复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica
Engineering Village

基于精确板理论的复合材料格栅/波纹夹芯结构屈曲特性

朱秀杰 郑坚 熊超 殷军辉 邓辉咏 邹有纯

Buckling characteristics of composite grid/corrugated sandwich structure based on refined plate theory

ZHU Xiujie, ZHENG Jian, XIONG Chao, YIN Junhui, DENG Huiyong, ZOU Youchun

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20210309.003

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于高阶剪切理论的复合材料格栅夹层板弯曲特性

Bending characteristic of composite grid sandwich plate based on high-order shear theory

复合材料学报. 2019, 36(12): 2745-2755 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20190304.002

不同铺层方式下连续玻璃纤维/聚丙烯复合材料波纹夹芯板的力学性能

Mechanical properties of continuous glass fiber/polypropylene corrugated sandwich boards under different laminates

复合材料学报. 2019, 36(5): 1074-1082 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180724.002

复合材料加筋板屈曲/后屈曲分析的应用

Application of buckling/post-buckling analysis for composite stiffened panels

复合材料学报. 2017, 34(1): 96-103 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20160405.001

不同边界条件下波纹夹芯板的自由振动特性

Free vibration characteristics of corrugated sandwich plates under different boundary conditions

复合材料学报. 2020, 37(12): 3149-3159 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20200414.001

复合材料帽形加筋壁板轴压屈曲与后屈曲性能

Buckling and post-buckling performance of hat-stiffened composite panels under axial compression load

复合材料学报. 2018, 35(8): 2014-2022 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20171120.001

基于三维Puck失效准则及唯象模量退化的复合材料臂杆屈曲分析

Buckling analysis of composite arm based on 3D Puck failure criterion and phenomenological modulus degradation method

复合材料学报. 2019, 36(2): 304-314 https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20180402.005

扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica

第 39 卷 第 1 期 1 月 2022 年
Vol. 39 No. 1 Jan 2022

DOI：10.13801/j.cnki.fhclxb.20210309.003

基于精确板理论的复合材料格栅/波纹夹芯结构屈曲特性

分享本文

朱秀杰，郑坚，熊超*，殷军辉，邓辉咏，邹有纯

（陆军工程大学 火炮工程系，石家庄 050003）

摘 要：提供了一种分析全复合材料格栅/波纹夹芯板屈曲特性的解析模型。将格栅、波纹芯子视为连续性单层，基于精确板理论推导了全复合材料波纹/格栅夹芯板的内力-应变关系；在考虑复合材料芯子壁板各向异性和横向剪切变形的基础上，基于均质化理论分别推导了复合材料正交格栅和梯形波纹芯子的等效弹性常数；利用最小势能原理得到了全复合材料格栅/波纹夹芯板屈曲平衡微分方程，求解了 3 种边界条件下的屈曲临界载荷，解析计算的结果与有限元仿真结果进行对比的误差在 5% 以内，验证了解析模型的正确性和有效性。基于验证过的模型对比分析了铺层角度、铺层数等铺层参数以及芯子高度、波纹倾角和格栅间距等结构参数对全复合材料格栅/波纹夹芯板屈曲临界载荷、比屈曲临界载荷的影响规律，为该类型结构的屈曲特性分析和优化设计提供理论指导。

关键词：精确板理论；复合材料；波纹夹芯板；格栅夹芯板；屈曲

中图分类号：O343.7 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-3851(2022)01-0399-13

Buckling characteristics of composite grid/corrugated sandwich structure based on refined plate theory

