

聚氨酯弹性体隔板夹层结构的等效参数计算

薛启超, 邹广平^{*1}, 何建¹, 李佳², 张井财¹

(1. 哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001; 2. 沈阳发动机设计研究所 强度设计室, 沈阳 110015)

摘要: 针对聚氨酯弹性体的隔板夹层结构, 阐述了多种不同的等效参数计算方法, 并对等效参数进行计算。首先讨论和计算了不考虑结构剪切变形时的整体结构等效参数计算方法, 将整体夹层结构等效为正交各向异性薄板, 给出了考虑夹芯抗弯刚度的整体刚度系数表达式。其次, 在考虑夹层结构夹芯存在剪切变形的情况下, 推导了由分隔隔板和聚氨酯弹性体组成的夹芯胞元的等效弹性常数; 最后, 使用基于应变能密度等效分析的有限元方法对夹芯胞元等效弹性常数进行计算, 并与理论分析结果进行对比, 二者误差在 10% 以内。

关键词: 聚氨酯弹性体; 夹层复合结构; 等效模量; 有限元; 刚度系数

中图分类号: TB330.1; U66 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2017)03-0564-10

Equivalent parameters calculation for sandwich plate with polyurethane elastomer core reinforced by crossing walls

XUE Qichao¹, ZOU Guangping^{*1}, HE Jian¹, LI Jia², ZHANG Jingcai¹

(1. College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

2. Strength Research Branch, Shenyang Engine Design Institute, Shenyang 110015, China)

Abstract: A series of equivalent simplified methods were investigated in this paper and equivalent parameters were calculated for sandwich plate with polyurethane elastomer core reinforced by crossing walls. Firstly, a global equivalent method was discussed in case of ignoring the shear deformation of the core. In this way, the reinforced structure could be made equivalence to orthotropic thin plate and stiffness coefficients equations were presented. Secondly, when considering shear deformation of the core, equivalent elastic coefficients of the core compounded by crossing walls and polyurethane elastomers were also given by theoretical derivation. Finally, the equivalent orthotropic modules for the polyurethane core with crossing walls were analyzed by finite element method (FEM) based on equivalent strain energy density. And the results show that the error between theoretical derivation and FEM is less than 10%.

Keywords: polyurethane elastomer; sandwich structures; equivalent modules; FEM; stiffness coefficients

夹芯板结构, 又称为三明治夹层结构, 是工程中常用的复合材料结构。20 世纪 40 年代以来, Reissner 理论、Hoff 理论和杜庆华理论等几种经典夹芯板理论^[1]的建立, 为夹芯板结构的工程计算提供了分析基础。针对夹芯板结构正交各向异性的特点, Libove 等^[2]综合了各向同性夹芯板理论和经典的

正交各向异性薄板理论, 提出了正交各向异性夹芯板理论, 使得在考虑夹芯的剪切变形时, 计算带有软夹芯的正交各向异性板成为可能。至此, 不同类型夹芯板的等效参数分析成为了对其进行理论或数值计算的先决条件。Libove^[3]首先对波纹板的等效参数进行了计算。Kelsey^[4]首先提出了使用能量法计

收稿日期: 2016-03-11; 录用日期: 2016-04-19; 网络出版时间: 2016-05-11 08:45

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20160511.0845.004.html

基金项目: 国家自然科学基金(51409056); 黑龙江省自然科学基金(E2015047); 哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项基金项目(HEU20160202)

通讯作者: 邹广平, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为工程力学 E-mail: zouguangping@hrbeu.edu.cn

引用格式: 薛启超, 邹广平, 何建, 等. 聚氨酯弹性体隔板夹层结构的等效参数计算[J]. 复合材料学报, 2017, 34(3): 564-573.

XUE Q C, ZOU G P, HE J, et al. Equivalent parameters calculation for sandwich plate with polyurethane elastomer core reinforced by crossing walls[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(3): 564-573 (in Chinese).

算复杂夹芯结构的面外剪切等效参数，并给出了参数的上限和下限。Gibson^[5]在其著作中全面总结了胞元固体夹芯结构的一般计算方法，并给出了蜂窝夹芯结构的等效参数。

夹层结构中面板对夹芯存在约束作用，使得夹芯材料的参数计算与自由边界条件下的结果产生差别，很多文献^[2,6,7]对这个问题进行了探讨，并尝试使用均一化方法来将局部和总体变形结合起来，综合进行分析。随着计算机技术的发展，有限元方法使得对结构进行精确分析成为可能。然而，对含有多个胞元的夹层结构，对每个胞元细微结构均进行实体建模并进行计算，必然使单元和节点数量急剧增加，所以高精度的等效参数分析仍具有重要的意义。

隔板加筋式结构是工程中最常使用的结构形式之一，当隔板间隔较密时，类似于矩形蜂窝夹芯结构。刘均等^[8]利用整体均一化方法建立了方形蜂窝夹层结构的弯曲控制方程，用三角级数来描述整体和局部的位移场，进而计算了振动和冲击响应。Mcshane^[9]对矩形蜂窝结构进行了冲击试验，试验发现矩形蜂窝结构比均质板结构具有更好的抗冲击性能。

当夹层结构有绝缘或隔音等功能需求时，可以在胞元结构中充入泡沫或弹性体材料。Vaziri 等^[10]研究了内部充满聚氨酯泡沫的方形蜂窝夹层结构，发现充入泡沫后的夹层板与同样重量的空心结构相比，其静态承载力和抗冲击能力并没有大的提高。加入填充物的夹芯结构，由于其夹芯材料的多相性，理论方法计算等效参数存在困难，所以常常通过有限元方法来实现^[11-12]，Burlayenko^[11]就利用基于应变能等效原理的有限元等效参数计算方法分析了填充 PVC 泡沫的蜂窝夹芯结构面内和面外的等效参数，得出了与文献^[9,10]类似的结论，从侧面说明了对于充入泡沫或弹性体的夹层结构，胞元的尺寸和形状对夹芯的力学性能有一定影响。

聚氨酯弹性体钢夹层板结构（简称钢夹层板结构）是一种新型的夹层复合结构^[13]，由两块钢质面板和充入内部聚氨酯弹性体组合而成。钢夹层板现已经应用于船舶和桥梁结构的修复和建造上^[14-15]，其优异的减震吸能效果受到人们的广泛关注，绝缘性能、隔热性能、抗疲劳性能也比常用的梁板组合结构要好。钢夹层板的应用能够减少钢材的用量，减轻结构的重量，增加纵桁和肋板之间的距离，减少焊

