

# 基于一种新修正偶应力理论的平面正交各向异性功能梯度梁静弯曲模型及尺度效应

贺丹\*, 杨子豪

(沈阳航空航天大学 辽宁省飞行器复合材料结构分析与仿真重点实验室, 沈阳 110136)

**摘要:** 基于一种新修正偶应力理论建立了微尺度平面正交各向异性功能梯度梁模型。模型中包含两个材料尺度参数, 因此能够分别描述在两个正交方向上由尺度效应带来的不同大小弯曲刚度增强。基于最小势能原理推导了平衡方程和边界条件, 并以自由端受集中载荷作用的悬臂梁为例给出了弯曲问题的解析解。该梁模型的控制方程以及解的形式和经典梁模型是一致的, 只是在刚度项中增加了一项和尺度效应有关的项。算例结果表明: 采用本文模型所预测的梁挠度总是小于经典理论的结果, 即捕捉到了尺度效应。尺度效应会随着梁几何尺寸的减小而增大, 并在梁的几何尺寸远大于尺度参数时逐渐消失。

**关键词:** 修正偶应力理论; 正交各向异性; 功能梯度材料; 尺度效应; 材料尺度参数

中图分类号: TB330.1, Q343.3 文献标志码: A 文章编号: 1000-3851(2017)04-0766-07

## Static bending model and size effect of plane orthotropic functionally graded beam based on a new modified couple stress theory

HE Dan\*, YANG Zihao

(Key Laboratory of Liaoning Province for Composite Structural Analysis of Aircraft and Simulation  
Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** Based on the new couple stress theory, a new model of plane orthotropic functionally graded beam model was proposed. The two material scale parameters included in the model enables present model to describe different bending stiffness enhancements in two orthogonal directions caused by scale effect. The equilibrium equations and related boundary conditions were derived using the principle of minimum potential energy. Analytical solution of bending problem was developed for a bending cantilever beam with concentrate force applied on the free end. The governing equations and solutions of present model have similar form with classical beam model, except one additional term related to scale effect in rigidity. Numerical results indicate that deflection of the beam predicted by present model is smaller than that of the classical one, which means the scale effect can be captured. The scale effect will increase with the decrease of the geometrical size of the beam, but diminish little by little when the geometrical size is much larger than the material scale parameter.

**Keywords:** modified couple stress theory; orthotropic; functionally graded material; scale effect; material scale parameter

近年来功能梯度材料(FGMs)<sup>[1]</sup>在微米、纳米量级的装置和系统上的应用, 如薄膜<sup>[2]</sup>、原子力显微镜<sup>[3]</sup>、微机电系统(MEMS)和纳机电系统(NEMS)<sup>[4]</sup>,

已经越来越多。诸多实验证实在微/纳米尺度上存在材料力学行为的尺度效应问题<sup>[5-6]</sup>。传统的连续介质力学不能解释尺度效应, 因此需要发展新的广

收稿日期: 2016-05-06; 录用日期: 2016-7-20; 网络出版时间: 2016-07-29 10:58

网络出版地址: [www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20160729.1058.004.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20160729.1058.004.html)

基金项目: 国家自然科学基金(11572204)

通讯作者: 贺丹, 博士, 副教授, 研究方向为微细观复合材料力学及结构优化 E-mail: Danhe@sau.edu.cn

引用格式: 贺丹, 杨子豪. 基于一种新修正偶应力理论的平面正交各向异性功能梯度梁静弯曲模型与尺度效应[J]. 复合材料学报, 2017, 34(4): 766-772.

HE D, YANG Z H. Static bending model and size effect of plane orthotropic functionally graded beam based on a new modified couple stress theory[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(4): 766-772 (in Chinese).

