

DOI: 10.13801/j.cnki.fhclxb.20151214.002

智能材料电-磁-热-弹耦合性能的 细观力学模型

钟秩峰^{1, 2, *}, 矫立超^{1, 2}, 周小平^{1, 2}, 杨文文^{1, 2}, 杨旦旦^{1, 2}

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室(重庆大学), 重庆 400045)

摘 要: 基于变分渐近均匀化方法建立能预测智能材料电-磁-热-弹全耦合性能的细观力学模型。从智能材料电-磁-热-弹耦合本构方程中推导能量泛函变分表达式出发, 利用单胞细观尺度与宏观尺度比作为小参数将材料的能量泛函渐近扩展为系列近似泛函, 通过最小化近似泛函求解场变量的波动函数, 从而建立逼近物理和工程真实性的细观力学模型, 并通过有限元数值实现。通过 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 纤维/环氧树脂复合材料算例表明: 构建的细观力学模型可准确预测电-磁-热-弹耦合性能和重构多物理场局部分布。

关键词: 变分渐近法; 均匀化; 复合材料; 细观力学; 电磁热弹

中图分类号: TB330.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2016)08-1725-08

除传统力场外, 智能材料还受电、磁和温度等多物理场作用。各物理场之间会产生耦合作用, 建立能预测这种多场耦合性能的分析工具对有效设计和分析智能材料至关重要。除了多物理场相互作用的复杂性外, 智能材料为了在工程实用中获得所需要的理想性能, 往往由多种组分构成, 同时这种非均匀智能材料可能会产生不属于任何组分的新耦合性能^[1], 如压电和压磁材料构成的智能复合材料会产生磁电效应, 该效应由组分之间相互作用产生, 只出现在复合材料中。活性材料的力学本构响应也可与非力学效应耦合^[2], 如温度场下的压电材料可表现出压电和热电耦合效应。

国外 Li 和 Dunn^[3]应用 Mori-Tanaka 法^[4]预测了磁电弹完全耦合复合材料的平均场和有效模量, 得到了圆柱形纤维构成的层状两相复合材料有效电磁弹属性的封闭表达式。Aboudi^[5]利用高保真广义细胞法(HFGMC)发展了预测磁-电-热-弹复合材料有效属性的细观力学方法, 该模型预测结果与 Mori-Tanaka 模型相吻合。Lee 等^[6]发展了基于有限元分析的细观力学方法, 通过对代表体元(RVE)的平均化确定有效介电常数、磁、力和耦合场性能, 该性能是体积分数、RVE 内纤维排列和纤维材料属

性的函数, 并特别强调了压电和压磁纤维的极化方向影响。国内外对电-磁-热-弹 4 场耦合研究文献较少, 原因在于加入热耦合方程后, 破坏了原有电-磁-弹 3 场耦合方程的很多优良特性, 提高了求解难度。申胜平等^[7]给出了以复变函数形式表示的二维压电热弹性问题通解, 并利用此解和 Stroh 方法研究了热电材料界面裂纹问题。

本文采用通用的细观力学建模框架——变分渐近均匀化法(VAMUCH)^[8-9]建立可预测智能材料有效属性(弹性, 压电, 压磁, 磁电耦合系数, 热应力系数, 热电系数, 热磁系数, 比热)和局部电、磁、热、弹多物理场分布的细观力学模型。VAMUCH 是变分渐近法^[10]在细观力学中的应用, 理论核心是单胞(Unio Cell)均匀化的变分渐近分析, 其中单胞定义为最小的代表体元。与双尺度渐近均匀化理论^[11-13](AHM, 也称为数学均匀化理论 MHT)不同的是: AHM 通过假设周期性边界条件下对未知函数的渐近分析得到多尺度渐近级数解; 而 VAMUCH 通过对变分泛函的渐近分析得到多尺度渐近级数解和周期性边界条件, 因此不需要特定假设(如几何形状、成分排列、边界条件以及局部场与全局场间特定关系等)。

收稿日期: 2015-09-06; 录用日期: 2015-11-05; 网络出版时间: 2015-12-14 14:19
网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20151214.1419.004.html
基金项目: 国家自然科学基金(11272363); 中央高校基本科研业务费专项资金(106112014CDJZR200017); 重庆市自然科学基金(cstc2016jcyjA0426)
通讯作者: 钟秩峰, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为复合材料力学。 E-mail: zhongjy58@sina.com

引用格式: 钟秩峰, 矫立超, 周小平, 等. 智能材料电-磁-热-弹耦合性能的细观力学模型[J]. 复合材料学报, 2016, 33(8): 1725-1732.
ZHONG Y F, JIAO L C, ZHOU X P, et al. Micromechanical modelling for electro-magneto-thermo-elastic coupling behavior of smart materials[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2016, 33(8): 1725-1732 (in Chinese).