缝的施工长度。由于弹性体和钢材的粘结力非常强，使得夹层板结构的整体性更好，均匀化应力分布并能够抑制主体钢结构裂纹的扩展。

隔板在聚氨酯弹性体钢夹层板结构中是必不可少的构件，在整个结构体系既起到增强结构抗弯能力和提高稳定性的作用，还作为腔室分隔的支撑物保证结构加工过程中的完整性。本文以隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板结构为研究对象，对其使用不同的方法进行等效计算分析，同时结合基于应变能密度的有限元分析方法进行计算和对比。

1 夹层板结构等效方法概述

在实际结构中，聚氨酯弹性体钢板夹层结构常常采用图 1 所示的隔板式分隔结构^[15]。夹层板结构中隔板构件的壁厚较小，且处在夹芯内部，在受到横力作用时常常起到承担剪力的作用。填充的聚氨酯弹性体材料由于与周围内壁钢材结合紧密，所以微观尺度上表现为与隔板及面板结构的变形保持一致。同时，由于聚氨酯弹性体的存在能有效地抑制胞元内部微观结构上的屈曲，并使在微观尺度上应力分布均匀化，因此，本文在等效分析计算公式推导过程中均假设面板、隔板与夹芯之间位移是连续的，可以完全实现弯矩或剪力的传递作用，并没有考虑到内部胞元结构的局部效应，比如内壁和面板的局部屈曲以及面板和隔板连接部位的应力集中。

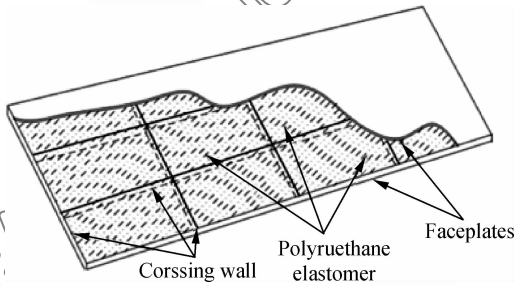


图 1 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板结构示意图

Fig. 1 Sketch for sandwich plate with polyurethane elastomer core reinforced by crossing walls

本文拟采用的等效分析方法可分为 3 种，如图 2 所示。第 1 种是在不考虑结构剪切变形的情况下将隔板夹层结构整体等效为单层正交各向异性薄板；第 2 种方法是将其等效为三层均为正交各向异性材料组成的夹芯板结构，从而可以利用经典的正交各向异性夹层板理论进行分析。第 3 种是在考虑夹芯剪切变形的情况下，将其等效为两层各向同性面板和中央夹有正交各向异性夹芯的结构。

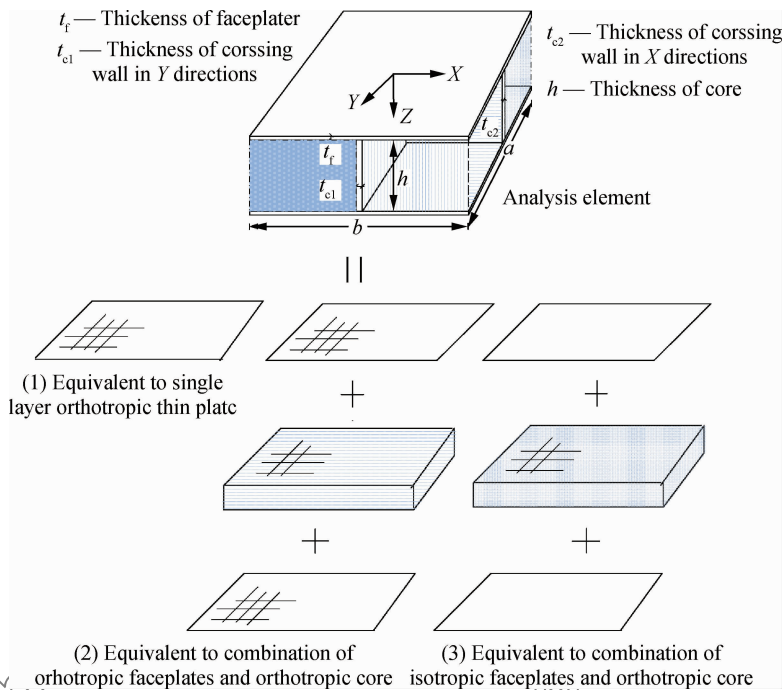


图2 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板等效方法示意图

Fig. 2 Sketch of equivalent method for sandwich plate with polyurethane elastomer core and reinforced crossing walls

2 不考虑剪切变形的等效计算方法

2.1 公式推导

当隔板式聚氨酯弹性体钢夹层板结构内部的加筋隔板间距较小、厚度相对较大时,芯材的抗弯刚度较大,这种情况下整体夹层板结构的剪切变形较小,可以忽略。此时,由均匀的面板、聚氨酯弹性体和具有正交各向异性的隔板共同组成的结构可以看作具有正交各向异性的单层板结构。其简化方式如图2中第1种简化方法所示。

取其中一个隔板夹层结构单元体进行分析,单元体示意图及坐标系如图2所示,对于此组合结构的分析有如下假设:(1)单元中的隔板刚度较大,其在面外的弯曲刚度不可忽略,可以将隔板看作板架结构中的横梁(X方向)和纵桁(Y方向)。隔板间隔和厚度在各自方向上相同,上下面板厚度也相同,即夹芯板在X方向和Y方向的中性层同在板的中面上。(2)夹芯板弯曲时中面仍符合直法线假设,且填充的聚氨酯弹性体材料与隔板和面板紧密结合,不发生开裂、脱胶。面层和夹芯为一整体,发生共同的弯曲变形,在面/芯界面上位移保持连续。(3)忽略隔板的抗扭刚度,忽略挠度中的剪切变形分量,上下面板中的剪应力合力形成面板的扭矩。面板处于平面应力状态。

