

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20160523.015

# 模态缺陷条件下复合材料柱形壳屈曲特性

张建<sup>1,2</sup>, 周通<sup>\*1</sup>, 王伟波<sup>2</sup>, 唐文献<sup>1</sup>

(1. 江苏科技大学 机械工程学院, 镇江 212003; 2. 中国船舶科学研究中心, 无锡 214082)

**摘 要:** 为了开展多模态缺陷条件下复合材料柱形壳的屈曲特性研究,进行了理想柱形壳在轴压工况下的线性屈曲分析,得出前 50 阶屈曲失稳模式,即模态缺陷;基于弧长法研究不同模态缺陷条件下复合材料柱形壳的非线性屈曲特性;将有限元分析结果、NASA SP-8007 规范计算结果与 Bisagni 试验结果作对比分析。结果表明:对于轴压柱形壳屈曲问题,第 1 阶模态缺陷不是最差缺陷,在第 1 阶模态缺陷条件下求出的非线性屈曲载荷比试验值高出较多;高阶模态缺陷条件下的复合材料柱形壳非线性屈曲计算结果与试验结果最为吻合,两者相差较少;屈曲载荷下降受缺陷形状、幅值双重影响,复合材料柱形壳屈曲计算需考虑多模态问题;NASA 求出的屈曲载荷非常保守,低于试验值较多,用 NASA 方法进行复合材料柱形壳的设计,往往会导致结构笨重、材料浪费、性能降低。

**关键词:** 复合材料柱形壳; 轴向压缩; 屈曲; 模态缺陷; 数值分析

**中图分类号:** TB330.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2017)03-0588-09

## Buckling property of a composite cylindrical shell considering mode imperfections

ZHANG Jian<sup>1,2</sup>, ZHOU Tong<sup>\*1</sup>, WANG Weibo<sup>2</sup>, TANG Wenxian<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China;  
2. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

**Abstract:** In order to investigate on buckling behavior of some composite cylindrical shells considering multimode imperfections, linear buckling analysis was performed for the perfect cylindrical shell under axial compressed condition to obtain the first fifty buckling modes, defined as mode imperfections. Nonlinear buckling analysis of the cylindrical shell under different mode imperfection was proposed based on the Riks method. Buckling loads calculated using finite element analysis results and empirical method results according to NASA SP-8007 were compared with Bisagni's test results. The results show that the first mode imperfection is not the worst imperfection for composite cylindrical shells under axial compressed condition. Buckling load obtained from the first mode imperfection is much higher than the experimental result. And buckling load obtained from higher mode imperfection agrees well with the experimental result. The decrease of buckling load is influenced by shape and amplitude of imperfection synchronously. The multi-mode effects should be considered on buckling analysis of composite cylindrical shells. Buckling load obtained from NASA is very conservative, which is much lower than the test result. Designing composite cylindrical shells according to NASA always results in heavy structure, material redundancy and poor performance.

**Keywords:** composite cylindrical shell; axial compression; buckling; mode imperfections; numerical analysis

复合材料柱形壳具有良好的比强度、比刚度、抗疲劳、耐腐蚀和承载能力,被广泛应用于船舶、海工、航空、航天等领域。但缺陷、非线性等因素均会导致其屈曲载荷明显下降<sup>[1]</sup>,复合材料柱形壳屈曲特性分析仍然是一项非常具有挑战性的工作。因此,深入研究缺陷条件下复合材料柱形壳的屈曲特性具有

收稿日期: 2016-03-04; 录用日期: 2016-05-04; 网络出版时间: 2016-05-23 14:25  
网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20160523.1425.008.html  
基金项目: 国家自然科学基金项目(51205173);江苏省基础 Research 计划(自然科学基金)—青年基金项目(BK20150469)  
通讯作者: 周通, 硕士, 研究方向为复合材料海洋结构物设计 E-mail: kdfztt@126.com  
引用格式: 张建, 周通, 王伟波, 等. 模态缺陷条件下复合材料柱形壳屈曲特性[J]. 复合材料学报, 2017, 34(3): 588-596.  
ZHANG J, ZHOU T, WANG W B, et al. Buckling of a composite cylindrical shell considering mode imperfections[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(3): 588-596 (in Chinese).

重要意义。

造成缺陷的原因是多方面的,如制造、存储、运输、安装和使用等<sup>[2]</sup>。其中,由于制造原因所造成的初始几何缺陷是壳体屈曲载荷下降的主要原因。在进行壳体屈曲特性研究时,最为理想的情况是引入真实几何缺陷,并施加合理的放大系数来考虑材料缺陷影响。但是,由于壳体加工工艺不同,产生的几何缺陷也不同,即使同一种工艺造成的几何缺陷也具有随机性,这就需要通过大批量、相似壳体试验,建立真实几何缺陷的可靠性模型,费时费力,往往收效甚微,这种方法显然不适用于研发成本巨大的潜水器耐压壳。因此,一般采用引入等效几何缺陷的方法来研究壳体屈曲特性。Koiter<sup>[3]</sup>首次研究了非完善壳体的稳定性一般准则,并提出了“缺陷敏感度”的概念,揭示了屈曲时的跳跃性与原始初始缺陷理论的相互关系,但作为渐近理论,其局限在于仅适用于分支点附近的平衡状态,不能分析大范围内的后屈曲和较大缺陷影响,且限于保守系统<sup>[4]</sup>;EN 1993—1—6 (2007)<sup>[5]</sup>认为,几何缺陷的形状应取最差缺陷(即导致壳体屈曲载荷下降最快的缺陷),在最差缺陷形状未知的情况下,建议采用模态缺陷来分析壳体的屈曲特性。第一阶线性屈曲失稳模式往往被作为最差缺陷引入<sup>[6]</sup>,来研究壳体的屈曲特性。但是,对具有相近分立特征值壳体,存在多模态屈曲现象,第一阶线性屈曲失稳模式往往不是最差缺陷,高阶线性屈曲失稳模式也可能导致较低的屈曲载荷。Saullo 等<sup>[7]</sup>系统研究了模态缺陷对轴压柱形壳体屈曲特性的影响规律,表明柱形壳体属于相近分立特征值结构,最差缺陷并非第一阶线性屈曲失稳模式。