1 理论基础

为构建合适的细观力学模型，只需引入 2 个与可识别单胞细观力学概念有关的基本假设：

假设 1:场变精确解具有单胞层面的体积平均值。定义 u_i 、 φ^e 和 φ^m 分别为单胞体积域 Ω 内的精确位移、电势和磁势，则存在平均位移 v_i 、电势 ψ^e 和磁势 ψ^m

$$\begin{cases} v_i = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_i d\Omega \equiv \langle u_i \rangle \\ \psi^e = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varphi^e d\Omega \equiv \langle \varphi^e \rangle \\ \psi^m = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varphi^m d\Omega \equiv \langle \varphi^m \rangle \end{cases} \quad (1)$$

假设 2:从单胞细观力学分析得到的材料有效属性与宏观结构几何尺寸、边界条件和加载条件无关。这意味着有效属性宏观上是材料固有属性。

值得注意的是，这些假设并不是强制性的。假设 1 的数学意义是场变量的精确解可通过单胞体积域上的积分得到；假设 2 意味着宏观分析中忽略材料特性中的尺寸效应，这也是传统连续介质力学中所做的假设。单胞细观力学分析仅在单胞特征尺度远小于材料宏观尺度时有效。

为便于理论推导，引入 3 个坐标系：2 个笛卡尔坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ，1 个整数坐标 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 。使用 $\mathbf{x}$ 作为全局坐标来描述宏观结构，与 x_i 平行的 y_i 作为局部坐标描述单胞。选择局部坐标 y_i 的原点为单胞的几何中心。若单胞为尺寸为 $2a_i$ 的立方体，则 $y_i \in [-a_i, a_i]$ 。整数坐标 n_i 唯一确定单胞在非均匀材料中的位置，与全局坐标系的关系可表示 $n_i = x_i/(2a_i)$ 。图 1 为非均匀智能(压电压磁)材料的坐标系统。应当强调的是理论不局限于图 1 所示的特定二维细观结构，而是可处理具有任意形状的多相广义单胞。

1.1 智能材料电-磁-热-弹耦合本构方程

一般而言，智能材料电-磁-热-弹完全耦合包括：压电-压磁耦合效应、热电效应、热磁效应和电磁效应。其线性本构方程可表示为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k - q_{kij} H_k + \Lambda_{ij} \Delta T \\ D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + k_{ik} E_k + a_{ik} H_k + p_i \Delta T \\ B_i = q_{ikl} \epsilon_{kl} + a_{ik} E_k + \mu_{ik} H_k + m_i \Delta T \end{cases} \quad (2)$$

式中： C_{ijkl} 、 e_{kij} 、 q_{kij} 、 Λ_{ij} 分别为弹性、压电、压磁和热应力张量 ($\Lambda_{ij} = -C_{ijkl} \alpha_{kl}$ ，其中： α_{kl} 为热膨胀应变

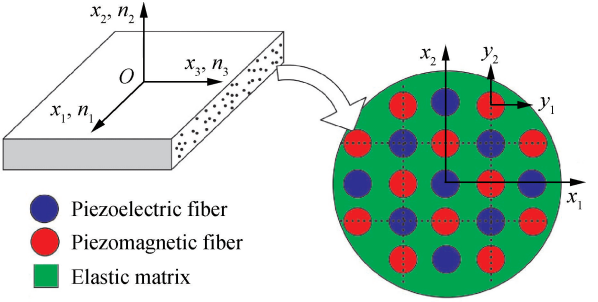


图 1 非均匀智能材料坐标系统
Fig. 1 Coordinate systems for heterogeneous smart materials

张量)； σ_{ij} 、 ϵ_{kl} 分别为应力和应变张量； k_{ik} 、 a_{ik} 、 μ_{ik} 分别为介电张量、磁电张量和磁通率张量； p_i 、 m_i 分别为热电张量和磁电张量； D_i 、 E_k 、 B_i 、 H_k 分别为电通密度矢量、电场矢量、磁通密度矢量和磁场矢量； ΔT 为实际温度和参考温度的差值； C_{ijkl} 为四阶瞬时切线刚度矩阵的元素(式中拉丁下标 $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ，下标重复时表示累加)。

定义广义矩阵 σ 和 ϵ 为

$$\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{22} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ -D_1 \ -D_2 \ -D_3 \ -B_1 \ -B_2 \ -B_3]^T \quad (3)$$

$$\epsilon = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{13} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{33} \ E_1 \ E_2 \ E_3 \ H_1 \ H_2 \ H_3]^T \quad (4)$$

则式(2)的紧凑矩阵形式可表示为

$$\sigma = L\epsilon + \eta\Delta T \quad (5)$$

式中： L 为 12×12 阶多物理场矩阵，含所有必要的电-磁-弹全耦合材料系数：

$$L = \begin{bmatrix} C & e & -q \\ e^T & -k & -a \\ -q^T & -a^T & -\mu \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中： C 为 6×6 的弹性常数子矩阵； e 为 6×3 的压电系数子矩阵； q 为 6×3 的压磁系数子矩阵； k 为 3×3 的介电系数子矩阵； a 为 3×3 的电磁耦合系数子矩阵； μ 为 3×3 的磁通率系数子矩阵。式(5)中的 η 是 12×1 阶含二阶 Λ_{ij} 、 p_i 和 m_i 的矩阵：

$$\eta = [\Lambda_{11} \ \Lambda_{12} \ \Lambda_{22} \ \Lambda_{13} \ \Lambda_{23} \ \Lambda_{33} \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ m_1 \ m_2 \ m_3]^T \quad (7)$$

材料的有效电-磁-热-弹性刚度矩阵可通过直接法和能量表达式 2 种方式定义：

$$\bar{\sigma} = L^* \bar{\epsilon} + \eta^* \Delta T \quad (8)$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right) d\Omega = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{L}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\eta}^* \Delta T + \frac{1}{2} c_v^* \frac{\Delta T^2}{T_0} \quad (9)$$