义连续介质力学理论, 并建立新的适用于微/纳米尺度的功能梯度梁/板力学模型。

广义连续介质力学理论主要包括应变梯度理论<sup>[7-8]</sup>和偶应力理论。与传统理论相比, 它们都在材料的本构关系中引入了新的用于解释尺度效应的材料尺度参数。不同的理论所需要引入材料尺度参数的个数不尽相同, 但这些参数都只能通过复杂的试验来进行测定, 因此包含更少尺度参数的理论在工程应用的便利上更具优势。Yang 等<sup>[9]</sup>提出了一种只含有一个材料尺度参数的对称偶应力理论(修正偶应力理论), 该理论被广泛用于建立微尺度下的梁/板模型。Park 和 Gao<sup>[10]</sup>基于该理论建立了能够描述尺度效应的梁弯曲模型, 所得到的挠度结果和试验结果吻合良好。Asghari 等<sup>[11-12]</sup>基于修正偶应力理论在弹性范围内对微尺度功能梯度梁进行了静力学分析和动力学分析。Ke 等<sup>[13]</sup>基于修正偶应力理论对微尺度功能梯度梁的动态稳定性进行了分析。Nateghi 等<sup>[14]</sup>在考虑剪切变形的基础上用不同梁理论对微尺度功能梯度梁进行了屈曲分析。Simsek 和 Reddy<sup>[15]</sup>在修正偶应力理论和高阶梁理论的基础上研究了功能梯度微尺度梁的弯曲和自由振动问题。

Yang 等<sup>[9]</sup>提出的修正偶应力理论仅适用于各向同性材料, 因此上述关于微尺度板/梁模型问题的研究工作所针对的也都是各向同性材料。为了能够建立微尺度下层合板/梁结构的力学模型, 陈万吉等<sup>[16]</sup>发展了一种适用于各向异性材料的新修正偶应力理论, 并基于该理论开展了一系列有关层合板/梁结构弯曲<sup>[17]</sup>、振动<sup>[18]</sup>和稳定<sup>[19]</sup>等问题的研究。

在宏观尺度下各向异性功能梯度材料力学行为的研究工作已经取得了很多成果, 本文则首次尝试建立微尺度下平面正交各向异性功能梯度梁的静力模型。该模型中含有两个材料尺度参数, 这使得该模型在捕捉到尺度效应的同时, 还能够分别描述在两个正交方向上由尺度效应带来的不同大小弯曲刚度增强。

## 1 功能梯度梁

采用一种典型的平面正交各向异性功能梯度梁, 该梁的材料组分沿高度方向梯度变化, 导致其力学属性(如弹性模量和剪切模量)在沿梁高度方向以一定的形式也发生变化。本文假设其材料属性沿高度方向遵循幂指数变化<sup>[11]</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(\tilde{z}) = E_{1b} + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^r (E_{1t} - E_{1b}) \\ E_2(\tilde{z}) = E_{2b} + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^r (E_{2t} - E_{2b}) \\ G_1(\tilde{z}) = G_{1b} + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^r (G_{1t} - G_{1b}) \\ G_2(\tilde{z}) = G_{2b} + \left(\frac{\tilde{z}}{h}\right)^r (G_{2t} - G_{2b}) \end{array} \right. \quad (1)$$

其中:  $r$  为功能梯度变化指数, 当  $r = 0$  时功能梯度材料退化为均质材料;  $\tilde{z}$  为梁截面任意一点距梁底端的距离; 下脚标 t、b 分别代表功能梯度梁顶面、底面材料;  $h$  为梁高度;  $E_1, E_2$  为正交各项异性材料不同方向上的弹性模量;  $G_1, G_2$  为材料不同方向上的剪切模量。

## 2 新修正偶应力理论

由陈万吉等<sup>[16]</sup>提出的新修正偶应力理论, 将偶应力理论推广至各向异性材料。在该理论中, 应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  与曲率张量  $\boldsymbol{\chi}_{ij}$  分别定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \boldsymbol{\chi}_{ij} &= \theta_{i,j} \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $u_i$  为平动位移; 标点符号“,”表示对  $u_i$  在不同坐标方向( $j$  方向)上进行求导;  $\theta_{i,j} = e_{ijk}u_{k,j}/2$  为转动位移, 其中  $e$  为置换张量。从式中可以清楚地看到在新修正偶应力理论中应变张量是对称的, 而曲率张量是非对称的。其本构关系定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \\ \boldsymbol{m}_{ij} &= l_i^2 G_i \boldsymbol{\chi}_{ij} + l_j^2 G_j \boldsymbol{\chi}_{ji} \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 、 $\boldsymbol{m}_{ij}$  分别为应力张量和偶应力张量;  $\lambda$  和  $G$  为 Lame 常数;  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为材料尺度参数。

## 3 考虑尺度效应的平面正交各向异性功能梯度梁

平面正交各向异性功能梯度梁的坐标系、中性面以及外加载荷如图 1 所示。

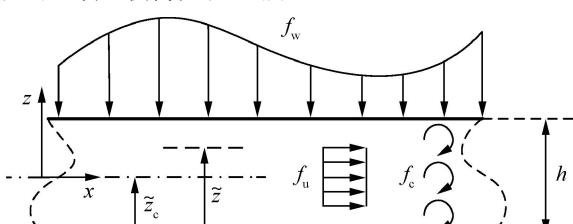


图 1 功能梯度梁的坐标系、中性面及外载荷

Fig. 1 coordinate system, neutral plane and external load of the functionally graded beam