壳体屈曲特性分析方法主要有三种:经典解析法、试验法和数值法<sup>[8-9]</sup>。首先,经典解析法采用理论公式即可算出理想结构壳体的屈曲载荷,但很难分析包含非线性现象的缺陷壳体屈曲特性,致使计算结果与试验结果相差甚远,且解析法无法计算复杂形状、边界或载荷的壳体屈曲问题。因此,必须将解析法求出的屈曲载荷乘以一系列衰减系数来确定壳体最终失稳载荷,例如,NASA SP—8007<sup>[10]</sup>等规范中对柱形壳体的屈曲计算。但是,Bisagni 和 Degenhardt<sup>[11-13]</sup>等研究表明,现有规范中的壳体屈曲计算方法非常保守,无法在工程实际问题中进行有效应用。其次,试验法是研究壳体屈曲特性的最为直接的方法,但是在前期设计阶段,进行试验研究是

不可能的。此外,试验法具有周期长、费用高,需要复杂试验设备等缺点。因此,数值计算被广泛用于替代试验研究,当然复杂问题仍然需要数值法和试验法联合研究。基于数值法的壳体屈曲特性研究方法主要包括:线性屈曲分析和非线性屈曲分析。其中,线性屈曲分析无法考虑缺陷影响及非线性特性,仅能分析理想线弹性壳体的屈曲特性,致使计算结果与试验结果相差甚远。非线性屈曲分析则考虑了初始缺陷、材料塑性、结构大变形等因素,已成为壳体屈曲特性研究的主流方法,通过缺陷壳体的几何和材料非线性分析(GMNIA),可直接算出壳体的实际屈曲载荷,无需考虑任何衰减系数。综上所述,由于缺陷的形状和尺寸对壳体屈曲特性影响非常大,合理的复合材料柱形壳屈曲特性分析方法有待进一步研究。

为此,本文进行了模态缺陷条件下碳纤维增强树脂复合材料柱形壳的屈曲特性研究。首先,根据 Bisagni<sup>[11]</sup>的复合材料柱形壳轴压试验结果,开展该柱形壳的线性屈曲分析,得出前 50 阶屈曲失稳模式;在此基础上,将这些失稳模式定义为初始几何缺陷,采用弧长法开展不同模态缺陷条件下复合材料柱形壳的非线性屈曲特性分析;此外,基于 NASA SP—8007<sup>[10]</sup>规范,求出复合材料柱形壳的屈曲载荷;最后,将数值结果、NASA 结果与试验结果作对比分析。研究成果将对分立特征值相近壳体的失稳分析具有指导意义。

## 1 数学模型

### 1.1 问题描述

本文所研究的碳纤维增强树脂(Carbon Fiber Reinforced Plastics, CFRP)层合板型复合材料柱形壳模型基于 Bisagni<sup>[11]</sup>的试验样本,如图 1 所示,直径为 700 mm,长度为 700 mm。柱形壳底端固定在压缩试验机的试验台上,顶端施加轴向压缩载荷,因柱形壳较薄,为了减小其端部与试验台之间的接触压强和提高端部刚度,在柱形壳的两端均设置长度 70 mm、厚度 8 mm 且带有过渡倒角的围栏。因此,在对此柱形壳进行有限元分析时,取中间等厚部分进行建模,其长度为 520 mm。柱形壳的法向厚度为 1.32 mm,内径为 700 mm,则柱形壳半径与厚度的比值  $R/t=265$ 。在对复合材料柱形壳进行轴向压缩试验之前,先测量其初始几何缺陷。试验时,需要通过位移传感器记录柱形壳移动端轴向位移的大

小,由力传感器记录轴向载荷的大小。初始缺陷和失稳过程由柱形壳内部的 5 个激光传感器测量并记录,测得平均缺陷幅值  $a_0=0.084\text{ mm}$ ,缺陷幅值缩放系数  $a_0/t=0.084/1.32=0.063$  为无量纲参数。

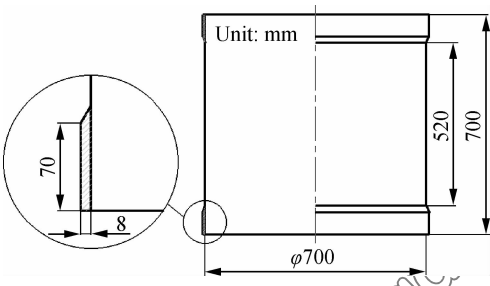
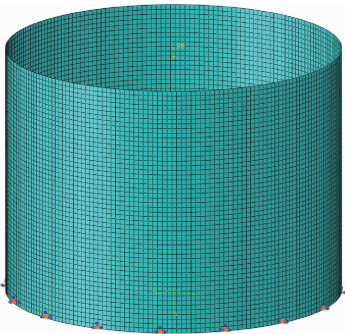


图 1 CFRP 层合板型复合材料柱形壳试验模型  
Fig. 1 CFRP composite laminate cylindrical experimental specimen