式中: c_v 为恒定单位体积下的比热; T_0 为无应力状态下材料的参考温度; 上画线项为均匀化后材料宏观分析使用的变量; 带星号项为细观模型计算得到的有效属性, 下同。

1.2 变分渐近均匀化细观力学模型

如假设 2 所暗示的那样, 可从虚构、未加载的完全由无穷多重单胞组成的非均匀材料中推导细观模型。这种虚构的材料的热力势等于存储在全部单胞中热力势的总和:

$$\Pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right) d\Omega \quad (10)$$

由于无数个单胞形成连续的非均质材料, 相邻单胞界面上的 u_i 、 φ^e 和 φ^m 应连续。根据连续介质概念^[14], 其连续性条件可用全局坐标表示为

$$\begin{cases} u_i|_{x_j}^{+j} = u_i|_{x_j+2a_j}^{-j} \\ \varphi^e|_{x_j}^{+j} = \varphi^e|_{x_j+2a_j}^{-j} \\ \varphi^m|_{x_j}^{+j} = \varphi^m|_{x_j+2a_j}^{-j} \end{cases} \quad (11)$$

式中: 上标“+j”、“-j”分别为位于单胞 $y_i = a_i$ 和 $y_i = -a_i$ 边界表面上的量, 下同。

智能材料承受均匀温差 ΔT , 相邻单胞之间的温度场的连续性条件自动满足。问题的精确解转换为式(1)和式(8)约束条件下最小化式(10)能量泛函总和。

引入 Lagrange 乘子, 将单胞细观力学分析的变分表述转换为求泛函的驻值点(最小化)问题:

$$J = \int_R \left[\left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right\rangle + \lambda_i (\langle u_i \rangle - v_i) + \lambda^e (\langle \varphi^e \rangle - \varphi^e) + \lambda^m (\langle \varphi^m \rangle - \varphi^m) + \int_{S_j} \gamma_{ij} (u_i|_{x_i}^{+j} - u_i|_{x_i+2a_i}^{-j}) dS_j + \int_{S_j} \alpha_j (\varphi^e|_{x_i}^{+j} - \varphi^e|_{x_i+2a_i}^{-j}) dS_j + \int_{S_j} \beta_j (\varphi^m|_{x_i}^{+j} - \varphi^m|_{x_i+2a_i}^{-j}) dS_j \right] dR \quad (12)$$

式中: λ_i 、 λ^e 、 λ^m 为施加式(1)平均约束引入的 Lagrange 乘子; γ_{ij} 、 α_j 、 β_j 为施加式(11)约束引入的 Lagrange 乘子; S_j 为垂直于 y_j 的单胞表面; R 为材料三维空间。

细观力学的主要目的是利用宏观场变量 v_i 、 φ^e 和 φ^m 找到微观场变量 u_i 、 φ^e 和 φ^m , 为此需求解各点的泛函在全局坐标系 x_i 下的驻值问题, 这将十分繁琐和困难。若能只对 1 个单胞进行变分求解, 则问题可大为简化。由式(1)可知, 各场变量精确解可表示为体积平均值和差值之和:

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = v_i(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\ \varphi^e(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varphi^e(\mathbf{x}) + w^e(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\ \varphi^m(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varphi^m(\mathbf{x}) + w^m(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \end{cases} \quad (13)$$

式中: w_i 、 w^e 、 w^m 分别为弹、电、磁场差值函数, 由式(1)可知

$$\begin{cases} \langle w_i \rangle = 0 \\ \langle w^e \rangle = 0 \\ \langle w^m \rangle = 0 \end{cases} \quad (14)$$

由非均质材料均匀化分析可知, w_i 、 w^e 和 w^m 应渐近小于相应的宏观变量 v_i 、 φ^e 和 φ^m 。将式(13)代入式(12), 根据变分渐近法可得到泛函的主导项为

$$J_1 = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right) + \lambda_i \langle w_i \rangle + \lambda^e \langle w^e \rangle + \lambda^m \langle w^m \rangle + \int_{S_j} \gamma_{ij} (w_i^{+j} - w_i^{-j} - \Delta v_i, j 2a_j) dS_j + \int_{S_j} \alpha_j ((w^e)^{+j} - (w^e)^{-j} - \Delta \varphi^e, j 2a_j) dS_j + \int_{S_j} \beta_j ((w^m)^{+j} - (w^m)^{-j} - \Delta \varphi^m, j 2a_j) dS_j \quad (15)$$

式中: $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$, 下同。

通过对 J_1 的变分分析可得到求解 w_i 、 w^e 、 w^m 的 Euler-Lagrange 方程组和相应的非齐次边界条件。为方便推导, 可通过变量变化使边界条件齐次化。考虑式(15)中后 3 项, 可用变量变化表征为

$$\begin{cases} w_i = y_i v_{i,j} + \chi_i \\ w^e = y_i \varphi_{e,j}^e + \chi^e \\ w^m = y_i \varphi_{m,j}^m + \chi^m \end{cases} \quad (16)$$

式中: χ_i 、 χ^e 、 χ^m 为弹、电、磁波动函数。当局部坐标系的原点选为单胞的中心时, 对 χ_i 、 χ^e 、 χ^m 存在约束:

$$\begin{cases} \langle \chi_i \rangle = 0 \\ \langle \chi^e \rangle = 0 \\ \langle \chi^m \rangle = 0 \end{cases} \quad (17)$$