在不考虑内部充入的聚氨酯弹性体材料时,文献[16]给出了等效为正交各向异性板的计算公式,此处使用类似的方法来计算充入聚氨酯弹性体材料后的计算公式。处于平面应力状态面板的应力-应变关系可以表示为

$$\begin{cases} \sigma_{fx} = \frac{E_f}{1-\mu_f^2}(\epsilon_x + \mu_f \epsilon_y) \\ \sigma_{fy} = \frac{E_f}{1-\mu_f^2}(\epsilon_y + \mu_f \epsilon_x) \end{cases} \quad (1)$$

本文中 E 为材料弹性模量, μ 为泊松比, ϵ 和 σ 分别表示应变和应力。针对不同类型的材料,以下标来进行区分,下标 f 代表面板,下标 c 代表隔板材料,下标 p 代表充入的聚氨酯弹性体材料; x 、 y 和 z 分别表示不同的坐标方向。例如, E_f 为面层钢板的弹性模量, σ_{fx} 表示面板材料沿 x 方向的应力。由于一般情况下面板材料和隔板材料相同,后续的计算中隔板将使用与面板相同的材料参数。将下式

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2)$$

代入式(1)可得面板和夹芯中各点的应力值。对于面板有

$$\begin{cases} \sigma_{fx} = -\frac{E_f z_f}{1-\mu_f^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{fy} = -\frac{E_f z_f}{1-\mu_f^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

其中, z_f 为面板到中性层的距离。对于隔板与弹性体共同组成的夹芯结构,其沿 x 方向和 y 方向的隔板应力为

$$\begin{cases} \sigma_{cx} = E_f \epsilon_x = -E_f z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \sigma_{cy} = E_f \epsilon_y = -E_f z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad (4)$$

其中, σ_{cx} 、 σ_{cy} 为夹芯隔板的应力。对于填充的硬质聚氨酯弹性体夹芯材料,其内部应力为

$$\begin{cases} \sigma_{px} = E_p \epsilon_x = -E_p z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \sigma_{py} = E_p \epsilon_y = -E_p z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad (5)$$

其中, E_p 为填充的聚氨酯弹性体夹芯材料的弹性模量。由以上应力的表达式,可以计算各截面在两个方向的弯矩。其中 x 方向单位长度上的弯矩值为

$$M_x = \int_{Af} \sigma_{fx} z_f dA + \int_{Ac} \sigma_{cx} z dA + \int_{Ap} \sigma_{px} z dA \quad (6)$$

积分式下的 A 表示在对各自材料的截面的面积积分,将式(3)~式(5)代入式(6)可得

$$M_x = \int_{Af} -\frac{E_f}{1-\mu_f^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z_f^2 dA + \int_{Ac} -E_f z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA + \int_{Ap} -E_p z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA \quad (7)$$

式(7)又可以写为

$$M_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\int_{Af} E_f z_f^2 dA + \int_{Ac} E_f z^2 dA + \int_{Ap} E_p z^2 dA \right] - \frac{\mu_f E_f}{1-\mu_f^2} \left(\mu_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{Af} E_f z_f^2 dA \quad (8)$$

定义综合抗弯刚度为

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{Af} E_f z_f^2 dA + \int_{Ac} E_f z^2 dA + \int_{Ap} E_p z^2 dA \\ I_0 &= \int_{Af} E_f z_f^2 dA \end{aligned} \quad (9)$$

则式(7)可以写成

$$M_x = -\frac{1}{1-\mu_f^2} [I_x(1-\mu_f^2) + \mu_f^2 I_0] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu_f I_0}{1-\mu_f^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

令

$$\begin{cases} D_x = -\frac{1}{1-\mu_f^2} [I_x(1-\mu_f^2) + \mu_f^2 I_0] \\ D_1 = \frac{\mu_f I_0}{1-\mu_f^2} \end{cases} \quad (11)$$

考虑 y 方向的弯矩值,同理可以算得

$$D_y = -\frac{1}{1-\mu_f^2} [I_y(1-\mu_f^2) + \mu_f^2 I_0] \quad (12)$$

则 x 和 y 方向单位长度的弯矩值可以写为

$$\begin{cases} M_x = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -\left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (13)$$

由于假设扭矩由上下面板承担,则扭矩可以写为

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_{Af} \tau_{xy} z_f dA = -2G_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{Af} z_f^2 dA \\ &= -\frac{I_0}{1+\mu_f} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$D_{xy} = -\frac{I_0}{2(1+\mu_f)} \quad (15-1)$$

则

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (15-2)$$

由上面的推导出 D_x 、 D_y 、 D_{xy} 和 D_1 构成了正交异性薄板弹性矩阵中的各参数,根据正交各向异性薄板的平衡方程:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (16)$$

q 为施加的外部载荷,带入相对应的边界条件,进而可以通过数值方法或者有限元方法来求得薄板在各种载荷作用下的力学响应。

2.2 算例分析与讨论

将 1.1 节分析获得的前述各等效参数表达式与文献[15]进行对比,发现其差别主要表现在综合抗弯刚度 I_x 和 I_y 上,由于考虑硬质夹芯的弯曲刚度,使得综合抗弯刚度提高。下面针对四种不同隔板间距的模型进行对比分析,计算其隔板和填充的弹性体在整体综合抗弯刚度中的百分比。采用的四种间距尺寸分别代表了隔板间距由小到大的情况,如表 1 所示。其中隔板厚度均设为 5 mm,夹芯与隔板的高度 h 为 200 mm,上下面板厚度均为 10 mm,面板弹性模量 $E_f = 2.05 \times 10^5$ MPa,聚氨酯弹性体的弹性模量^[12] $E_p = 800$ MPa,单元尺寸分别为夹芯高度尺寸的 1 倍、5 倍、15 倍和 50 倍,分别计算夹芯及中央隔板的抗弯刚度在其综合抗弯刚度中的分数 R_{px} 和 R_{py} 。

计算结果表明,充入的聚氨酯弹性体在整体结构中所起到的抗弯作用与隔板间距关系不大,在本算例中,当隔板间距大于 5 h 后,其在整体结构中的

表 1 不同间距隔板及聚氨酯弹性体夹芯的弯曲刚度分数

Table 1 Rigid fraction for different crossing wall space and polyurethane elastomer core

	A/mm	B/mm	$R_{cx}/\%$	$R_{cy}/\%$	$R_{px}/\%$	$R_{py}/\%$
1	200	300	6.95	4.74	1.06	1.09
2	1 000	1 500	1.47	0.99	1.14	1.15
3	3 000	4 500	0.50	0.33	1.16	1.16
4	10 000	15 000	0.15	0.01	1.16	1.16

Notes: A—length; B—width; R_{cx} , R_{cy} —rigid proportion of crossing walls in x and y directions; R_{px} , R_{py} —rigid proportion of polyurethane elastomer core in x and y directions.