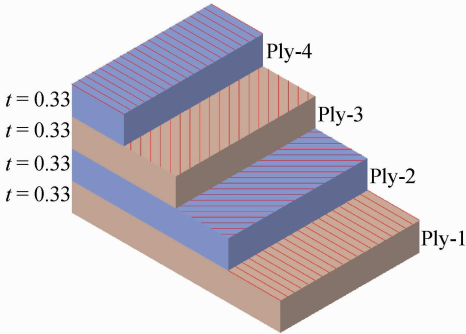
1.2 理想柱形壳数值模型

首先,建立复合材料柱形壳有限元模型,如图 2(a)所示,为复合材料柱形壳网格模型,选取 4 节点减缩积分壳单元 S4R 对柱形壳进行网格划分,为了得到较为准确的数值模型,需要进行网格无关性检查<sup>[14]</sup>。故选取 9 种网格尺寸分别对其进行特征值屈曲分析,对应的网格尺寸分别为:40 mm×40 mm、32 mm×32 mm、24 mm×24 mm、20 mm×20 mm、13 mm×13 mm、10 mm×10 mm、8 mm×8 mm、5 mm×5 mm、4 mm×4 mm。对于 CFRP 层合板型复合材料,由基质和增强纤维相互缠绕而成,所研究的柱形壳各层的纤维排布方式为 $20^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ$ ,图 2(b)为材料的具体铺层情况,各层纤维材料的力学属性如表 1 所示。为了与试验形成更好的对比,有限元模型采用与真实试验工况相类似的边界

条件,如图 2(a)所示。将柱形壳底端完全固定,顶端以圆心为参考点采用刚体约束。在参考点施加沿轴线向下的压缩载荷,特征值屈曲分析阶段施加的轴压载荷为 1 kN,非线性屈曲分析阶段施加的载荷根据其屈曲特征值确定,保证分析过程中复合材料柱形壳的可靠失稳。本文所使用的有限元分析软件为 Abaqus6.13,使用 Abaqus/Standard 求解器进行计算。



(a) Mesh model and boundary conditions of finite element model



(b) Graphical illustration of composite laminate with 4 piles

图 2 CFRP 层合板型复合材料柱形壳有限元模型

Fig. 2 Cylindrical finite element model of CFRP composite laminate

表 1 CFRP 层合板型复合材料力学性能

Table 1 Mechanical properties of CFRP composite laminate ply

Elastic modulus $E_{11}/(\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$	Elastic modulus $E_{22}/(\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$	Shear modulus $G_{12}/(\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$	Poisson's ratio $\nu_{12}$	Density/ $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	Thickness/mm
52 000	52 000	2 350	0.302	1 320	$0.33 \times 4$

对以上 9 种不同网格密度的有限元模型进行特征值屈曲分析,轴向受压 CFRP 层合板型复合材料柱形壳特征值屈曲分析结果与网格灵敏度检查如表 2 所示。由分析计算结果可知,网格越密则屈曲特征值越接近理论值,解析解的具体推导过程见文献[15-16]。当网格密度增加到一定程度时,对分析计算结果影响已不大。一般地,在细化网格的过程中,屈曲临界载荷的相对浮动量小于或等于 1% 时,即

可认为结果趋于收敛。综合考虑分析计算的时间与计算精度,选取网格尺寸为 10 mm×10 mm 的 6 号有限元模型进行后续的分析与计算,此模型共包含 11 440 个 S4R 减缩积分壳单元与 11 660 个节点,临界载荷与解析解相差 3.54%。因此,对于  $R/t=265$  的复合材料柱形壳,单元尺寸/壳体半径=2.86% 的网格模型可以保证计算载荷的相对波动量小于 1%,且可以保证计算精度与计算效率,为最佳网格划分形式。

表 2 轴向受压 CFRP 层合板型复合材料柱形壳特征值  
屈曲分析结果与网格灵敏度检查

Table 2 Results of eigenvalue analysis on CFRP composite  
laminate cylindrical shells under axial compression  
and check of mesh sensitivity

Number	Mesh size/mm	Eigenvalue of first mode/kN
1	40×40	306.53
2	32×32	292.42
3	24×24	282.91
4	20×20	279.89
5	13×13	256.60
6	10×10	248.49
7	8×8	244.86
8	5×5	241.00
9	4×4	240.12
Analytical solution		240.00

1.3 基于模态缺陷的柱形壳数值模型

理想壳体较小的初始几何缺陷将导致其临界载荷发生较大变化。根据欧洲标准 EN 1993—1—6, 通过引入等效几何缺陷来研究柱形壳的缺陷敏感度, 等效几何缺陷的形状选取原则对壳体极限强度影响最大, 并采用模态缺陷<sup>[5,13]</sup>。对于轴向受压的复合材料柱形壳, 具有很好的载荷承载能力, 同时也具有很高的缺陷敏感性。由于几何、材料、载荷等各种缺陷的存在, 极大降低了柱形壳的临界屈曲载荷。缺陷敏感性通过衰减系数 KDF (Knock-Down Factor) 来衡量, KDF 是带有缺陷的柱形壳的屈曲临界载荷与理想形状柱形壳非线性屈曲临界载荷的比值。通过理论计算得到的屈曲临界载荷没有考虑缺陷的影响, 所以一般比试验得到的结果要高出 50% 左右。因此, 很有必要通过有限元分析的方法, 引入不同的缺陷形状和缺陷幅值, 研究初始缺陷对于复合材料柱形壳的影响。