根据变分渐近法, 式(16)代入式(15)得到定义在单胞上求解 χ_i 、 χ^e 、 χ^m 驻值问题的泛函为

$$J_{\Omega} = \left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right\rangle + \lambda_i \langle \chi_i \rangle + \lambda^e \langle \chi^e \rangle + \lambda^m \langle \chi^m \rangle + \int_{S_j} \gamma_{ij} \langle \chi_i^{+j} - \chi_i^{-j} \rangle dS_j + \int_{S_j} \alpha_j \left((\chi^e)^{+j} - (\chi^e)^{-j} \right) dS_j + \int_{S_j} \beta_j \left((\chi^m)^{+j} - (\chi^m)^{-j} \right) dS_j \tag{18}$$

式(18)中的矩阵 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{19}$$

式中: $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为含均匀化材料有效属性(应变、电、磁)的全局场变量列阵,

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} v_{(1|1)} & 2v_{(1|2)} & v_{(2|2)} & 2v_{(1|3)} & 2v_{(2|3)} & v_{(3|3)} \\ -\phi_{,1}^e & -\phi_{,2}^e & -\phi_{,3}^e & -\phi_{,1}^e & -\phi_{,2}^e & -\phi_{,3}^e \end{bmatrix}^T$$
$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \chi_{(1|1)} & 2\chi_{(1|2)} & \chi_{(2|2)} & 2\chi_{(1|3)} & 2\chi_{(2|3)} & \chi_{(3|3)} & \chi_{,1}^e \\ -\chi_{,2}^e & -\chi_{,3}^e & -\chi_{,1}^e & -\chi_{,2}^e & -\chi_{,3}^e \end{bmatrix}^T \tag{20}$$

其中:

$$\begin{cases} v_{(i|j)} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \\ \chi_{(i|j)} = (\chi_{i,j} + \chi_{j,i})/2 \end{cases} \tag{21}$$

式(18)中的泛函 J_{Ω} 是基于单胞变分渐近均匀化法建立多场耦合细观力学模型的理论基础。对于二相复合材料等简单情况下的泛函驻值问题可求解析解,对更一般情况,需使用数值方法(如有限元法)寻求数值解。

2 有限元实现

直接应用有限元法求解式(18)时,引入的 Lagrange 乘子会增加未知量的数目。为避免这种情况,可将约束直接作为边界条件,简化为对泛函的求驻值问题:

$$\Pi_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\eta} \Delta T + \frac{1}{2} c_v \frac{\Delta T^2}{T_0} \right) d\Omega \tag{22}$$

并受约束:

$$\begin{cases} \chi_i^{+j} = \chi_i^{-j} \\ (\chi^e)^{+j} = (\chi^e)^{-j} \\ (\chi^m)^{+j} = (\chi^m)^{-j} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3 \tag{23}$$

式(23)中的约束不影响 Π_{Ω} 的最小值求解,反而有助于唯一控制确定 χ_i 、 χ^e 、 χ^m 。实践计算中,可先约束任意节点上的波动函数为零,然后再使用该约束重构唯一的波动函数。

为了在有限元求解过程中实现式(23)约束,一种有效方法是在组装后的总刚中引入罚函数,但这

样的处理会引入额外的近似,且解的鲁棒性取决于罚数的数量,会大量耗费计算机的内存,降低计算效率。这里选择正边界表面上的节点 ($y_i = a_i$) 从属于负边界表面上的节点 ($y_i = -a_i$)。通过整合全部独立活动自由度,可隐含式(23)中的约束,并可减少未知量的数目。

为推导离散形式泛函,将式(20)的 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表示为

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} ()_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ()_{,2} & ()_{,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()_{,2} & 0 & 0 & 0 \\ ()_{,3} & 0 & ()_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & ()_{,3} & ()_{,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ()_{,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ()_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ()_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -()_{,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -()_{,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -()_{,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -()_{,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \chi^3 \\ \chi^e \\ \chi^m \end{bmatrix} \equiv \mathbf{F}_h \boldsymbol{\chi} \tag{24}$$

式中: $()_{,i} = \partial()/\partial y_i$; $\mathbf{F}_h$ 为对局部坐标 y_i 偏导的算子矩阵; $\boldsymbol{\chi}$ 为含 3 个波动函数分量的列阵,使用有限元将其离散为

$$\boldsymbol{\chi}(x_i; y_i) = \mathbf{S}(y_i) \mathbf{N}(x_i) \tag{25}$$

式中: $\mathbf{S}$ 为形状函数; $\mathbf{N}$ 为力、电、磁场波动函数的节点值列阵。

将式(24)、式(25)代入式(22),得到泛函的离散形式为

$$\Pi_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \left(\mathbf{N}^T \mathbf{L}_{hh} \mathbf{N} + 2\mathbf{N}^T \mathbf{L}_{he} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{L}_{ee} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\mathbf{N}^T \mathbf{L}_{hT} \Delta T + 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{L}_{eT} \Delta T + L_{TT} \frac{\Delta T^2}{T_0} \right) \tag{26}$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{hh} &= \int_{\Omega} (\mathbf{F}_h \mathbf{S})^T \mathbf{L} (\mathbf{F}_h \mathbf{S}) d\Omega \\ \mathbf{L}_{he} &= \int_{\Omega} (\mathbf{F}_h \mathbf{S})^T \mathbf{L} d\Omega \\ \mathbf{L}_{ee} &= \int_{\Omega} \mathbf{L} d\Omega \\ \mathbf{L}_{hT} &= \int_{\Omega} (\mathbf{F}_h \mathbf{S})^T \boldsymbol{\eta} d\Omega \\ \mathbf{L}_{eT} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} d\Omega \\ L_{TT} &= \int_{\Omega} c_v d\Omega \end{aligned}$$