其中:  $\bar{z}$  表示梁截面上任意一点距梁底面的距离;  $\bar{z}_c$  表示梁的中性面距梁底面的距离(在梁受纯弯曲时, 梁的中性面上没有正应力产生);  $z$  表示梁截面任意一点距中性面的距离;  $x$  轴沿梁轴线方向且与梁的中性面重合;  $f_u$  表示沿  $x$  轴方向上的体力;  $f_w$  表示施加在梁上的横向载荷;  $f_c$  表示绕  $y$  轴的体力偶。需要注意的是, 对于功能梯度梁, 中性面与几何形心面常常是不同的, 其确定方式为<sup>[11]</sup>

$$\bar{z}_c = \frac{\int_A Q_{11}(\bar{z}) \bar{z} dA}{\int_A Q_{11}(\bar{z}) dA} \quad (4)$$

式中:  $Q_{11}(\bar{z})$  与材料常数有关, 具体的计算方法见式(16)。

### 3.1 几何方程

本文采用 Bernoulli-Euler 假设, 即将梁的位移表示为

$$\begin{cases} u = u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \\ v = 0 \\ w = w(x) \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $u, v, w$  分别为梁任意一点沿  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴方向上的平动位移;  $u_0$  表示梁中性面沿  $x$  轴方向的位移; 梁的转动位移可由表达式  $\theta_i = e_{ik} w_k$ <sup>[12]</sup> 及式(5)得到:

$$\begin{cases} \theta_y = -\frac{dw}{dx} \\ \theta_x = \theta_z = 0 \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入到式(2)中, 得到梁的应变分量:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \\ \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

将式(6)代入到式(2)中得到曲率分量:

$$\begin{cases} \chi_{yx} = -\frac{d^2w}{dx^2} \\ \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xy} = \chi_{yz} = \chi_{zx} \\ = \chi_{xz} = \chi_{zy} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

### 3.2 本构方程

假设平面正交各向异性功能梯度梁的材料主方向即弹性模量  $E_1(\bar{z})$  的方向与梁轴线方向存在夹角  $\Phi$ , 以  $E_1(\bar{z})$  方向为  $x'$  轴建立局部坐标系 ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ )。则局部坐标系下的应力-应变关系可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}' \quad (9)$$

其中:  $\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, m_{x'y'} , m_{y'x'}]^T$ ;  $\boldsymbol{\epsilon}' = [\epsilon_{x'}, \epsilon_{y'}, \chi_{x'y'}]^T$ ;  $\mathbf{C}$  为局部刚度矩阵<sup>[20]</sup>:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}(\bar{z}) & C_{12}(\bar{z}) \\ C_{21}(\bar{z}) & C_{22}(\bar{z}) \\ & C_{55}(\bar{z})l_1^2(\bar{z}) & C_{44}(\bar{z})l_2^2(\bar{z}) \\ & C_{55}(\bar{z})l_1^2(\bar{z}) & C_{44}(\bar{z})l_2^2(\bar{z}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} C_{11}(\bar{z}) = \frac{E_1(\bar{z})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{12}(\bar{z}) = C_{21}(\bar{z}) = \frac{\nu_{12}E_2(\bar{z})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{22}(\bar{z}) = \frac{E_2(\bar{z})}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{44}(\bar{z}) = G_{23}(\bar{z}) \\ C_{55}(\bar{z}) = G_{13}(\bar{z}) \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $E_1(\bar{z}), E_2(\bar{z})$  为材料在  $x'$  轴和  $y'$  方向上的弹性模量;  $\nu_{12}$  和  $\nu_{21}$  为泊松比;  $l_1(\bar{z})$  和  $l_2(\bar{z})$  分别为沿  $x'$  轴和  $y'$  方向上的材料尺度参数。由式(9)和式(10)可以清楚地看出在新修正应力理论中偶应力分量是对称的。

全局坐标系 ( $x, y, z$ ) 下本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon} \quad (12)$$

其中:  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, m_{xy}, m_{yz}]^T$ ;  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \chi_{xy}, \chi_{yz}]^T$ ;  $\mathbf{Q}$  为全局刚度矩阵;