ZHU Xiujie , ZHENG Jian , XIONG Chao* , YIN Junhui , DENG Huiyong , ZOU Youchun

(Department of Artillery Engineering, Army Engineering University of PLA , Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: An analytical model for analyzing the buckling characteristics of full composite grid/corrugated sandwich panels was provided. Regarding the corrugation and the grid core as a continuous single layer, the internal force-strain relationship of the full composite corrugated/grid sandwich panel was derived based on the refined plate theory. On the basis of considering the anisotropy and transverse shear deformation of the composite core panel, the equivalent elastic constants of composite orthogonal grid and trapezoidal corrugations cores were deduced based on the homogenization theory. Using the minimum potential energy principle, the buckling balance differential equation of full composite grid/corrugated sandwich panels was obtained, and the critical buckling load under three boundary conditions was transformed. The analytical results were compared with the finite element simulation and the errors are within 5%, which validates the correctness and effectiveness of the analytical model. The verified model was used to compare and analyze the effect of the layers angle, number of layers as well as the height of core, inclination angle of corrugation and grid spacing on the critical buckling load and the specific critical buckling load of the full composite grid/corrugated sandwich pane, which provides theoretical guidance for the buckling characteristic analysis and optimal design of this type of structure.

Keywords: refined plate theory; composite materials; grid sandwich panels; corrugated sandwich panels; buckling

收稿日期：2021-01-18; **修回日期**：2021-02-17 ; **录用日期**：2021-02-26 ; **网络首发时间**：2021-03-10 10:44:09
网络首发地址：https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20210309.003
基金项目：省部级重点科研项目 (LJ2019A020103)
通信作者：熊超, 博士, 教授, 研究方向为兵器新材料技术及应用 E-mail: xiongchao@tsinghua.org.cn

引用格式：朱秀杰, 郑坚, 熊超, 等. 基于精确板理论的复合材料格栅/波纹夹芯结构屈曲特性 [J]. 复合材料学报, 2022, 39(1): 399-411.
ZHU Xiujie, ZHENG Jian, XIONG Chao, et al. Buckling characteristics of composite grid/corrugated sandwich structure based on refined plate theory[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2022, 39(1): 399-411(in Chinese).

复合材料格栅和波纹夹芯结构是新型轻质结构的典型代表，它们既利用了树脂基纤维增强复合材料比刚度高、比强度大、耐腐蚀性强的材料优势，又发挥了内部空间可利用、可设计性强等结构优点。各胞元相对独立的格栅芯子能显著提高夹层板横向刚度，阻止局部损伤扩展，在舰艇艏部导流罩[1]、飞机机身[2]和运载火箭级间段[3]等结构上广泛应用；而面内纵向连续的波纹芯子既能提高纵向刚度，又有利于铺放吸波、隐身和电磁屏蔽等功能层，还能形成贯穿夹芯板纵向的内部空间，有利于铺设管道、线路和通风设计[4]，并且梯形波纹芯子特有的水平段能增大胶接面积，能避免受载过程中面芯脱粘现象的过早发生[5-6]，主要应用于空天飞行器防热系统[7-9]、飞机机翼[10-11]、舰艇舷侧及甲板[12]等结构上。这些格栅/波纹夹芯结构件通常会承受面内压缩载荷，因此，分析其屈曲稳定性十分有意义。

在复合材料波纹/格栅夹芯结构的力学性能预测与优化设计阶段，需要确定设计参数与力学响应的具体函数关系。结构线性屈曲失稳是不涉及材料强度破坏和大变形的整体响应，在一定边界条件下按位移求解的弹性理论可推导出屈曲临界载荷函数解析式[13-15]，这样能避免有限元模型多次建模重复计算的问题，提高分析和设计效率。采用解析法分析格栅/波纹夹芯结构的宏观力学性能是国内外研究的热点之一，其思路是先建立出表征芯子层等效刚度或等效弹性常数的均质化模型，再根据结构的受力和几何特点选择对应的复合材料杆[16]、梁[17]、板[18]、壳[19]等理论，最后通过联立三大类方程求解。