最小化式(26)的 Π_Ω , 得到线性系统:

$$\mathbf{L}_{hh}\mathbf{N} = -\mathbf{L}_{he}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{L}_{hT}\Delta T \tag{27}$$

由式(27)可知, 波动函数节点值列阵 $\mathbf{N}$ 与 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和 ΔT 呈线性正比关系, 这意味着解可象征性地表示为

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{N}_T\Delta T \tag{28}$$

式中: $\mathbf{N}_0 = -\mathbf{L}_{he}/\mathbf{L}_{hh}$, $\mathbf{N}_T = -\mathbf{L}_{hT}/\mathbf{L}_{hh}$ 。

将式(28)代入式(26), 得到单胞热力学能量密度为

$$\Pi_\Omega = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\bar{\mathbf{L}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\bar{\boldsymbol{\eta}}\Delta T + \frac{1}{2}\bar{c}_v\frac{\Delta T^2}{T_0} \tag{29}$$

式中:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{L}} = \frac{1}{\Omega}(\mathbf{N}_0^T\mathbf{L}_{he} + \mathbf{L}_{ee}) \\ \bar{c}_v = \frac{1}{\Omega}(\mathbf{N}_0^T\mathbf{L}_{hT}T_0 + L_{TT}) \\ \bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{\Omega}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{L}_{he}^T\mathbf{N}_T + \mathbf{N}_0^T\mathbf{L}_{hT}) + \mathbf{L}_{eT}\right] \end{cases} \tag{30}$$

有效热膨胀系数可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}^* = -(\mathbf{C}_{ijkl}^*)^{-1}\mathbf{G}_{ij}^* \tag{31}$$

得到有效多重物理场属性, 可以使用这些属性进行完整结构的宏观分析, 预测智能材料结构的全局多场耦合性能。有时还需要细观范围内的多物理场逐点分布。为此, 可基于细观力学分析得到的波动函数和宏观分析得到的全局性能进行局部场重构。具体来说, 可根据宏观性能如全局 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 、全局 φ^e 和 φ^m 、 ΔT 和全局场变量重构局部场, 如局部位移、电势、磁势、应力、电位移和磁通密度。首先, 使用式(17)中的约束唯一确定波动函数; 其次, 使用式(13)和式(16)重构局部位移、电势和磁势:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \varphi^e \\ \varphi^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \psi^e \\ \psi^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \\ \psi_{,1}^e & \psi_{,2}^e & \psi_{,3}^e \\ \psi_{,1}^m & \psi_{,2}^m & \psi_{,3}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{N}} \tag{32}$$

局部应力场、电场和磁场可以用式(19)~式(24)

恢复:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\Gamma}_h\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{N}} \tag{33}$$

最后, 直接使用组成材料的三维本构关系式(5)重构局部应力和电位移场。

3 算 例

考虑如图 2 所示的 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 纤维/环氧树脂复合材料单胞模型。圆形 BaTiO₃ 纤维位于单胞中心, 4 个 CoFe₂O₄ 纤维分别位于单胞的 4 个角上。3 种组分材料属性如表 1 所示。

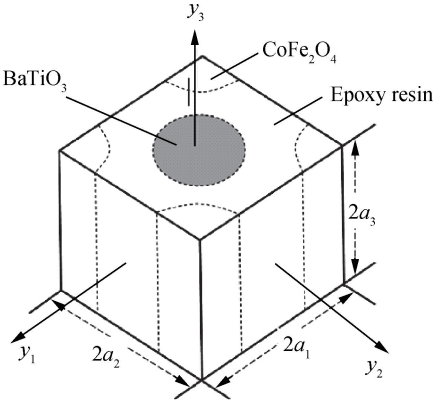


图 2 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 纤维/环氧树脂复合材料单胞模型
Fig. 2 Unit cell model of BaTiO₃-CoFe₂O₄ fiber/epoxy resin composites

