymbol{\epsilon}^2 \end{Bmatrix} \quad (II-1)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{S}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}^1 \end{Bmatrix} \quad (II-2)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T, \mathbf{M}^1 = \{M_x^1 \ M_y^1 \ M_{xy}^1\}^T, \\
 \mathbf{M}^2 &= \{M_x^2 \ M_y^2 \ M_{xy}^2\}^T \\
 \boldsymbol{\epsilon}^0 &= \{\epsilon_x^0 \ \epsilon_y^0 \ \epsilon_{xy}^0\}^T, \boldsymbol{\epsilon}^1 = \{\epsilon_x^1 \ \epsilon_y^1 \ \epsilon_{xy}^1\}^T, \\
 \boldsymbol{\epsilon}^2 &= \{\epsilon_x^2 \ \epsilon_y^2 \ \epsilon_{xy}^2\}^T \\
 \mathbf{S}^1 &= \{S_{yz}^1 \ S_{xz}^1\}^T, \mathbf{S}^2 = \{S_{yz}^2 \ S_{xz}^2\}^T, \\
 \boldsymbol{\gamma}^0 &= \{\gamma_{yz}^0 \ \gamma_{xz}^0\}^T, \boldsymbol{\gamma}^1 = \{\gamma_{yz}^1 \ \gamma_{xz}^1\}^T \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{12}^1 & B_{16}^1 \\ B_{12}^1 & B_{22}^1 & B_{26}^1 \\ B_{16}^1 & B_{26}^1 & B_{66}^1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}^2 &= \begin{bmatrix} B_{11}^2 & B_{12}^2 & B_{16}^2 \\ B_{12}^2 & B_{22}^2 & B_{26}^2 \\ B_{16}^2 & B_{26}^2 & B_{66}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 & D_{16}^1 \\ D_{12}^1 & D_{22}^1 & D_{26}^1 \\ D_{16}^1 & D_{26}^1 & D_{66}^1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{D}^2 &= \begin{bmatrix} D_{11}^2 & D_{12}^2 & D_{16}^2 \\ D_{12}^2 & D_{22}^2 & D_{26}^2 \\ D_{16}^2 & D_{26}^2 & D_{66}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{II-3}$$

其中, 刚度系数定义为

$$(A_{ij}, B_{ij}^1, B_{ij}^2, D_{ij}^1, D_{ij}^2, E_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}(1, p(z), q(z), p^2(z), p(z)q(z), q^2(z)) dz \quad (i, j) = (1, 2, 6)$$

$$(F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij} \left[\left(1 + \frac{\partial p(z)}{\partial z} \right)^2, \frac{\partial q(z)}{\partial z} \cdot \left(1 + \frac{\partial p(z)}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial q(z)}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (i, j) = (4, 5)$$

合并式(I-4)中 δu 、 δv 、 δw 、 $\delta\varphi$ 、 $\delta\theta$ 的系数, 得到层合板的运动方程式(I-5)。

参考文献:

- [1] 张振, 肖毅, 刘彦清, 等. 基于振动疲劳试验的复合材料螺栓连接预紧力松弛特性[J]. 复合材料学报, 2016, 33(1): 163-173.
ZHANG Z, XIAO Y, LIU Y Q, et al. Preload relaxation characteristics in composite bolted joints based on vibration fatigue test[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2016, 33(1): 163-173 (in Chinese).
- [2] FLOR F R, MEDEIROS R, TITA V. Numerical and experimental damage identification in metal-composite bonded joint [J]. The Journal of Adhesion, 2015, 91(10-11): 863-882.
- [3] 庄小燕, 陈浩然. 基于频率和阻尼分析的含分层损伤复合材料层合板的损伤诊断[J]. 复合材料学报, 2005, 22(6): 150-155.
ZHUANG X Y, CHEN H R. Delamination detection by using frequency and damping analysis in conjunction with neural networks[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2005, 22(6): 150-155 (in Chinese).
- [4] YANG C, OYADIJI S O. Detection of delamination in composite beams using frequency deviations due to concentrated mass loading[J]. Composite Structures, 2016, 146: 1-13.
- [5] PEI X, CHEN L, LI J, et al. Effect of damage on the vibration modal of a novel three-dimensional and four-directional braided composite T-beam[J]. Composites Part B: Engineering, 2016, 86: 108-119.
- [6] TREVISIO A, GENECHTEN V B, MUNDO D, et al. Damping in composite materials: properties and models[J]. Composites Part B: Engineering, 2015, 78: 144-152.
- [7] HASHIN Z V I. Complex moduli of viscoelastic composites—I. General theory and application to particulate composites [J]. International Journal of Solids and Structures, 1970, 6(5): 539-552.
- [8] GIBSON R F, PLUNKETT R. Dynamic mechanical behavior of fiber-reinforced composites: Measurement and analysis [J]. Journal of Composite Materials, 1976, 10(4): 325-341.
- [9] ADAMS R D, BACON D G C. Measurement of the flexural damping capacity and dynamic Young's modulus of metals and reinforced plastics[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2002, 35(1): 27-41.
- [10] 杨云昭, 徐超, 吴妙章. 考虑粘弹性材料频变特性的复合结构频率响应分析[J]. 固体力学学报, 2015, 36(s1): 105-110.
YANG Y Z, XU C, WU M Z. Frequency response analysis of laminate structures with frequency-dependent viscoelastic layers[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2015, 36(s1): 105-110 (in Chinese).
- [11] CRANE R M, GILLESPIE J W. Analytical model for prediction of the damping loss factor of composite materials[J]. Polymer Composites, 1992, 13(3): 179-190.
- [12] VESCOVINI R, BISAGNI C. A procedure for the evaluation of damping effects in composite laminated structures[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2015, 78: 19-29.
- [13] 梁森, 李雪, 王东山, 等. 多层阻尼薄膜嵌入的共固化复合材料结构动力学性能[J]. 复合材料学报, 2015, 32(5): 1453-1460.
LIANG S, LI X, WANG D S, et al. Dynamics property of co-cured composite structure with multilayer damping membranes embedded [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2015, 32(5): 1453-1460 (in Chinese).
- [14] 罗忠, 杨坤, 梅志远. 纤维增强复合材料动力学固有特性及阻尼特性分析[J]. 材料导报, 2013, 27(S1): 126-129.
LUO Z, YANG K, MEI Z Y. The analysis of the dynamic natural characteristics and damping of the GFRP laminate composite[J]. Materials Review, 2013, 27(S1): 126-129 (in Chinese).

Chinese).

- [15] 关永军, 危银涛. 基于有效三维损耗矩阵的复合材料层合板模态阻尼预测[J]. 复合材料学报, 2008, 25(4): 174-180.
- GUAN Y J, WEI Y T. FRP laminates modal damping prediction based on 3-D effective damping matrix[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(4): 174-180 (in Chinese).
- [16] 牛义, 刘权利, 常永乐, 等. 基于 Ritz 法的纤维增强复合薄板阻尼分析与预测[J]. 中国工程机械学报, 2016, 14(2): 162-167.
- NIU Y, LIU Q L, CHANG Y L, et al. Damping analysis on fiber-reinforced composites thin plate based on Ritz method [J]. Chinese Journal of Construction Machinery, 2016, 14(2): 162-167 (in Chinese).
- [17] QU Y, LONG X, LI H, et al. A variational formulation for dynamic analysis of composite laminated beams based on a general higher-order shear deformation theory[J]. Composite Structures, 2013, 102: 175-192.
- [18] ALTENBACH H, EREMEYEV V A, NAUMENKO K. On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 95(10): 1004-1011.
- [19] JIN G, YANG C, LIU Z. Vibration and damping analysis of sandwich viscoelastic-core beam using Reddy's higher-order theory[J]. Composite Structures, 2016, 140: 390-409.
- [20] LAKES R S. Viscoelastic materials [M]. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [21] LIN D X, NI R G, ADAMS R D. Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fiber-reinforced plastics plates[J]. Journal of Composite Materials, 1984, 18(2): 132-152.
- [22] ALAM N, ASNANI N T. Vibration and damping analysis of fibre reinforced composite material plates[J]. Journal of Composite Materials, 1986, 20(1): 2-18.
- [23] HU B G, DOKAINISH M A. Damped vibrations of laminated composite plates—modeling and finite element analysis[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1993, 15 (2): 103-124.