根据 Koiter 理论与 EN 1993—1—6(2007)<sup>[5]</sup>, 引入屈曲模态缺陷作为初始缺陷来研究 CFRP 型柱形壳对缺陷的敏感性, 可以得到最小的屈曲临界载荷<sup>[3-5]</sup>。通过对复合材料柱形壳进行线弹性屈曲分析, 得到其前 50 阶屈曲临界载荷和失稳模式, 将这些失稳模式设置为初始缺陷, 并引入几何非线性。以前 50 阶失稳模式为基础, 分别计算 8 种不同缺陷幅值下的屈曲临界载荷, 这 8 种缺陷幅值可以用无量纲的缺陷幅值缩放系数  $a/t$  来表示, 其中  $a$  为平

均缺陷幅值,  $t$  为壳厚。缺陷幅值缩放系数取值为 0、0.01、0.05、0.063、0.125、0.25、0.5、0.75、1, 柱形壳的厚度为 1.32 mm, 则对应的缺陷幅值为 0 mm、0.013 2 mm、0.066 mm、0.084 mm、0.165 mm、0.33 mm、0.66 mm、0.99 mm、1.32 mm。整个分析过程共包含 400 个缺陷复合材料柱形壳模型。运用弧长法对缺陷柱形壳进行分析求解, 采用自动增量步, 初始弧长增量步为 0.1 mm, 最小弧长增量步为 0.000 01 mm, 最大弧长增量步为 0.5 mm, 最大迭代次数为 100。

1.4 基于 NASA 规范的柱形壳屈曲计算

对于试验柱形壳, 在轴向受压情况下, 根据理论计算得到的临界载荷为 240 MPa<sup>[11-12,15-16]</sup>。目前, 在确定复合材料柱形壳的设计载荷时, 需要在理论计算载荷的基础上乘以安全系数。NASA SP—8007<sup>[10]</sup> 规范根据下限法确定轴向受压复合材料柱形壳的临界载荷, 壳体屈曲失稳的安全系数由  $\gamma$  确定, 对于各向异性材料具体的计算公式如下:

$$\gamma = 1 - 0.902(1 - e^{-\phi}) \tag{1}$$

$$\phi = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t_{eq}}} \tag{2}$$

$$t_{eq} = 3.4689 \sqrt{\frac{D_{11}D_{22}}{A_{11}A_{22}}} \tag{3}$$

式中:  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  为拉伸刚度;  $D_{11}$ 、 $D_{22}$  为弯曲刚度。柱形壳的材料属性见表 1, 各层纤维主向与自然坐标系的夹角  $\theta$  如图 3(a) 所示, 层合板的几何性质如图 3(b) 所示, 图中  $z_k$  为各层极限厚度处的坐标值。

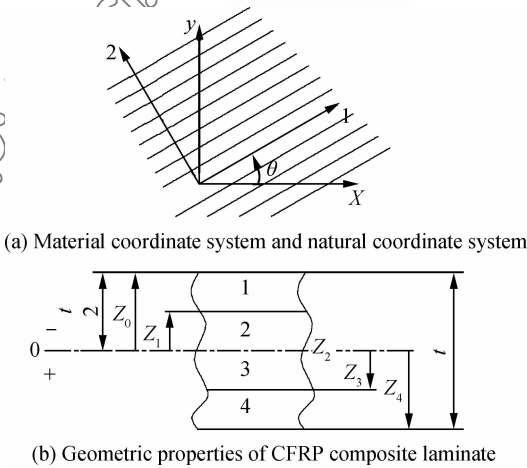


图 3 CFRP 层合板型复合材料几何参数  
Fig. 3 Geometric parameters of CFRP composite laminate

柱形壳的物理方程为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 2A_{16} & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & 2A_{26} & B_{12} & B_{22} \\ A_{16} & A_{26} & 2A_{66} & B_{16} & B_{26} \\ B_{11} & B_{12} & 2B_{16} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{22} & 2B_{26} & D_{12} & D_{22} \\ B_{16} & B_{26} & 2B_{66} & D_{16} & D_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \epsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ \frac{1}{2}k_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中:  $N_x$ 、 $N_\theta$ 、 $N_{x\theta}$  为层合板所受的合力;  $M_x$ 、 $M_\theta$ 、 $M_{x\theta}$  为层合板所受的合力矩;  $\epsilon_x^0$ 、 $\epsilon_\theta^0$ 、 $\epsilon_{x\theta}^0$  为壳体中面应变;  $k_x$ 、 $k_\theta$ 、 $k_{x\theta}$  为中面曲率改变量;  $A_{ij}$  为拉伸刚度;  $B_{ij}$  为耦合刚度;  $D_{ij}$  为弯曲刚度; 计算公式如下:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (5)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \bar{z}_k \quad (6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12}) \quad (7)$$

式中:  $t_k = z_k - z_{k-1}$ , 为第  $k$  层的厚度;  $\bar{z} = z_{k-1} + \frac{1}{2}(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1})$ , 是第  $k$  层中心的坐标值;  $\bar{Q}$  为转换折算刚度矩阵, 其计算式如下:

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\bar{Q}_{11}$ 、 $\bar{Q}_{12}$ 、 $\bar{Q}_{22}$ 、 $\bar{Q}_{66}$  为  $\theta$  的偶函数;  $\bar{Q}_{16}$ 、 $\bar{Q}_{26}$  为  $\theta$  的奇函数;  $U_1 \sim U_5$  计算式如下:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 = \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_5 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{cases} \quad (9)$$

折减刚度矩阵  $Q$  通过下式计算:

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $E$  为材料的弹性模量;  $G$  为材料的剪切弹性模量;  $\nu$  为材料的泊松比; 下标 1 代表材料主向 (纤维方向); 下标 2 代表层合板平面内与材料主向垂直的方向。层合板的各层坐标与尺寸参数如图 3(b) 所示。