弯曲刚度贡献趋于稳定, 大概在 1.16% 左右。在间距等于 h 时, 其抗弯刚度占总体刚度的 5% 左右, 当间距大于 $15h$ 时, 隔板弯曲刚度所起的作用降至 0.5% 以下, 可以忽略不计。所以当隔板较密时, 在隔板加筋夹层结构中其充入的聚氨酯弹性体对结构的抗弯性能不会有明显的提高, 这和文献[9-11]的结论是一致的。但是, 当隔板间距较大时, 虽然充入的弹性体对于结构的总体刚度贡献不大, 但是由于聚氨酯弹性体对面板和隔板的约束作用, 其具有良好的整体性。同时, 也使得与隔板连接的面板计算宽度增加, 进而能够提高结构的屈曲性能和弯曲性能。因此, 一般来说, 在不考虑结构剪切变形的时候, 可以不考虑所填充的聚氨酯弹性体的抗弯刚度, 从而可以将整体结构等效为无填充物的单层正交各向异性板进行分析和计算。

3 考虑横向剪切变形的夹芯等效参数计算

当聚氨酯弹性体钢夹层板的隔板间距相对较大, 且夹芯厚度较大, 聚氨酯弹性体夹芯连同隔板会呈现出相对较软的性质, 此时在横向载荷作用下结构的横向剪切变形和压缩变形不可忽略, 这种情况下采用夹层板理论进行计算并考虑夹芯剪切变形的影响可以获得更高的精度。同时, 通过理论计算获得的等效参数更加易于在有限元软件中使用均匀化模型来进行数值模拟。本节将对夹层结构中的胞元体使用理论推导的方法来确定等效参数, 整体结构的简化方法如图 2 中的第 3 种方法所示。这种方法应用比较有效, 很多文献都采用这种方法并获得了良好效果。如王红霞^[17]、富明慧^[18]等分别获得了三角形夹芯夹层结构和蜂窝夹层结构的等效参数。本节选取如图 3 所示的夹芯胞元结构进行分析。

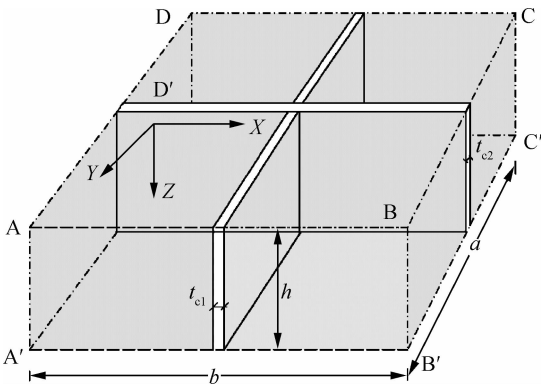


图 3 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板复合夹芯等效参数计算胞元结构示意图

Fig. 3 Element sketch for analyzing equivalent parameters of combined core in polyurethane sandwich plate reinforced by crossing walls

3.1 等效表观密度 ρ_c

胞元的等效表观密度为胞元总体质量和总体积之比, 可以由下式计算:

$$\rho_c = \frac{W_c}{V_c} = \frac{\rho_1(at_{c1} + bt_{c2}) + \rho_2(a - t_{c2})(b - t_{c1})}{ab} \quad (17)$$

其中: a 和 b 分别为胞元的长度和宽度, W_c 为微元的质量, V_c 为微元的体积, ρ_1 和 ρ_2 分别为隔板和弹性体的密度, t_{c1} 和 t_{c2} 分别为沿 x 方向和 y 方向分布的隔板厚度。

3.2 竖向弹性模量 E_{cz}

竖向弹性模量常用于考虑夹芯材料的可压缩性分析, 根据前述弹性体与隔板产生共同竖向变形的假设, 在夹芯单元体上施加沿 x 方向的载荷 p (图 3), 产生了共同竖向应变 ϵ_{z0} , 可以建立力的平衡方程:

$$abE_{cz}\epsilon_{z0} = E_p\epsilon_{z0}(a - t_{c2})(b - t_{c1}) + E_s\epsilon_{z0}(at_{c1} + bt_{c2}) \quad (18-1)$$

化简可得夹芯的竖向弹性模量:

$$E_{cz} = \frac{E_p(a - t_{c2})(b - t_{c1}) + E_f(at_{c1} + bt_{c2})}{ab} \\ = E_p + \frac{1}{b}E_f - E_p\left(\frac{t_{c1}}{b} + \frac{t_{c2}}{a}\right) \quad (18-2)$$

计算过程中略去了高阶微量 $(t_{c1}t_{c2})/(ab)$ 。

3.3 等效横向剪切弹性模量 G_{cxz} 和 G_{cyz}

等效横向弹性模量可以应用应变能等效原理进行计算。首先计算 G_{cxz} , 单元体受到剪力 Q_{cxz} 的作用时, 其剪力流如图 4 的四分之一单元体内所示, 在剪力作用下单元体的变形能为弹性体剪切变形能和

隔板变形能之和,在平行于剪力作用方向上的隔板,仅考虑隔板的剪切变形能,则隔板和弹性体的剪切变形能为:

$$\begin{cases} u_{cs} = \frac{1}{2} \tau_{cs} \gamma_{crz} = \frac{1}{2} G_s \gamma_{crz}^2 \\ u_{cp} = \frac{1}{2} \tau_{cp} \gamma_{crz} = \frac{1}{2} G_p \gamma_{crz}^2 \end{cases} \quad (19)$$

其中: γ_{crz} 为剪力 Q_{crz} 作用下产生的隔板与聚氨酯弹性体共同的剪切变形; τ_{cs} 和 τ_{cp} 分别为相同剪应变 γ_{crz} 作用下,分别在钢质隔板和聚氨酯弹性体夹芯上产生的剪应力;而图中 τ_{csy} 、 τ_{csx} 、 τ_{cpx} 、 τ_{cpx} 分别为 τ_{cs} 和 τ_{cp} 在 y 方向和 x 方向的剪应力分量。