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{T}$  为局部坐标系与全局坐标系之间的转换矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos^2\Phi & \sin^2\Phi \\ \sin^2\Phi & \cos^2\Phi \\ & \cos^2\Phi - \sin^2\Phi \\ & -\sin^2\Phi & \cos^2\Phi \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中:  $\cos\Phi$  为夹角  $\Phi$  的余弦值;  $\sin\Phi$  为正弦值。由于全局坐标系下  $\epsilon_y = \chi_{xy} = 0$ , 则全局刚度矩阵简化为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11}(\bar{z}) \\ Q_{22}(\bar{z}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_{11}(\bar{z}) = \cos^4\Phi C_{11}(\bar{z}) + \sin^4\Phi C_{22}(\bar{z}) \\ + 2\cos^2\Phi \sin^2\Phi C_{12}(\bar{z}) \\ Q_{22}(\bar{z}) = \cos^4\Phi C_{44}(\bar{z})l_2^2(\bar{z}) + \sin^4\Phi C_{55}(\bar{z})l_1^2(\bar{z}) - \\ \cos^2\Phi \sin^2\Phi (C_{55}(\bar{z})l_1^2(\bar{z}) + C_{44}(\bar{z})l_2^2(\bar{z})) \end{cases} \quad (16)$$

#### 4 基于最小势能原理的平衡方程和边界条件

微尺度平面正交各向异性功能梯度梁所具有的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_v V_\epsilon dv = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_{ij}\epsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}) dv = \frac{1}{2} \int_0^L (EA)_{eq} \left( \frac{du_0}{dx} \right)^2 + ((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (17)$$

其中,  $V_\epsilon$  为应变能密度, 且

$$\begin{cases} (EA)_{eq} = \int_A Q_{11}(\tilde{z}) dA \\ (EI)_{eq} = \int_A Q_{11}(\tilde{z}) z^2 dA \\ (\beta A)_{eq} = \int_A Q_{22}(\tilde{z}) dA \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $(\beta A)_{eq}$  为由尺度效应带来的梁弯曲刚度增强项在梁截面上的等效积分, 其值与材料尺度参数的平方成正比。当材料处于宏观状态而不需要考虑尺度效应时, 该项退化为 0。外力功为

$$W = \int_0^L (f_u u_0 + f_w w + f_c \theta_y) dx + (\bar{N} u_0 + \bar{V} w + \bar{M} \theta_y) \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (19)$$

其中:  $\bar{N}$  表示在梁边界处加载的轴向外力;  $\bar{V}$  表示在梁边界处加载的横向外力;  $\bar{M}$  为在边界处加载的外力矩。

系统的总势能为

$$\Pi = U - W$$

由最小势能原理可得

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0 \quad (20)$$

将式(17)和式(19)代入式(20)后进行分部积分, 整理可得

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & ((EA)_{eq} \frac{du_0}{dx} - \bar{N}) \delta u_0 \Big|_0^L - (((EI)_{eq} + \\ & (\beta A)_{eq}) \frac{d^3 w}{dx^3} + \bar{V} - f_c) \delta w \Big|_0^L + (((EI)_{eq} + \\ & (\beta A)_{eq}) \frac{d^2 w}{dx^2} + \bar{M}) \delta w' \Big|_0^L + \int_0^L (((EI)_{eq} + \\ & (\beta A)_{eq}) \frac{d^4 w}{dx^4} + f_w - \frac{df_c}{dx}) \delta w dx - \\ & \int_0^L ((EA)_{eq} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f_u) \delta u_0 dx \end{aligned} \quad (21)$$

因此, 可得微尺度平面正交各向异性功能梯度梁的平衡方程:

$$(EA)_{eq} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f_u = 0 \quad (22)$$

$$((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \frac{d^4 w}{dx^4} + f_w - \frac{df_c}{dx} = 0 \quad (23)$$

以及边界条件为在  $x = 0$  处和  $x = L$  处应满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} (EA)_{eq} \frac{du_0}{dx} - \bar{N} = 0 \quad \text{或} \quad u_0 = \bar{u}_0 \\ ((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \frac{d^3 w}{dx^3} + \bar{V} + f_c = 0 \\ \text{或} \quad w = \bar{w} \\ ((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \frac{d^2 w}{dx^2} + \bar{M} = 0 \\ \text{或} \quad \frac{dw}{dx} = \frac{d\bar{w}}{dx} \end{array} \right. \quad (24)$$