## 2 结果分析与讨论

### 2.1 理想柱形壳屈曲特性

对理想复合材料柱形壳进行线弹性屈曲分析, 得到其前 50 阶屈曲特征值与失稳模式如表 3 所示。由表 3, 对于纤维排布为  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]$  的 CFRP 层合板型柱形壳, 各阶屈曲失稳模式均为波峰与波谷按一定规律交错排列的对称结构。对于第一阶屈曲振型, 它在周向有 14 个波峰, 沿着轴向有 7 个波峰, 这种屈曲失稳模式取决于各层纤维的排布方式。对于各阶屈曲失稳模式的解析表达式为

$$w^\circ(z, \vartheta) = a \sin(m\pi z/L) \cos(n\vartheta) \quad (11)$$

式中:  $\vartheta$  为周向坐标;  $L$  为柱形壳的长度;  $m$  为轴向半波数;  $n$  为周向波数;  $a$  为缺陷幅值。

第 1 阶屈曲特征值为 248.49 kN, 与理论值 240 kN 相差 3.53%, 第 50 阶屈曲特征值为 260.31 kN, 与第 1 阶屈曲特征值相差 4.76%。因为存在多组同根值屈曲模态, 所以相邻阶屈曲特征值最小偏差为 0。相邻阶屈曲特征值最大偏差为 0.88%, 存在于第 20 阶与第 21 阶之间。屈曲特征值的相邻偏差较小说明复合材料柱形壳是具有相近分立特征值问题的缺陷敏感性结构, 因此, 通过引入不同缺陷形状与缺陷幅值的模态缺陷研究柱形壳的缺陷敏感度具有很深远的意义。



















































### 2.2 缺陷柱形壳屈曲特性

#### 2.2.1 数值结果分析

通过分析衰减系数曲线, 研究 LBMI (Linear Buckling Mode-Shaped Imperfection, 线性屈曲模态缺陷) 对于柱形壳失稳的影响。为了得到各阶屈曲振型的缺陷敏感度及最差的缺陷形式, 需要计算前 50 阶屈曲模态缺陷对于不同缺陷幅值的衰减系数 KDF。轴向受压柱形壳衰减系数 = 缺陷壳体临界载荷/理想壳体临界载荷, 为无量纲参数, 可以反



表 3 单元数为  $220 \times 52$  的 CFRP 层合板型复合材料柱形壳在轴向受压工况下前 50 阶屈曲临界载荷与失稳模式  
Table 3 50 eigenvalues and buckling shapes of  $220 \times 52$  CFRP composite laminate cylindrical shell under axial compression

Order	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>	4 <sup>th</sup>	5 <sup>th</sup>	6 <sup>th</sup>	7 <sup>th</sup>	8 <sup>th</sup>	9 <sup>th</sup>	10 <sup>th</sup>
$F_{cr}/\text{kN}$	248.49	248.5	248.51	248.51	250.07	250.07	250.41	250.41	251.44	251.44
Mode										
Order	11 <sup>th</sup>	12 <sup>th</sup>	13 <sup>th</sup>	14 <sup>th</sup>	15 <sup>th</sup>	16 <sup>th</sup>	17 <sup>th</sup>	18 <sup>th</sup>	19 <sup>th</sup>	20 <sup>th</sup>
$F_{cr}/\text{kN}$	251.44	251.44	251.54	251.54	252.31	252.31	252.32	252.32	252.44	252.44
Mode										
Order	21 <sup>st</sup>	22 <sup>nd</sup>	23 <sup>rd</sup>	24 <sup>th</sup>	25 <sup>th</sup>	26 <sup>th</sup>	27 <sup>th</sup>	28 <sup>th</sup>	29 <sup>th</sup>	30 <sup>th</sup>
$F_{cr}/\text{kN}$	254.65	254.65	255.66	255.66	255.68	255.68	255.85	255.86	256.07	256.07
Mode										
Order	31 <sup>st</sup>	32 <sup>nd</sup>	33 <sup>rd</sup>	34 <sup>th</sup>	35 <sup>th</sup>	36 <sup>th</sup>	37 <sup>th</sup>	38 <sup>th</sup>	39 <sup>th</sup>	40 <sup>th</sup>
$F_{cr}/\text{kN}$	256.10	256.10	256.71	256.71	258.32	258.32	258.36	258.36	259.11	259.11
Mode										
Order	41 <sup>st</sup>	42 <sup>nd</sup>	43 <sup>rd</sup>	44 <sup>th</sup>	45 <sup>th</sup>	46 <sup>th</sup>	47 <sup>th</sup>	48 <sup>th</sup>	49 <sup>th</sup>	50 <sup>th</sup>
$F_{cr}/\text{kN}$	259.18	259.18	259.27	259.27	259.74	259.74	260.23	260.24	260.31	260.31
Mode										

映复合材料柱形壳的缺陷敏感性。在计算衰减系数时,理想柱形壳临界载荷选取特征值屈曲分析 1 阶特征值  $F_{critical(perfect)}=248.49\text{ kN}$ 。