在等效模型方面，富明慧等[20]考虑了胞元壁板的伸缩变形对面内刚度的影响，修正了 Gibson 等[21]给出的正六边形格栅芯子等效弹性参数计算公式；Chen[22]基于 Mindlin 板理论推导了适用于正交、三角、菱形及三者混合格栅芯子的等效拉伸和弯曲刚度矩阵；郑青[23]通过等效应力应变法分析了金刚石形格栅的刚度各向异性；Peng 等[24]通过能量法推导了波纹芯子的等效弯曲刚度；Park[25]重点分析了波纹倾角、胞元长度和芯子高度等几何参数对复合材料波纹芯子横向剪切刚度系数的影响规律；Bartolozzi 等[26]充分考虑波纹结构壁板拉/压、弯曲和剪切变形，基于 Castigliano 定理提出了各向同性材料梯形波纹结构的等效弹性常数的计算方法。根据等效出来的弹性参数可以建立省去芯子细部几何尺寸的均匀化有限元模型，用以高效分析结构的宏观响应。

复合材料的剪切模量与弹性模量相比是小量级，对全复合材料夹芯结构进行屈曲分析应当考虑横向剪切变形。在复合材料板结构的剪切变形理论方面，一阶剪切变形理论假设横向剪切变形在板厚方向上是均匀的，需额外计算横截面剪切修正因子。李华东等[18]基于 Reddy[27]提出的高阶剪切理论分析了复合材料格栅夹芯板的弯曲特性，但最终推导出的含有 5 个未知位移函数的 4 阶偏微分方程组不易求解。Shimpi 等[28]和 Thai 等[29]提出了一种精确板理论 (Refined plate theory，RPT)，该理论是将板厚方向上的位移分为弯曲位移和剪切位移两部分，进而代替了两个广义转角位移，将位移场中的未知量减少为 4 个，对于不存在拉伸-弯曲耦合效应的正交各向异性板和对称铺层的层合板，需要联立的方程数降为了 2 个。但其横向剪切刚度系数是根据一阶剪切变形板理论计算的，如果同样应用于复合材料层合板结构，对应横截面剪切修正因子的计算较为复杂[16]。周涛等[30]利用 Shimpi 提出的精确板理论，基于三次幂的剪切分布函数计算了拉伸、弯曲和横向剪切刚度系数，通过求解 4 变量微分方程组得出挠度解析式，深入分析了板的几何尺寸和材料性能对剪切效应的影响。

综合来看，各向同性材料格栅和梯形波纹结构等效均质化模型的理论研究已较为深入，但没有同时考虑芯子壁板剪切变形[24]和材料各向异性的影响[22,26]，目前还缺少复合材料格栅和梯形波纹结构等效弹性常数的计算方法。精确板理论在分析正交各向异性板剪切效应的问题上已表现出了一定的优势，但还未被应用于分析全复合材料夹芯板的屈曲特性。

本文先假设复合材料夹芯板的芯子可以等效为连续性单层，基于三阶剪切变形精确板理论推导了面内单向压缩载荷下全复合材料夹芯板的整体应变能和外力功的计算式，然后根据最小势能原理得出夹芯板整体屈曲临界载荷的解析式。接着在考虑复合材料各向异性和剪切变形的基础上，基于均匀化理论分别给出了复合材料层合板、正交格栅芯子和梯形波纹芯子的等效工程弹性常数，并提出了计算一阶剪切理论中复合材料层合板剪切修正因子的简便方法。最后，基于有限元验证过的理论模型对比分析了铺层参数和结构参数对

两种复合材料夹芯结构屈曲临界载荷、比屈曲临界载荷的影响规律。

1 复合材料夹芯板屈曲分析模型

以采用正交格栅和梯形波纹两种不同芯子的全复合材料夹芯板为研究对象，假设芯子均可等效为连续性单层，如图 1 所示。同时假设面芯粘结牢固，仅发生线弹性范围内的小变形。在夹芯板中面建立 x-y 坐标系，z 向为厚度方向，图 1(a) 为正交格栅芯子，胞元的宽度、长度和壁厚分别为 d_x、d_y 和 t_{gc}；图 1(b) 为梯形波纹芯子，胞元的水平段长度、倾斜段水平长度和总长度分别为 f_c、b 和 p，波纹倾角和壁厚分别为 θ_c 和 t_{cc}；图 1(c) 为等效连续模型，两种夹芯板的芯子厚度、面板厚度和总厚度分别为 h_c、h_f 和 h，宽度和长度分别为 A、B。