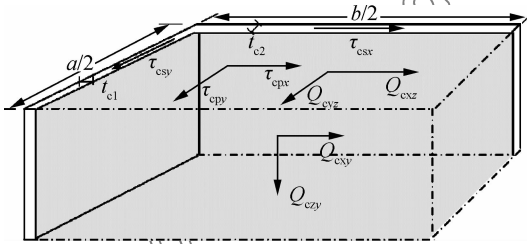


图4 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板复合夹芯等效参数分析的1/4胞元体与局部剪力流

Fig. 4 1/4 element sketch and shearing flow for analyzing equivalent parameters of combined core in polyurethane sandwich plate reinforced by crossing walls

在垂直于剪力方向的隔板,由于隔板高度远大于隔板厚度,所以不考虑其剪切变形能而只考虑其弯曲变形能。此处隔板的弯曲变形能为

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_f I_{cy}}{h} \gamma_{crz}^2 \quad (20)$$

其中, I_{cy} 为沿 y 方向分布的隔板在沿 x 方向弯曲时的惯性矩:

$$I_{cy} = \frac{at_c1^3}{12} \quad (21)$$

总变形能为

$$\begin{aligned} U_c &= u_{cf} V_{cf} + u_{cp} V_p + W \\ &= \frac{1}{2} h \gamma_{crz}^2 \left[G_f b t_{c2} + G_p (a - t_{c2})(b - t_{c1}) + \frac{E_f a t_{c1}^3}{12 h^2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

同样,等效单元体的变形能与(19)式类似,可以写成

$$U_c = \frac{1}{2} G_{crz} \gamma_{crz}^2 abh \quad (23)$$

令式(23)与式(22)相等,则可以获得等效弹性模量 G_{crz} 的表达式:

$$G_{crz} = \left(1 - \frac{t_{c1}}{b} - \frac{t_{c2}}{a} \right) G_p + \frac{t_{c2}}{a} G_f + \frac{E_f t_{c1}^3}{12 h^2 b} \quad (24)$$

同理,用类似的方法可以获得 G_{cxy} 的表达式:

$$G_{cxy} = \left(1 - \frac{t_{c1}}{b} - \frac{t_{c2}}{a} \right) G_p + \frac{t_{c1}}{b} G_f + \frac{E_f t_{c2}^3}{12 a} \quad (25)$$

3.4 面内等效剪切弹性模量 G_{cxy}

如图4所示,施加一剪力 Q_{cxy} ,当以2.3节相同的方法,对单元体施加剪切变形时,两个方向的隔板均发生弯曲变形,同样其剪切变形能可以忽略不计,假设产生的剪应变为 γ_{cxy} ,认为每个隔板产生的弯曲角度为 $\gamma_{cxy}/2$ 。则均匀弹性体的剪切变形能为

$$u_{cp} = \frac{1}{2} \tau_{cp} \gamma_{cxy} = \frac{1}{2} G_p \gamma_{cxy}^2 \quad (26)$$

隔板的弯曲变形能为

$$\begin{aligned} W &= 2 \left[\frac{1}{2} \frac{E I_{cx}}{b/2} \frac{\gamma_{cxy}^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{E I_{cy}}{a/2} \frac{\gamma_{cxy}^2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{E I_{cx} \gamma_{cxy}^2}{b} + \frac{E I_{cy} \gamma_{cxy}^2}{a} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

其中, I_{cx} 、 I_{cy} 为隔板在夹芯面内弯曲的惯性矩:

$$I'_{cx} = \frac{ht_{c2}^3}{12}, I'_{cy} = \frac{ht_{c1}^3}{12} \quad (28)$$

总变形能为

$$\begin{aligned} U_c &= u_{cs} V_s + W \\ &= \frac{1}{2} h \gamma_{cxy}^2 G_p (a - t_{c2})(b - t_{c1}) + \frac{1}{24} E_f h \gamma_{cxy}^2 \left(\frac{t_{c2}^3}{b} + \frac{t_{c1}^3}{a} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

进而可以算得等效剪切弹性模量 G_{cxy} :

$$G_{cxy} = \left(1 - \frac{t_{c1}}{b} - \frac{t_{c2}}{a} \right) G_p + \frac{E_f}{12 ab} \left(\frac{t_{c2}^3}{b} + \frac{t_{c1}^3}{a} \right) \quad (30)$$

3.5 面内等效弹性模量 E_{cx} 和 E_{cy}

在夹芯单元体上施加沿 x 方向的载荷 p ,在载荷的作用下产生共同的变形 ϵ_{x0} ,建立 x 方向的力的平衡方程:

$$qh E_{cx} \epsilon_{x0} = E_p \epsilon_{x0} ah + E_s \epsilon_{x0} ht_{c2} \quad (31)$$

进一步可以求得 E_{cx} 的表达式:

$$E_{cx} = E_p + E_s \frac{t_{c2}}{a} \quad (32)$$

同理可以求得 E_{cy} 的表达式:

$$E_{cy} = E_p + E_s \frac{t_{c1}}{b} \quad (33)$$

3.6 等效泊松比 μ_{cxy} 、 μ_{cyx} 和 μ_{czz}

令图4中单元体沿 x 方向产生一个应变,大小为 ϵ_{x0} ,则在 y 方向产生的应变可以由下式获得:

$$\epsilon_{cy0} = \frac{-(a - t_{c1}) \epsilon_{cx0} \mu_p - \epsilon_{cx0} \mu_f t_{c2}}{a} \quad (34)$$

其中 μ_p 和 μ_s 分别为弹性体和隔板的泊松比。则

μ_{cxy} 可以写为

$$\mu_{cxy} = \left| \frac{\epsilon_{cy0}}{\epsilon_{cx0}} \right| = \left(1 - \frac{t_{c2}}{a} \right) \mu_p + \frac{\mu_f t_{c2}}{a} \quad (35)$$