#### 5 算例分析

采用如图 2 所示的自由端受集中力  $F$  作用的平面正交各向异性功能梯度悬臂梁。梁的弹性常数沿高度方向遵循式(1)所给出的幂指数形式变化, 同时假定梁的材料尺度参数  $l_1$ 、 $l_2$  以及泊松比不沿梁高度方向发生变化。悬臂梁的长、宽和高分别用  $L$ 、 $b$  和  $h$  表示。

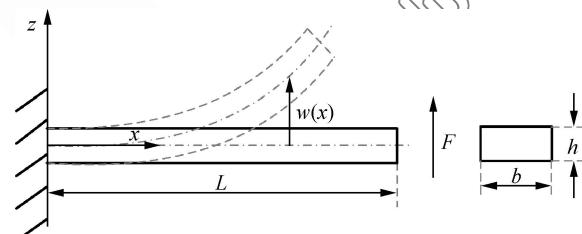


图 2 悬臂梁示意图

Fig. 2 Schematic diagram of cantilever beam

由式(24)可得该算例中悬臂梁的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} w \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \left[ ((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \frac{d^3 w}{dx^3} + F \right] \Big|_{x=L} = 0 \\ \left[ ((EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

将平衡方程(23)进行四次积分得到

$$[(EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}] w(x) =$$

$$\frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \quad (26)$$

通过边界条件(25), 可以确定式(26)中的常数:

$$c_1 = -F, c_2 = FL, c_3 = c_4 = 0 \quad (27)$$

将式(27)代入式(26)中整理得到悬臂梁弯曲挠度解析解:

$$w(x) = \frac{Fx^2}{6[(EI)_{eq} + (\beta A)_{eq}]}(3L - x) \quad (28)$$

如果处于宏观条件下而不需要考虑材料的尺度效应时, 令材料尺度参数  $l_1, l_2$  为 0, 则式(28)将退化为

传统梁理论下悬臂梁挠度的解析解。值得注意的是, 本文所给出的模型和经典梁模型具有相同形式的微分方程(式(23))和解(式(28)), 只是在刚度项中增加了一项和尺度效应有关的项, 因此可以直接解释和分析平面正交各向异性功能梯度梁的多尺度问题, 非常便于工程应用。

为了验证微尺度平面正交各向异性功能梯度梁中的尺度效应, 给定梁的材料常数如表 1 所示。梁的材料尺度参数、尺寸及外载荷如表 2 所示。

表 1 微尺度平面正交各向异性功能梯度梁的材料常数

Table 1 Material constants of micro scale plane orthotropic functionally graded beam

$E_{1t}$ /GPa	$E_{2t}$ /GPa	$E_{1b}$ /GPa	$E_{2b}$ /GPa	$G_{1t}$ /GPa	$G_{2t}$ /GPa	$G_{1b}$ /GPa	$G_{2b}$ /GPa	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$
70	70/25	393	393/25	26	26/2	157	157/2	0.3	0.012

Notes:  $E_{1t}, E_{2t}, G_{1t}, G_{2t}, E_{1b}, E_{2b}, G_{1b}, G_{2b}$  — Elastic constants of two kind of pure materials on the top and bottom surface of the orthotropic functionally graded beam, respectively;  $\nu_{12}$  and  $\nu_{21}$  — Poisson's ratio which are assumed to be constant with respect to thickness of the beam.

表 2 梁尺度参数、尺寸及外载荷

Table 2 Scale parameters, dimensions and external loads of beam

$l_1$	$l_2$	$b$	$F$
15 $\mu\text{m}$	5 $\mu\text{m}$	$b = 2h$	8 000 $\mu\text{N}$

Notes:  $l_1$  and  $l_2$  — Material length parameters along two orthogonal directions respectively;  $b$  and  $L$  — Width and length of the beam, respectively;  $F$  — Magnitude of concentrated force applied on the free end of the cantilever beam.

为了便于计算, 在本篇论文中我们仅考虑材料主方向与梁轴线方向的夹角为  $0^\circ$  和  $90^\circ$  两种情况且梁的材料尺度参数  $l_1, l_2$  根据工程经验假定为 15  $\mu\text{m}$  和 5  $\mu\text{m}$ 。

### 5.1 算例 1: 材料主方向与梁轴线一致时的挠度与尺度效应

当梁材料主方向  $E_1$  方向与梁轴线方向一致 ( $\Phi = 0^\circ$ ) 时, 夹角正弦值  $\sin\Phi = 0$ , 梁挠度表达式中包含尺度参数  $l_1$  的项退化为 0, 仅有尺度参数  $l_2$  对结构的刚度有贡献。此时, 挠度计算结果如图 3 所示, 图中横坐标为  $x$  坐标与梁长  $L$  的比值; 纵坐标为挠度  $w$  与梁高  $h$  的比值; 梁的功能梯度变化指数  $r$  在本算例中取值为 1。