在不同的缺陷幅值下,衰减系数随 50 阶屈曲模态缺陷的变化曲线如图 4 所示。在对不同阶模态缺陷柱形壳的衰减系数进行分析研究时,Saullo 等<sup>[7]</sup>以缺陷幅值缩放系数为横坐标,以衰减系数为纵坐标,将各阶模态缺陷对应的衰减系数放在一张图中,不利于研究多模态对于柱形壳衰减系数的影响。Saullo 等<sup>[7]</sup>认为屈曲临界载荷随着模态缺陷的阶数增加而降低。事实上,如图 4 CFRP 层合板型复合材料柱形壳在轴向受压工况下 50 阶模态衰减系数曲线所示,在较小缺陷幅值下,临界载荷随着模态缺陷阶数增大而有小幅度的上升;在较大的缺陷幅值下,临界载荷随着模态阶数增大而有小幅度下降。由图 4 可知,即使在同一缺陷幅值下,衰减系数曲线随屈曲模态阶数的不同而波动很大。当缺陷幅值缩放系数为 0.125 时,各阶屈曲模态对应的衰减系数波动较小,稳定性较好。当缺陷幅值缩放系数为 0.01 时,各阶屈曲模态对应的衰减系数波动较大,稳定性不好。由此可知,缺陷幅值过大或过小都会造成临界载荷的较大波动,复合材料柱形壳的临界载

荷的波动随着缺陷幅值的增大呈现先减小后增大的趋势,模态缺陷的阶数对其影响较大。因此,必须考虑模态缺陷对整个复合材料柱形壳的屈曲临界载荷的影响。当缺陷幅值缩放系数分别为 0.01、0.05、0.063、0.125、0.25、0.5、0.75、1 时,对应的最差屈曲模态缺陷阶数分别为第 25、34、41、4、12、49、19、36 阶。

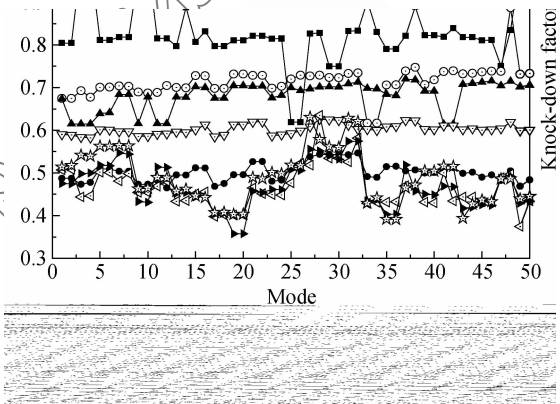


图 4 CFRP 层合板型复合材料柱形壳在轴向受压  
工况下 50 阶模态衰减系数曲线  
Fig. 4 50 modes knock-down factors of CFRP composite  
laminate cylindrical shell under axial compression

2.2.2 NASA 算法规范结果分析

根据弹性模量  $E_{11}$ 、 $E_{22}$ , 剪切模量  $G_{12}$ , 泊松比

$\nu_{12}$ 、 $\nu_{21}$ ，由式(10)可以得到折减刚度矩阵的各元素为  $Q_{11}=57\ 218.56\ \text{N/mm}^2$ ， $Q_{12}=17\ 280.01\ \text{N/mm}^2$ ， $Q_{22}=57\ 218.56\ \text{N/mm}^2$ ， $Q_{66}=2\ 350\ \text{N/mm}^2$ 。在计算转换折算刚度矩阵  $\bar{Q}$  之前，需先求出  $U_i$ ，由折减刚度矩阵  $\bar{Q}$  与式(9)得  $U_1=48\ 408.92\ \text{N/mm}^2$ ， $U_2=0$ ， $U_3=8\ 809.64\ \text{N/mm}^2$ ， $U_4=26\ 089.64\ \text{N/mm}^2$ ， $U_5=11\ 159.64\ \text{N/mm}^2$ 。第1层、第4层纤维与柱形壳轴向的夹角为  $0^\circ$ ，第2层、第3层纤维与柱形壳轴向的夹角分别为  $45^\circ$ 、 $-45^\circ$ ，由式(8)可得  $(\bar{Q}_{11})_1=(\bar{Q}_{11})_4=57\ 218.56\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{12})_1=(\bar{Q}_{12})_4=17\ 280.01\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{22})_1=(\bar{Q}_{22})_4=57\ 218.56\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{16})_1=(\bar{Q}_{16})_4=0$ ， $(\bar{Q}_{26})_1=(\bar{Q}_{26})_4=0$   $(\bar{Q}_{66})_1=(\bar{Q}_{66})_4=2\ 350\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{11})_2=(\bar{Q}_{11})_3=39\ 599.28\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{12})_2=(\bar{Q}_{12})_3=34\ 899.28\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{22})_2=(\bar{Q}_{22})_3=39\ 599.28\ \text{N/mm}^2$   $(\bar{Q}_{16})_2=(\bar{Q}_{16})_3=0$ ， $(\bar{Q}_{26})_2=(\bar{Q}_{26})_3=0$   $(\bar{Q}_{66})_2=(\bar{Q}_{66})_3=19\ 969.28\ \text{N/mm}^2$

根据转换折算刚度矩阵  $[\bar{Q}]$ 、各层厚度  $t$  与式(5)可以得到拉伸刚度： $A_{11}=63\ 899.78\ \text{N/mm}$ ， $A_{22}=63\ 899.78\ \text{N/mm}$ 。由式(7)可以得到对应的弯曲刚度： $D_{11}=10\ 544.62\ \text{N/mm}$ ， $D_{22}=10\ 544.62\ \text{N/mm}$ 。由拉伸刚度  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  与弯曲刚度  $D_{11}$ 、 $D_{22}$  结合式(1)~(3)可得  $t_{eq}=1.35$ ， $\phi=1.01$ ， $\gamma=0.43$ ，从而可以得到设计临界载荷为  $102.74\ \text{kN}$ ，相对柱形壳轴压试验临界载荷  $163.38\ \text{kN}$ ，此结果较为保守。