这里计算时未考虑 y 方向厚为 t_{c1} 的隔板对整体横向变形的约束作用, 如果 μ_p 和 μ_f 不相同, 将导致在 z 方向变形的不协调, 当在 x 方向产生 ϵ_{cx0} 的应变时, 聚氨酯弹性体夹芯沿 z 方向的横向应变为 $-h\epsilon_{cx0}\mu_p$, 而 y 方向隔板发生横向应变为 $-\epsilon_{cx0}\mu_s h$, 两个应变在界面位置不协调, 则说明此时存在附加应力, 使得横向变形减少。如果忽略这种变形的不协调性, 那么此时计算得到的泊松比值应比实际偏大。

对于 μ_{cyz} 和 μ_{crz} , 如果均忽略变形的不协调性, 则其值均为 μ_p , 将导致较大的误差。因此, 这里不适合用理论推导的方法来计算泊松比, 可以使用后面所提到的有限元方法进行计算。

4 等效为正交各向异性夹层板的计算方法

经典的夹层板理论考虑了夹芯层的剪切变形, 由于面板和夹芯材料在尺寸和模量上的差异, 横向载荷作用下, 认为面板仅承担弯矩作用, 而夹芯仅承担横向剪切作用。这里考虑将填充了聚氨酯弹性体的隔板结构简化为传统的简单夹层结构, 这种结构的上下面板均为正交各向异性薄板, 薄板的抗弯刚度来自面板和夹芯及隔板的抗弯刚度之和, 如图 2 中第 2 种方法所示。薄板的抗弯刚度与前述 1 节中的 (11)、(12) 和 (15) 式相同, 考虑到面板自身的抗弯刚度, 则各参数应为

$$\begin{cases} D'_x = -\frac{1}{1-\mu_i^2} \left[I_x (1-\mu^2) + \mu_i^2 I_0 + \frac{E_i t^3}{6} \right] \\ D_1 = \frac{\mu_i I_0}{1-\mu_i^2} \\ D_{xy} = -\frac{I_0}{2(1+\mu_i)} + G_f \frac{t^3}{6} \\ D_y = -\frac{1}{1-\mu_i^2} \left[I'_y (1-\mu_i^2) + \mu_i^2 I_0 + \frac{E_i t^3}{6} \right] \end{cases} \quad (36)$$

简单夹层板的夹芯仅仅考虑其剪切作用, 内部隔板的存 在使其剪切性能也存在各向异性。其抗剪切刚度则来自夹芯隔板和填充的聚氨酯弹性体材料。而隔板对填充的聚氨酯弹性体材料剪切能力的增强也体现在夹芯的面外剪切刚度上, 与前述 2.3 节中类似的计算方法相同, 剪切刚度可写为

$$\begin{cases} C_x = G_{crz} \frac{(h+t)^2}{h} \\ = \left[\left(1 - \frac{t_{c1}}{b} - \frac{t_{c2}}{a} \right) G_p + \frac{t_{c1}}{b} G_f + \frac{E_f h}{24a} \right] \frac{(h+t)^2}{h} \\ C_y = G_{cxy} \frac{(h+t)^2}{h} \\ = \left[\left(1 - \frac{t_{c1}}{b} - \frac{t_{c2}}{a} \right) G_p + \frac{t_{c2}}{a} G_f + \frac{E_f h}{24b} \right] \frac{(h+t)^2}{h} \end{cases} \quad (37)$$

由此可以带入文献[1]中的经典夹层板方程, 建立方程组进行求解。

5 基于有限元方法的等效参数计算方法

5.1 分析方法

当对隔板夹层结构进行高精度的有限元模型模拟时, 隔板的存 在必然导致单元数量的增多, 将夹芯看作三维的正交各向异性夹层材料是一个较好的等效方法。当用前述的方法计算来计算等效参数值时, 某些参数在利用变形协调的方法计算将无法得到统一的数值, 此外对于一些复杂的夹芯结构形式, 也无法通过简单的公式推导获得等效参数。这些问题都可以通过对胞元的精细化有限元模型分析来解决。很多文献^[11,19-20]均借助了有限元工具来进行分析, 文献[11]对蜂窝单元的壁板采用壳体单元进行模拟, 基于应变能等效的方法来获得蜂窝夹芯板结构的等效参数。本节采用类似的方法, 将隔板采用体单元进行模拟, 计算正交各向异性材料本构关系中的各个参数。简化方法如图 2 中第 3 种方法所示。夹层结构的等效参数可以表达为^[11]

$$C_{eff} = \frac{2U}{\epsilon_0 V} \quad (38)$$

由上式可知, 只要对所取单元施加一单位均匀应变, 使用有限元软件中对离散单元应变能提取的工具,

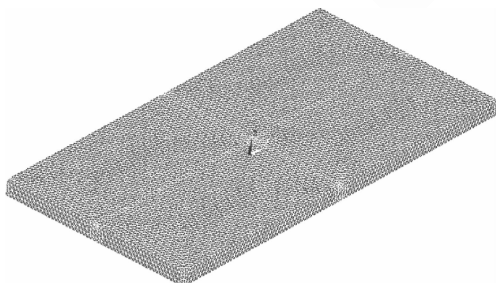


图 5 用于隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板等效参数分析的有限元模型(尺寸 3 000 mm×4 500 mm)

Fig. 5 FEM elements for analyzing equivalent parameters of polyurethane sandwich plate reinforced by crossing walls (size 3 000 mm×4 500 mm)

获得整体的应变能、体积和平均应变,进而可以计算出所需的参数。

对于三维正交各向异性材料,其本构方程为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{cx}} & \frac{\nu_{xy}}{E_{cx}} & \frac{\nu_{xz}}{E_{cx}} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_{cy}} & \frac{1}{E_{cy}} & \frac{\nu_{yz}}{E_{cy}} \\ \frac{\nu_{zx}}{E_{cz}} & \frac{\nu_{zy}}{E_{cz}} & \frac{1}{E_{cz}} \\ & & & \frac{1}{G_{cyz}} \\ & & & & \frac{1}{G_{cxz}} \\ & & & & & \frac{1}{G_{cxy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (39)$$