由图 3 可知, 当梁材料主方向  $E_1$  方向与梁轴线方向一致且梁的几何比例保持不变 ( $b/h = 2, L = 10h$ ) 时, 在相同梁高度的情况下, 本文模型所预测的梁弯曲挠度总是小于传统梁模型预测的挠度值。梁的几何尺寸越小, 二者之间的差异就越大。具体来说, 就是当梁的几何尺寸与尺度参数接近时, 结构表现出比宏观状态下更高的抗弯刚度, 即出现所谓的“尺度效应”; 而当梁的几何尺寸远大于尺度参数时, 结构表现出与宏观状态下相同的抗弯刚度, 即尺度效应消失。这种趋势与微弯曲实

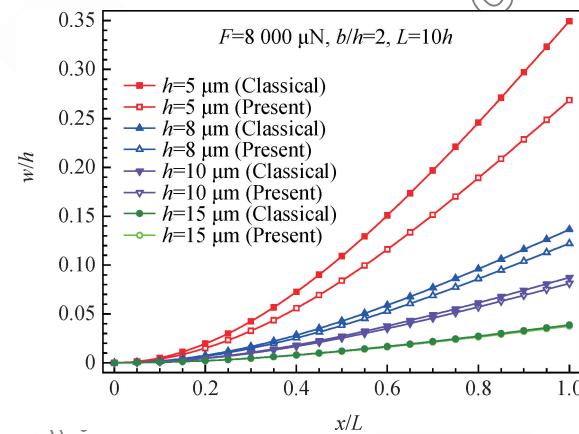


图 3  $\Phi = 0^\circ$  时不同梁理论下高度取不同值时悬臂梁的挠度对比图

Fig. 3 Comparison of deflection of cantilever beam of different thickness using different beam theory when  $\Phi = 0^\circ$

验<sup>[21]</sup>中观察到的现象一致, 因此可以证明本文模型能够有效地捕捉和反映尺度效应, 而这是传统梁模型做不到的。

### 5.2 算例 2: 材料主方向与梁轴线垂直时的挠度与尺度效应

当梁材料主方向  $E_1$  方向与梁轴线方向垂直 ( $\Phi = 90^\circ$ ) 时, 夹角余弦值  $\cos\Phi = 0$ , 在梁挠度的表达式中包含尺度参数  $l_2$  的项退化为 0, 仅有尺度参

数  $l_1$  对结构的刚度有贡献。此时, 挠度计算的结果如图 4 所示。

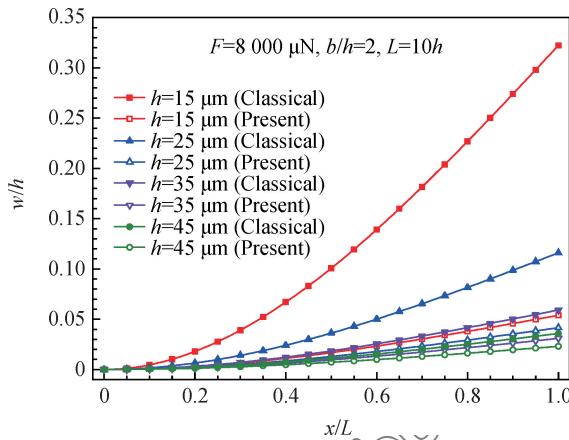


图 4  $\Phi = 90^\circ$  时不同梁理论下高度取不同值时  
悬臂梁的挠度对比图

Fig. 4 Comparison of deflection of cantilever beam with different thickness using different beam theory when  $\Phi = 90^\circ$

对比图 4 和图 3 可以看出, 当  $\Phi = 90^\circ$  时, 梁的挠度和尺度效应随着几何尺寸的变化而变化的趋势与  $\Phi = 0^\circ$  时是一致的, 但是挠度值要比  $\Phi = 0^\circ$  时大得多, 尺度效应也更加明显。这是因为: 当  $\Phi = 90^\circ$  时,  $E_2$  起主要的抗弯作用, 而本文算例中的  $E_2$  远小于  $E_1$ , 所以  $\Phi = 90^\circ$  时梁的挠度会明显大于  $\Phi = 0^\circ$  时的挠度; 另外, 当  $\Phi = 90^\circ$  时, 尺度效应的大小由  $l_1$  决定, 而本算例中  $l_1$  明显大于  $l_2$ , 因此尺度效应也会比  $\Phi = 0^\circ$  时更加明显。这说明本文模型不仅能够反映尺度效应, 还能描述  $\Phi$  取不同值时尺度效应的强弱差异。