2.2.3 对比分析

通过初始缺陷测试试验，得到复合材料柱形壳的初始缺陷为  $0.084\ \text{mm}$ ，对应的缺陷幅值缩放系数为  $0.063$ 。当位移达到  $0.87\ \text{mm}$  时，柱形壳发生失稳，临界屈曲载荷为  $163.38\ \text{kN}$ 。如图5轴向受压 CFRP 型复合材料柱形壳在第1、41阶模态缺陷条件下屈曲分析结果与试验结果对比所示，整个试验过程包括3个阶段：第1阶段为弹性阶段，力与位移成正比例关系增加；第2阶段为一阶失稳阶段，柱形壳发生失稳变形；第3阶段为强化阶段，柱形壳的力与位移曲线再次上升，将要发生二阶失稳或破坏。对于这种各向异性复合材料，具有与金属材料相类似的力学特性，这与一般的脆性材料存在差异，将其用于深海潜水器耐压壳具有较为深远的意义。

为了更直观的比较各种方法得到的临界屈曲载荷之间的差异，现将解析法、弧长法、特征值屈曲法、

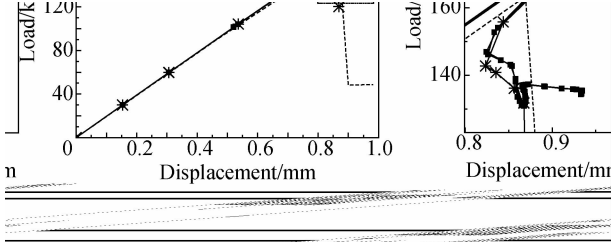


图5 轴向受压 CFRP 型复合材料柱形壳在第1和第41阶模态缺陷条件下屈曲分析结果与试验结果对比

Fig. 5 Comparison between buckling analysis considering 1st and 41th mode imperfections and experimental results of CFRP composite laminate cylindrical shell under axial compression

试验法得到的理想柱形壳、缺陷幅值缩放系数为  $0.063$  的柱形壳的结果绘于图6。对于理想复合材料柱形壳，通过弧长法、特征值屈曲分析法、解析法得到的临界屈曲载荷分别为  $274.91\ \text{kN}$ 、 $248.49\ \text{kN}$ 、 $240.00\ \text{kN}$ 。对于缺陷复合材料柱形壳，试验样本的缺陷幅值为  $0.084\ \text{mm}$ ，对应的缺陷幅值缩放系数为  $0.063$ ，通过试验测得的临界屈曲载荷为  $163.46\ \text{kN}$ 。在与试验样本相同的缺陷幅值下，弧长法得到的临界屈曲载荷中，所有数值解均大于试验值，并小于理想壳的解析解。因此，当缺陷幅值缩放系数为  $0.063$  时，最差缺陷临界载荷与试验值误差最小，1阶缺陷临界载荷与试验值误差较大。其中，第41阶屈曲模态缺陷临界载荷  $168.89\ \text{kN}$  与试验值误差最小，为  $3.32\%$ ，第37阶屈曲模态缺陷临界载荷  $197.88\ \text{kN}$  与试验值误差最大，为  $21.06\%$ ；第41阶模态缺陷临界载荷比第37阶模态缺陷临界载荷小  $14.65\%$ ；各阶屈曲模态临界载荷与试验值误差的平均值为  $14.63\%$ 。根据 NASASP—8007<sup>[10]</sup> 规范，

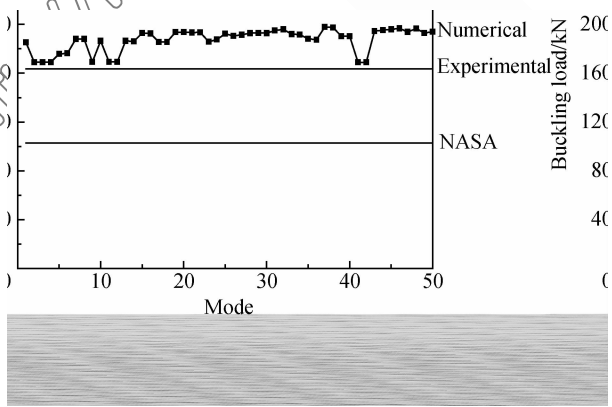


图6 各种分析方法得到的轴向受压 CFRP 层合板型复合材料柱形壳屈曲临界载荷比较

Fig. 6 Comparison of buckling loads of CFRP composite laminate cylindrical shell under axial compression from each analysis method

由下限法得到的屈曲临界载荷为 102.74 kN, 比 0.084 mm 缺陷幅值下第 41 阶模态缺陷的屈曲临界载荷小 39.17%, 计算结果较为保守。

Bisagni<sup>[11]</sup>在对数值仿真进行分析时, 只对比了第 1 阶模态缺陷与试验结果, 缺少对多模态缺陷的研究与对前屈曲和后屈曲阶段的综合分析。现将缺陷幅值缩放系数为 0.063 的第 1 阶、第 41 阶屈曲模态缺陷模型对应的临界载荷、失稳模式、衰减系数、载荷-位移曲线进行对比, 更直观地得出它们之间的差异。第 1 阶模态缺陷的屈曲特征值为 248.49 kN, 通过 Riks 弧长法得到的缺陷幅值缩放系数为 0.063 的缺陷壳的临界载荷为 185.24 kN, 衰减系数为 0.674; 第 41 阶模态缺陷的屈曲特征值为 259.18 kN, 通过 Riks 弧长法得到的缺陷幅值缩放系数为 0.063 的缺陷壳的临界载荷为 168.89 kN, 衰减系数为 0.614。当缺陷幅值缩放系数为 0.063 时, 第 41 阶临界载荷比第 1 阶临界载荷小 16.35 kN, 为 8.83%。