选取胞元如图 3 所示,计算采用的有限元软件为 ANSYS13.0,考虑到隔板间隔尺寸对比弹性体的宽度并非是小量,采用体单元 solid45 对弹性和隔板进行建模。对于不同模型尺寸,网格划分后单元体的尺寸也不同。图 5 所示为模型尺寸为 3 000 mm×4 500 mm×200 mm,对应于表 1 中类型 3 的算例。使用体单元划分网格,隔板单元尺寸为 5 mm×25 mm×25 mm,弹性体尺寸为 25 mm×25 mm×25 mm,其单元数为 175 200 个。对于类型 4,如果采用相同的单元尺寸则导致单元数量过多,如果较少则会导致隔板单元计算精度下降,所以采用映射网格划分方法,越靠近计算单元的四角,网格越疏,类型 4 的单元数为 224 200 个。隔板与弹性体之间的连接采用共用节点的方法,保证相同位置节点自由度完全耦合,在外部载荷作用下发生共同的变形。

静力计算的方法采用小变形弹性分析,分别对其施加相应的不同初始单位位移,对其进行分析和计算。单纯夹芯的面外参数计算可以通过施加单元局部的微小应变来获得,此时隔板和聚氨酯弹性体之间发生共同变形,面板的约束作用可以忽略不计。但当计算面内参数时,必须要考虑面板的约束作用,所以这里假设面板的刚度无限大,使夹芯的上、下表面能够产生共同变形而不会发生翘曲,即在计算面内变形时将夹芯计算单元的上下表面的 z 方向自由度耦合在一起。表 2 是对图 3 中的有限元模型进行分析时所施加的边界条件。

表 2 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板等效参与有限元模型的边界条件

Table 2 Applied boundary constrains on FEM model for analyzing equivalent parameters of polyurethane analyzing plate reinforced by crossing walls

	AA' B'B	CC' D'D	BB' C'C	AA' D'D	AB CD	A'B' C'D'
E_x			$U_x=u$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$		
E_y	$U_x=0$ $U_y=u$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$				
E_z				$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=u$ $U_y=0$ $U_z=0$
G_{yz}			$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=u$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$
G_{xz}	$U_x=u$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=-u$ $U_y=0$ $U_z=0$			$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$
G_{xy}	$U_y=0$ $U_x=0$ $U_z=0$	$U_x=u$ $U_y=0$ $U_z=0$			$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_y=0$ $U_z=0$
μ_{xy}	$U_z=0$	$U_z=0$	$U_x=u$ $U_z=0$	$U_x=0$ $U_z=0$		
μ_{zy}	$U_x=0$ $U_y=0$	$U_x=0$ $U_y=u$	$U_x=0$ $U_y=0$	$U_x=0$ $U_y=0$		
μ_{xz}	$U_y=0$	$U_y=0$	$U_x=u$ $U_y=0$	$U_x=0$ $U_y=0$		

Notes: U —Displacement boundary constrains; E —Modulus of elasticity; G —Modulus of elasticity in shear; μ —Poisson's ratio; Subscript x , y and z —Coordinate components, represent variables in different coordinates directions.

对于三个方向的弹性模量和剪切弹性模量,采用了与文献[11]类似的方法,但文献中并没有计算泊松比的差别,这里采用平均应变的方法对泊松比进行了计算,即根据泊松比的定义:

$$\nu_{ij} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} = \frac{\epsilon_{eqi}}{\epsilon_{eqj}} \quad (40)$$

ϵ_{eqi} 、 ϵ_{eqj} 是平均应变,即所有单元体在某方向的应变值的平均。

5.2 计算结果

对 1.2 节中同样的算例进行等效常数计算,取面板的泊松比为 0.28,弹性体的泊松比为 0.33,计算结果如表 3 所示。

表 3 隔板加筋聚氨酯弹性体钢夹层板单元体等效常数分析的理论值和 FEM 计算值
Table 3 FEM and theoretical results for equivalent constants calculation of polyurethane sandwich plate reinforced by crossing walls

	Method	E_{cx}/MPa	E_{cy}/MPa	E_{cz}/MPa	G_{yz}/MPa	G_{xz}/MPa	G_{xy}/MPa	μ_{xy}/MPa	μ_{zy}/MPa	μ_{xz}/MPa	Dens/ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
1	Theoretical	5 925	4 216	9 308	1 626	2 293	291	0.319	0.320	0.320	1425
	FEM	6 087	4 276	9 435	1 477	2 015	285	0.308	0.306	0.302	
2	Theoretical	1 825	1 483	2 502	567	701	300.5	0.320	0.320	0.320	1165
	FEM	1 859	1 513	2 589	514	684	293	0.315	0.313	0.310	
3	Theoretical	1 142	1 028	1 367	391	436	302	0.320	0.320	0.32	1122
	FEM	1 167	1 056	1 398	363	392	296	0.316	0.314	0.313	
4	Theoretical	903	868	970	320	343	303	0.320	0.320	0.320	1107
	FEM	911	874	976	301	317	296	0.316	0.314	0.313	

Notes: E —Modulus of elasticity; G —Modulus of elasticity in shear; μ —Poisson's ratio; Subscript x , y , z , xy , xz , and yz —Coordinate components and represent variables in different coordinate's directions.

从表 3 中的计算结果可以看出, (1) 在各种类型中, 有限元计算结果与理论推导出的公式计算结果大致相同, 误差均不超过 10%, 说明理论推导得出的结果是可以接受的。 (2) 对于夹芯材料等效弹性模量的计算, 拉压弹性模量总体误差较小, 其中 E_x 和 E_y 的结果误差比 E_z 的误差稍大, 这是因为有限元计算的过程中, 除施加对应方向的单纯应变外, 还必须施加额外的约束来使整体平衡, 这些约束增加了内部的应变能。 E_z 比 E_x 和 E_y 均大, 在类型 1 中约为两者之和, 而在其他类型中则小于两者之和, 这是因为在类型 1 中, 单向载荷作用下, 夹芯隔板所起到的作用远大于填充物, 夹芯的等效弹性模量近似等于仅仅由隔板计算得出的弹性模量。 而在类型 2、3、4 中, 随着填充的聚氨酯弹性体所占比重的增加, 均质的弹性体起了越来越多的作用, 使得各方向弹性模量的差别减小。 (3) 等效剪切弹性模量的计算结果与理论分析方法得到的结果相差较大, 其中有限元法获得的剪切弹性模量稍小, 这是因为理论计算时认为隔板和弹性体之间均发生相同的变形, 相互之间没有作用, 而在有限元计算时考虑了他们之间的共同作用, 使得总应变能降低。 等效剪切弹性模量在两个方向上的隔板间隔越小时, 相差越大, 而在间隔变大时, 两个方向的剪切弹性模量相差越来越小, 这是由于聚氨酯弹性体所占的体积份数增加的缘故。 (4) 夹芯在各个方向的等效泊松比相差均不大, 随着隔板间距的增加, 泊松比也越来越接近填充的聚氨酯弹性体的泊松比。 泊松比的有限元法计算由于采用的是单元体的平均应变, 所以当发生相同的单元应变时, 由于隔板尺寸较小, 使得单元网格在隔板处较密, 所以导致计算得到的泊松比倾向