### 5.3 算例 3: 功能梯度变化指数对尺度效应的影响

图 5 为当梁材料主方向  $E_1$  方向与梁轴线方向一致 ( $\Phi = 0^\circ$ ) 和垂直 ( $\Phi = 90^\circ$ ) 时, 功能梯度变化指数  $r$  对不同高度的微尺度功能梯度梁尺度效应的影响。图中横坐标为功能梯度变化指数  $r$ , 纵坐标为修正偶应力理论下自由端处挠度值与经典梁理论下自由端处挠度值的比值。

由图 5(a) 可知: 当梁材料主方向  $E_1$  方向与梁轴线方向一致且梁整体形状保持不变 ( $b/h = 2$ ,  $L = 10h$ ) 时, 在梁高度取相同值的情况下, 不同梁理论下悬臂梁自由端处挠度的比值随着功能梯度变化指数的增加先是明显减小。在达到最小值后, 随着  $r$  值的继续增大, 比值缓慢增加, 悬臂梁表现出的尺度效应逐渐减弱, 但并不会消失, 而是逐渐收敛于某一特定值。同时, 通过对图 5(a) 中梁高度取

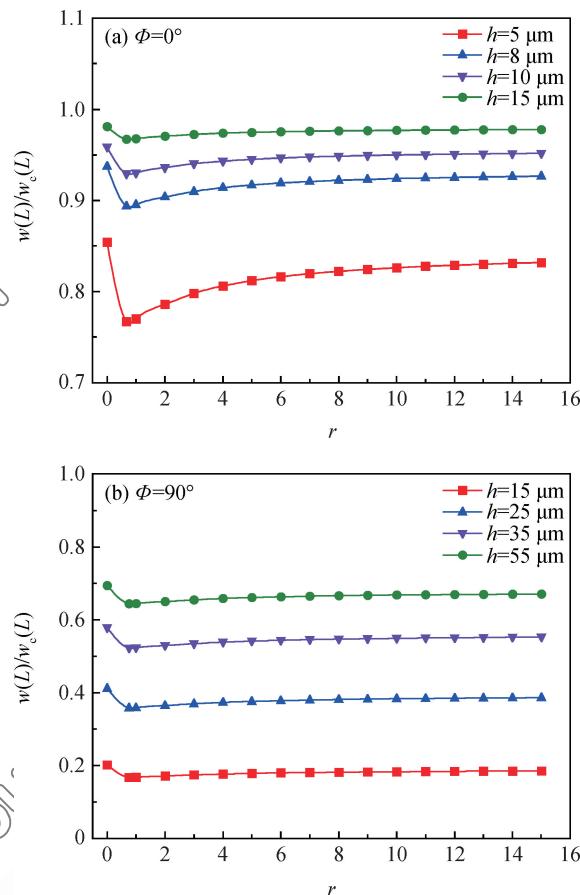


图 5 功能梯度变化指数  $r$  对不同高度微尺度  
功能梯度梁尺度效应的影响

Fig. 5 Influence of functionally graded index on the scale effect of functionally graded beams with different thickness

不同值的 4 条曲线的对比可以发现, 随着梁高度的增加, 梁自由端处挠度的比值逐渐增大并接近于 1, 即当梁的几何尺寸远大于尺度参数时, 尺度效应消失。

对比图 5(a) 和图 5(b) 可知, 功能梯度变化指数  $r$  对悬臂梁尺度效应的影响在  $\Phi = 0^\circ$  和  $\Phi = 90^\circ$  时是一致的。不同的是  $\Phi = 90^\circ$  时挠度的比值远小于  $\Phi = 0^\circ$  的情况, 这是因为在  $\Phi = 90^\circ$  时决定梁尺度效应大小的尺度参数  $l_1$  明显大于在  $\Phi = 0^\circ$  时决定尺度效应大小的尺度参数  $l_2$ , 因此,  $\Phi = 90^\circ$  时挠度比值更小, 尺度效应更明显。