表 1 组分材料属性
Table 1 Material properties of constituent

Property	BaTiO ₃	CoFe ₂ O ₄	Epoxy resin
Stiffness coefficient C ₁₁ /GPa	162	269.5	5.53
Stiffness coefficient C ₁₂ /GPa	78	170	2.97
Stiffness coefficient C ₂₃ /GPa	77	173	2.97
Stiffness coefficient C ₂₂ /GPa	166	286	5.53
Stiffness coefficient C ₅₅ /GPa	43	45.3	1.28
Dielectric permittivity k ₁₁ × 10 ⁻⁹ /(C · V ⁻¹ · m ⁻¹)	12.6	0.093	0.1
Dielectric permittivity k ₃₃ × 10 ⁻⁹ /(C · V ⁻¹ · m ⁻¹)	1.2	0.08	0.1
Magnetic permeability μ ₁₁ × 10 ⁻⁴ /(N · s ² · C ⁻²)	0.1	1.57	0.01
Magnetic permeability μ ₃₃ × 10 ⁻⁴ /(N · s ² · C ⁻²)	0.05	-5.9	0.01
Piezoelectric coefficient e ₁₁ /(C · m ⁻²)	18.6	0	0
Piezoelectric coefficient e ₂₁ /(C · m ⁻²)	-4.4	0	0
Piezoelectric coefficient e ₅₁ /(C · m ⁻²)	11.6	0	0
Piezomagnetic coefficient q ₁₁ /(NA ⁻¹ · m ⁻¹)	0	699.7	0
Piezomagnetic coefficient q ₂₁ /(NA ⁻¹ · m ⁻¹)	0	580.3	0
Piezomagnetic coefficient q ₅₁ /(NA ⁻¹ · m ⁻¹)	0	550	0
Thermal expansion coefficient α ₁₁ × 10 ⁻⁶ /K ⁻¹	6.4	10	54
Thermal expansion coefficient α ₂₁ × 10 ⁻⁶ /K ⁻¹	15.7	10	54
Thermal expansion coefficient α ₅₁ × 10 ⁻⁶ /K ⁻¹	15.7	10	54
Specific heat coefficient c _v /(kJ · m ⁻³ · K ⁻¹)	3 193.62	2 000	—

3.1 有效属性

图 3 为基体体积分数固定为 0.5 时，基于构建模型计算得到的复合材料有效属性随 CoFe_2O_4 纤维体积分数 (VOF=0.1~0.5) 的变化情况，并与有限元 (FEM) 计算结果进行对比^[15]。

由图 3 (a) 可看出：有效刚度系数 C_{11}^* 随 CoFe_2O_4 纤维体积分数下降明显，而其他有效刚度系数 C_{12}^* 、 C_{22}^* 和 C_{55}^* 几乎保持不变。原因在于 BaTiO_3 纤维的弹性模量与 CoFe_2O_4 纤维相似，而这 2 种纤维的总体积分数保持不变。

由图 3 (b) 可看出：有效轴向介电系数 k_{11}^* 随 CoFe_2O_4 纤维体积分数的增加而显著减少，而有效

横向介电系数 k_{33}^* 相对 CoFe_2O_4 纤维体积分数保持不变。有效压电系数也发现类似趋势，如图 3 (d) 所示，只有 e_{11}^* 显著变化，其他压电系数变化可忽略不计。

由图 3 (c) 可看出：有效轴向磁导率 μ_{33}^* 随 CoFe_2O_4 纤维体积分数的变化几乎保持不变。在有效压磁系数中也发现类似趋势 (见图 3 (e))，除 q_{11}^* 相对 CoFe_2O_4 纤维体积分数变化而增加外， q_{12}^* 也略有增加， q_{51}^* 变化可忽略不计。

由图 3 (g) 看出：有效热膨胀系数相对 CoFe_2O_4 纤维体积分数略有变化，横向有效热膨胀系数 a_{33}^* 几乎是轴向热膨胀系数 a_{11}^* 的 3 倍。此外，还发现