缺陷幅值缩放系数为 0.063 的第 1 阶、第 41 阶模态缺陷数值计算载荷-位移曲线与试验结果的载荷-位移曲线如图 5 所示。随着轴压载荷的增加, 柱形壳移动端节点位移成比例增加, 当载荷与位移达到一定程度时, 载荷-位移曲线突然下降, 柱形壳发生破坏, 失稳点、非线性屈曲阶段均存在较大的不同。第 1 阶屈曲模态缺陷临界载荷 185.24 kN 与试验值 163.46 kN 的误差高达 13.32%, 第 41 阶屈曲模态缺陷临界载荷 168.89 kN 与试验值 163.46 kN 的误差仅为 3.32%。为了验证有限元模型建立的正确性, 需分析第一阶模态缺陷、最差阶模态缺陷与试验值在线弹性屈曲阶段的载荷-位移曲线的相似程度。现取出图 5 中三条曲线在线弹性比例阶段的数据进行线性拟合, 得到第 1 阶模态缺陷的斜率 192 963.50 与试验结果斜率 188 114.20 相差 2.58%, 第 41 阶模态缺陷的斜率 192 411.83 与试验结果斜率 188 114.20 相差 2.28%, 误差值均较小。因此, 在复合材料线弹性屈曲阶段, 数值计算结果与试验结果的载荷-位移曲线具有较高的一致性。

### 3 结 论

(1)在对复合材料柱形壳进行有限元分析时, 需要引入初始缺陷来模拟真实失稳情况, 使设计更加安全可靠。当模态缺陷幅值与试验样本的缺陷幅值相同时, 数值解与试验解的误差较小, 载荷-位移曲线基本重合, 证明了缺陷复合材料柱形壳有限元模

型建立的正确性。

(2)复合材料柱形壳是具有相近分立特征值的缺陷敏感性结构, 随着缺陷幅值的增大, 各阶模态缺陷下的屈曲临界载荷均下降。模态缺陷阶数对临界载荷影响较大, 研究复合材料柱形壳的多模态问题具有重要意义。柱形壳的最差模态缺陷并非通常所说的第 1 阶缺陷。本文所研究的柱形壳 1 阶缺陷临界载荷与试验值的误差较高; 缺陷幅值缩放系数为 0.063 时的最差缺陷出现在高阶模态缺陷里, 其临界载荷与试验值的误差较小。

(3)根据 NASA SP—8007<sup>[10]</sup>规范, 由下限法得到的屈曲临界载荷与试验结果相差较大, 计算结果较为保守, 造成了材料、成本、人力物力的浪费与结构笨重。通过引入模态缺陷对复合材料柱形壳进行屈曲分析, 可以解决经验公式较为保守的问题, 对于航天与潜水设备的结构优化与轻量化设计具有很好的指导作用。

### 参考文献:

- [1] JASION P, MAGNUCKI K. Elastic buckling of clothoidal-spherical shells under external pressure-theoretical study[J]. Thin-Walled Structures, 2015, 86(1): 18-23.
- [2] IFAYEFUNMI O. Buckling behavior of axially compressed cylindrical shells: Comparison of theoretical and experimental data [J]. Thin-Walled Structures, 2016, 98(1): 558-564.
- [3] KOITER W T. The stability of elastic equilibrium[M]. Stability of Elastic Equilibrium, 1970.
- [4] 周利, 黄义. 薄壳非线性稳定理论的最新发展[J]. 建筑钢结构进展, 2006, 8(4): 23-32.  
ZHOU L, HUANG Y. Recent development and tendency of nonlinear theories of stability for thin-walled shells[J]. Progress in Steel Building Structures, 2006, 8(4): 23-32 (in Chinese).
- [5] European Committee for Standardization. Strength and stability of shell structures: EN 1993—1—6[S]. EN Special Publication, 2007.
- [6] SOSA E M, GODOY L A, CROLL J G A. Computation of lower-bound elastic buckling loads using general-purpose finite element codes[J]. Computers and Structures, 2006, 84(29): 1934-1945.
- [7] CASTRO S G P, ZIMMERMANN R, ARBELO M A, et al. Geometric imperfections and lower-bound methods used to calculate knock-down factors for axially compressed composite cylindrical shells[J]. Thin-Walled Structures, 2014, 74(1): 118-132.
- [8] KOLLAR L P. Buckling of rectangular composite plates with restrained edges subjected to axial loads[J]. Journal of Rein-



- forced Plastics & Composites, 2014, 33(23): 2174-2182.
- [9] TOMAS A, TOVAR J P. The influence of initial geometric imperfections on the buckling load of single and curvature concrete shells[J]. Computers and Structures, 2012, 97(1): 34-45.
- [10] National Aeronautics and Space Administration. Buckling of thin-walled circular cylinders; NASA SP—8007[S]. NASA Special Publication, 1965.
- [11] BISAGNI C. Numerical analysis and experimental correlation of composite shell buckling and post buckling[J]. Composite; part B, 2000, 31(8): 655-667.
- [12] BISAGNI C. Experimental buckling of thin composite cylinders in compression[J]. AIAA Journal, 1999, 37(2): 276-278.
- [13] DEGENHARDT R, KLING A, BETHGE A, et al. Probabilistic approach for better buckling knock-down factors of CFRP cylindrical shells-tests and analyses[C]. Engineering Mechanics Division Conference of the American Society of Civil Engineers, 2007.
- [14] SCHMIDT H. Stability of steel shell structures general report [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2000, 55(1-3): 159-181.
- [15] BISAGNI C. Instabilità e comportamento post-critico di gusci in material composito[D]. Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano, 1997.
- [16] KOITER W T, ELISHAKOFF I, LI Y W, et al. Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness [J]. International Journal of Solids and Structures, 1994, 31(6): 797-805.