于隔板材料的泊松比。 而理论计算时采用的泊松比近似于聚氨酯弹性体的泊松比, 所以实际的等效泊松比应该位于两个值之间, 而与有限元法计算得到的泊松比更为接近。

6 结 论

(1) 不考虑夹层结构的剪切变形时, 填充聚氨酯弹性体的隔板加筋夹层结构可以等效为正交各向异性的薄板结构进行计算, 当隔板间距大于 15 倍夹芯高度时, 填充的聚氨酯弹性体在整体夹层板的抗弯刚度贡献均可以忽略不计。 当隔板间距与夹芯高度的比值小于 1 时, 可以不考虑填充的聚氨酯弹性体所起的作用。

(2) 考虑夹芯剪切变形时, 可以将隔板加筋聚氨酯弹性体钢板夹层结构夹芯胞元进行理论分析获得正交各向异性夹芯材料的等效参数, 进而可以应用经典正交各向异性夹层板理论进行分析和计算。

(3) 通过基于应变能的有限元方法来计算隔板加筋聚氨酯弹性体钢板胞元夹芯结构的等效参数, 并与理论分析结果进行对比, 结果表明理论分析获得的结果与有限元分析结果误差在 10% 以内。

参考文献:

[1] 赵忠明, 姚晓娜, 刘伟. 夹层板壳的弯曲稳定与振动[M]. 科学出版社, 1977: 1-2.
ZHAO Z M, YAO X N, LIU W. Bending, stability and vibration of sandwich plate[M]. Science Press of China, 1977: 1-2 (in Chinese).
[2] LIBOVE C, BATDORF S B. A general small-deflection theory for flat sandwich plates[R]. United States, 1948.
[3] LIBOVE C, HUBKA R E. Elastic constants for corrugated-core sandwich plates[J]. Technical Report Archive & Image

- Library, 1951.
- [4] KELSEY S, GELLATLY R A, CLARK B W. The shear modulus of foil honeycomb cores[J]. *Aircraft Engineering*, 1958, 30(358): 294-302.
- [5] GIBSON L J, ASHBY M F. *Cellular solids: Structure and Properties*[M]. Pergamon, Oxford, 1988: 1-15.
- [6] TALBI N, BATTI A, AYAD R, et al. An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard[J]. *Composite Structures*, 2009, 88(2): 280-289.
- [7] HASSANI B, EMEST H. A review of homogenization and topology optimization I: Homogenization theory for media with periodic structure[J]. *Computers & Structures*, 1998, 69(6): 707-717.
- [8] 刘均. 方形蜂窝夹层结构振动与冲击响应分析[D]. 武汉:华中科技大学, 2009.
- LIU J. *Vibration and impact responses for sandwich structure with rectangle honey comb core*[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2009 (in Chinese).
- [9] MCSHANE G J, RADFORD D D, DESHPANDE V S, et al. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading[J]. *European Journal of Mechanics A Solids*, 2006, 25(2): 215-229.
- [10] VAZIRI A, XUE Z, HUTCHINS W. Sandwich plates with polymer foam-filled cores[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, 1(1): 97-127.
- [11] BURLAYENKO V N, SADOWSKI T. Effective elastic properties of foam-filled honeycomb cores of sandwich panels[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(12): 2890-2900.
- [12] 邱克鹏, 张卫红, 孙士平. 蜂窝夹层结构等效弹性常数的多步三维均匀化数值计算分析[J]. *西北工业大学学报*, 2006, 24(4): 518.
- QIU K, ZHANG W H, SUN S P. Numerical computation of effective elastic constants of the honeycomb sandwich panel with the 3-D multi-step homogenization [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2006, 24(4): 518 (in Chinese).
- [13] BROOKING M A, KENNEDY S J. The performance, safety and production benefits of SPS structures for double hull tankers[C]. *The RINA Conference on double Hull Tankers in London*, 2004, 25.
- [14] 尚高峰. 轻量化船舶结构极限强度研究[D]. 中国船舶结构研究中心, 2011.
- SHANG G F. *A study on ultimate strength of lightweight ship structure*[D]. China Ship Scientific Research Centre, 2011 (in Chinese).
- [15] KENNEDY S J. An innovative “No Hot Work” approach to hull repair on in-service FPSOs using sandwich plate system overlay[C]. *Offshore Technology Conference*, 2003.
- [16] 陈铁云, 陈柏真. *船舶结构力学*[M]. 上海交通大学出版社, 1991: 145-160.
- CHEN T Y, CHEN B Z. *Structural mechanics of shipbuilding*[M]. Press of Shanghai Jiao Tong University, 1991: 145-160 (in Chinese).
- [17] 王红霞, 王德禹, 李吉. 三角形夹芯板夹心层的等效弹性常数[J]. *固体力学学报*, 2007, 28(2): 178-182.
- WANG H X, WANG D Y, LI J. Equivalent elastic constants of truss core sandwich plates[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2007, 28(2): 178-182 (in Chinese).
- [18] 富明慧, 尹久仁. 蜂窝芯层的等效常数[J]. *力学学报*, 1999, 31(1): 113-118.
- FU M H, YIN J R. Equivalent parameters for honey comb core[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(1): 113-118 (in Chinese).
- [19] 孙士平, 赖余东. 蜂窝胞尺寸对夹芯板性能的影响研究[J]. *航空材料学报*, 2014, 34(2): 61-66.
- SUN S P, LAI Y D. Effects of honeycomb cell size on performances of sandwich panels[J]. *Journal of Aeronautical Materials*, 2014, 34(2): 61-66 (in Chinese).
- [20] CHENG Q H, LEE H P, LU C. A numerical analysis approach for evaluating elastic constants of sandwich structures with various cores[J]. *Composite Structures*, 74(2): 228-236.