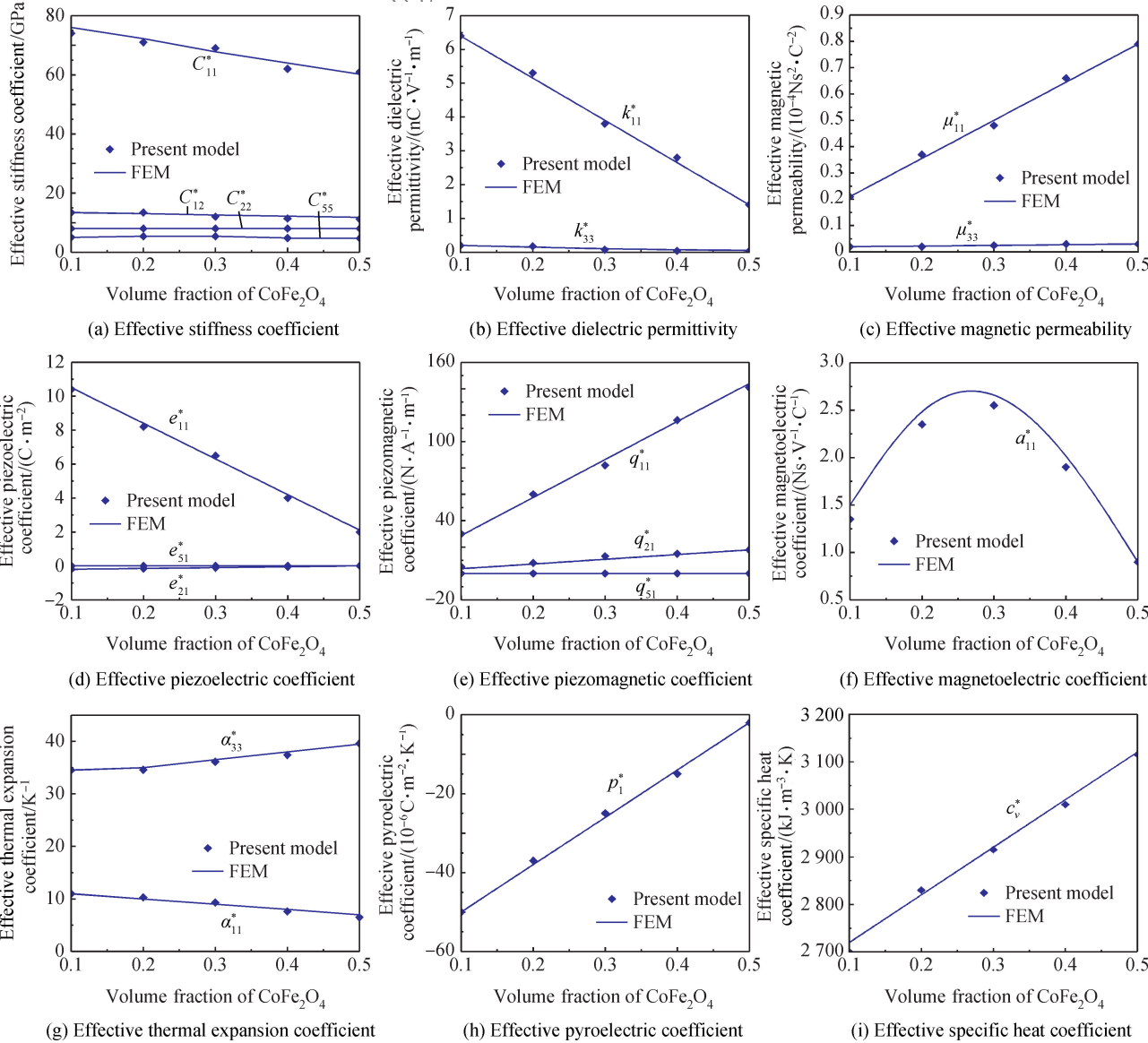


图 3 $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ 纤维/环氧树脂复合材料有效属性随压磁纤维体积分数变化及与 FEM 的比较

Fig. 3 Variation of effective properties of $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ fiber/epoxy resin composites with volume fraction of magnetic fibers and comparison with FEM

该复合材料不同组分相互作用产生一些不存在于任何组分中的新材料属性, 如磁电耦合性能(见图 3(f))、热电效应(见图 3(h))和热磁效应(与热电效应变化规律相同)。当体积分数达到 25% 左右时, 产生最大电磁耦合。

由图 3(i) 可看出: 比热 c_v^* 随 CoFe_2O_4 纤维体积分数变化线性增加。

3.2 局部多物理场分布

为验证预测微结构内局部场分布的能力, 基于

变分渐近均匀化方法重构宏观电场 $E_2 = 100 \text{ V/m}$ 下的单胞内局部多物理场分布。图 4 为重构的单胞内 von Mises 应力、剪应力 τ_{12} 、电通密度位移 D 和磁通密度 B 的分布云图(CoFe_2O_4 纤维体积分数为 20%), 可以看出: 纤维与基体界面间产生显著的场变量分布不均现象, 基于构建的方法仍可准确重构出所有的局部场详细分布, 这些信息对电-磁-热-弹性复合材料的设计和完整性评估至关

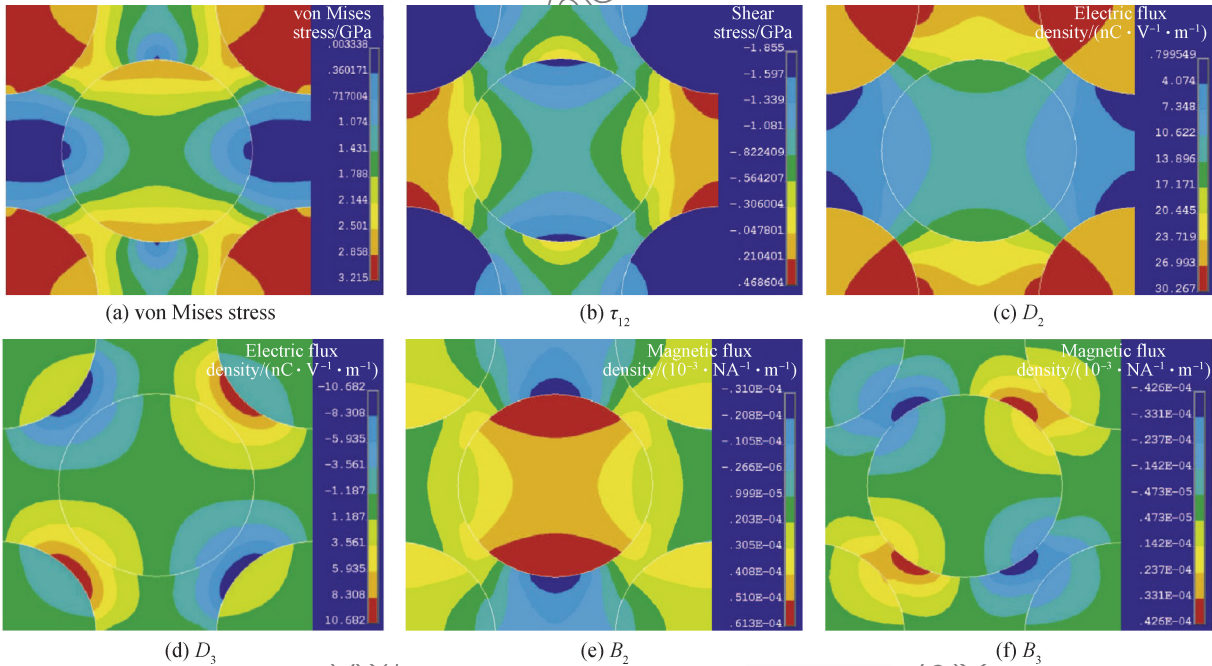


图 4 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 纤维/环氧树脂复合材料单胞内局部多物理场分布 ($E_2 = 100 \text{ V/m}$, CoFe_2O_4 纤维体积分数为 20%)

Fig. 4 Distribution of local multi-physical fields in unit cell of BaTiO₃-CoFe₂O₄ fiber/epoxy resin composites

($E_2 = 100 \text{ V/m}$ and volume fraction of CoFe_2O_4 fiber is 20%).