## 6 结 论

(1) 在各向异性修正偶应力的基础上建立了平面正交各向异性功能梯度梁的静力模型。该模型不仅能够有效地捕捉到尺度效应, 还可以分别描述在两个正交方向上由尺度效应带来的不同大小的弯曲刚度增强。

(2) 本文模型和经典梁模型的控制方程和解均非常相似, 只是在刚度项中增加了一项和尺度参数有关的项, 因此可以直接解释和分析平面正交各向异性功能梯度梁的多尺度问题, 非常便于工程应用。

(3) 当结构的几何尺寸的大小接近尺度参数时, 本文模型所预测的悬臂梁的弯曲挠度值总是小于相同条件下传统梁模型所预测的挠度值, 即捕捉到了尺度效应。

(4) 尺度效应会随着结构几何尺寸的增大而逐渐减小, 当结构尺寸远大于尺度参数时尺度效应会完全消失。此外, 功能梯度材料的变化指数对尺度效应的程度也有一定的影响。

## 参考文献:

- [1] KOIZUMI M. FGM activities in Japan[J]. Composites Part B: Engineering, 1997, 28(1): 1-4.
- [2] FU Y, DU H, ZHANG S. Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films[J]. Materials Letters, 2003, 57(20): 2995-2999.
- [3] RAHAEIFARD M, KAHROBAIYAN M H, AHMADIAN M T. Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials[C]// ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference, San Diego, 2009: 539-544.
- [4] WITVROUW A, MEHTA A. The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications[J]. Material Science Forum, 2005, 8: 255-260.
- [5] STÖLKEN J S, EVANS A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale[J]. Acta Materialia, 1998, 46(14): 5109-5115.
- [6] FLECK N A, MULLER G M, ASHBY M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment[J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1994, 42(2): 475-487.
- [7] FLECK N A, HUTCHINSON J W. Strain gradient plasticity [J]. Advances in Applied Mechanics, 1997, 33: 295-361.
- [8] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51(8): 1477-1508.
- [9] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(10): 2731-2743.
- [10] PARK S K, GAO X L. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory[J]. Journal of Micro-mechanics and Microengineering, 2006, 16(11): 2355.
- [11] ASGHARI M, RAHAEIFARD M, KAHROBAIYAN M, et al. The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation[J]. Materials & Design, 2011, 32(3): 1435-1443.
- [12] ASGHARI M, AHMADIAN M T, KAHROBAIYAN M H, et al. On the size-dependent behavior of functionally graded microbeams[J]. Materials & Design, 2010, 31(5): 2324-2329.
- [13] KE L L, WANG Y. Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory[J]. Composite Structures, 2011, 93(2): 342-350.
- [14] NATEGHİ A, SALAMAT-TALAB M, REZAPOUR J, et al. Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(10): 4971-4987.
- [15] SIMSEK M, REDDY J N. A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory[J]. Composite Structures, 2013, 101(15): 47-58.
- [16] CHEN W J, LI X P. A new modified couple stress theory for anisotropic elasticity and microscale laminated Kirchhoff plate model[J]. Archive of Applied Mechanics, 2014, 84(3): 323-341.
- [17] 贺丹, 杨万里. 基于新修正偶应力理论的斜交铺设层合 Kirchhoff 板模型与尺度效应[J]. 复合材料学报, 2016, 33(6): 1311-1317
- [18] HE D, YANG W L. Model of angle-ply laminate Kirchhoff plate based on new modified couple stress theory and scale effect[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2016, 33(6): 1311-1317 (in Chinese).
- [19] 李莉, 陈万吉, 李小鹏. 修正偶应力理论层合薄板自由振动模型及尺度效应[J]. 大连理工大学学报, 2013, 53(3): 313-321.
- [20] LI L, CHEN W J, LI X P. Free vibration model of composite laminated thin plate based on modified couple stress theory and scale effects[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2013, 53(3): 313-321 (in Chinese).
- [21] 李莉, 陈万吉, 郑楠. 修正偶应力理论层合薄板稳定性模型及尺度效应[J]. 工程力学, 2013, 30(5): 1-7.
- [22] LI L, CHEN W J, ZHENG N. Model of composite laminated thin plate base on modified couple stress theory and buckling analysis of scale effects[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(5): 1-7 (in Chinese).
- [23] CHEN W J, CHEN W W, SZE K Y. A model of composite laminated Reddy beam based on a modified couple-stress theory[J]. Composite Structures, 2012, 94(8): 2599-2609.
- [24] FLECK N A, MULLER G M, ASHBY M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment[J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1994, 42(2): 475-487.