4 结 论

(1) 基于变分渐近均匀化理论建立了能准确预测智能材料电-磁-热-弹耦合性能的细观力学模型。使用变分渐近法将细观均匀化问题模型转换为约束条件下各近似泛函的最小化-取驻值问题, 并通过有限元数值实现。

(2) 通过算例分析表明: 构建的模型可准确预测智能材料的电-磁-热-弹耦合性能和重构多物理场局部分布。可在 1 次分析中得到完整的材料性能, 相较需要在不同边界和适当载荷条件下多次运行的有限元细观力学分析更有效。

(3) 该研究成果为智能材料细观结构的设计和 分析提供了一种通用方法和工具, 为取得理想的材料属性提供了依据和方便。

参考文献:

[1] NAN C W. Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases[J]. Physical Review B, 1994, 50(50): 6082-6088.

[2] LAGOUDAS D C, BOYD J G, BO Z. Micromechanics of active composites with SMA fibers[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1994, 116(3): 337-345.

[3] LI J Y, DUNN M L. Micromechanics of magneto-electro elastic composite materials: Average fields and effective behavior[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, 9(6): 404-416.

[4] MORI T, TANAKA K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions[J]. Acta Metallurgica, 1973, 21(5): 571-574.

[5] ABOUDI J. Micromechanical analysis of fully coupled elec-

- tro-magneto-thermo-elastic multiphase composites[J]. *Smart Materials and Structures*, 2001, 10(5): 867-877.
- [6] LEE J, JAMES I V, LAGOUDAS D C. Effective properties of three-phase electro-magneto-elastic composites[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2005, 43(10): 790-825.
- [7] 申胜平, 王旭, 匡震邦. 热释电材料问题的通解与界面裂纹[J]. *固体力学学报*, 1995, 16(4): 283-293.
- SHEN S P, WANG X, KUANG Z B. Fracture mechanics for piezothermoelastic materials[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1995, 16(4): 283-293 (in Chinese).
- [8] 钟铁峰, 张亮亮, 周小平, 等. 复合材料热导性能的变分渐近均匀化细观模型[J]. *复合材料学报*, 2015, 32(4): 1173-1178.
- ZHONG Y F, ZHANG L L, ZHOU X P, et al. Variational asymptotic homogenization micromechanics model for thermal conductivity of composites[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, 32(4): 1173-1178 (in Chinese).
- [9] ZHONG Y F, CHEN K, YU W B, et al. Variational asymptotic micromechanics modeling of heterogeneous magnetos- trictive composite materials[J]. *Composite Structures*, 2013, 106(12): 502-509.
- [10] BERCICHEVSKY V L. Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, 43(4): 664-687.
- [11] GUEDES J, KIKUCHI N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 83(2): 143-198.
- [12] GUINOVART-DIAZ R, BRAVO-CASTILLERO J, RODRIGUEZ-RAMOS R, et al. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49(7): 1445-1462.
- [13] SABINA F J, RODRIGUEZ-RAMOS R, BRAVO-CASTILLERO R, et al. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49(7): 1463-1479.
- [14] MILLER R E, TADMORE B. The quasicontinuum method: overview, application and current directions[J]. *Journal of Computer-Aided Materials Design*, 2002, 9(3): 203-239.
- [15] BERGER H, KARI S, GABBERT U, et al. An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(21-22): 5692-5714.

Micromechanical modelling for electro-magneto-thermo-elastic coupling behavior of smart materials

ZHONG Yifeng^{1, 2, *}, JIAO Lichao^{1, 2}, ZHOU Xiaoping^{1, 2}, YANG Wenwen^{1, 2}, YANG Dandan^{1, 2}

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Ministry of Education, Chongqing 400045, China)

Abstract: A micromechanical model is developed to predict electro-magneto-thermo-elastic full-coupling behavior of smart materials based on the variational asymptotic homogenization method. Starting from the variational expression of energy functional derived from electro-magneto-thermo-elastic coupling constitutive equation of smart materials, the energy functional was asymptotically extended to a series of approximate functional by taking advantage of the small ratio of microscale to macroscale of unit cell. The fluctuation function of the field variables were obtained by minimizing the approximation functional, resulting in a micromechanical model which is as close as possible to the physical and engineering reality. This model was implemented by using finite element technology. The example results of BaTiO₃-CoFe₂O₄ fiber/epoxy resin composites show that the constructed micromechanical model can accurately predict the electro-magneto-thermo-elastic behavior and recover the local distribution of multi-physical field.

Keywords: variational asymptotic method; homogenization; composite materials; micromechanics; electro-magneto-thermo-elastic