1.1 变形几何关系

根据高阶剪切精确板理论，复合材料夹芯板位移场为[30-31]

$$\begin{cases} u(x,y,z)=u_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_b}{\partial x}-f(z)\dfrac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x,y,z)=v_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_b}{\partial y}-f(z)\dfrac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x,y,z)=w_b(x,y)+w_s(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$f(z)=-z/4+5z^3/(3h^2)$，为表征横向剪切变形的形函数；$u_0(x,y)$、$v_0(x,y)$ 为夹芯板中面上任意一点沿 x、y 方向上的位移；$w_b(x,y)$ 和 $w_s(x,y)$ 分别为弯曲和剪切横向位移。式 (1) 代入弹性力学平面问题几何方程可得：

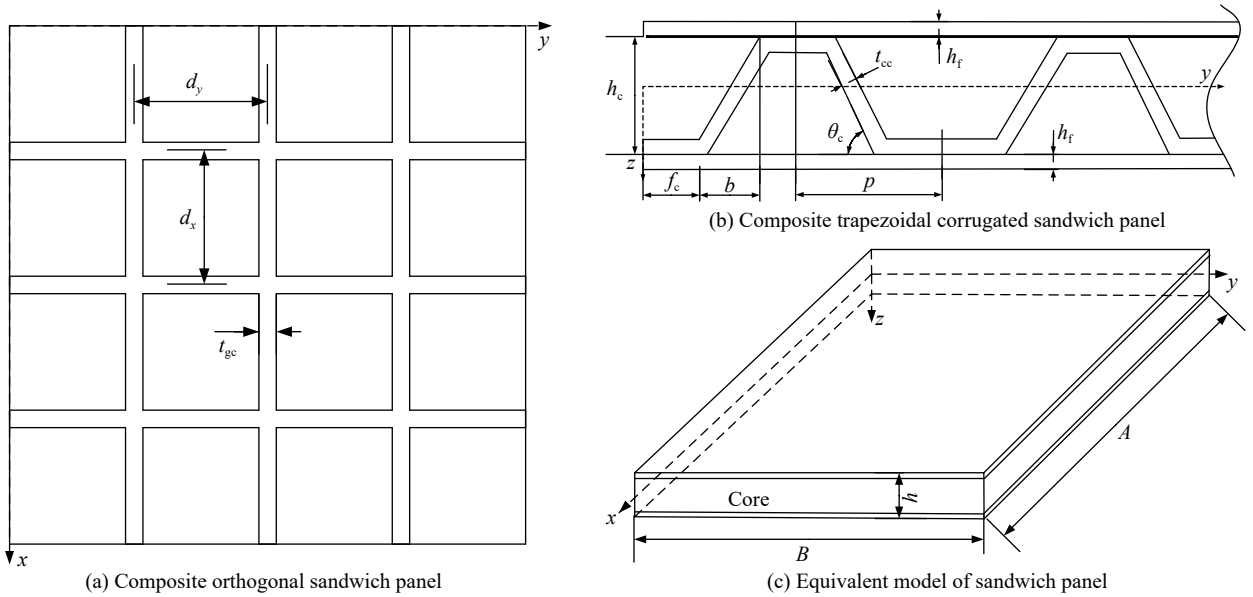
$$\begin{cases} \varepsilon_x=\varepsilon_x^0+z\kappa_x^b+f\kappa_x^s \\ \varepsilon_y=\varepsilon_y^0+z\kappa_y^b+f\kappa_y^s \\ \varepsilon_z=0 \\ \gamma_{xy}=\gamma_{xy}^0+z\kappa_{xy}^b+f\kappa_{xy}^s \\ \gamma_{yz}=(1-f')\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}=(1-f')\gamma_{xz}^s \end{cases} \tag{2}$$

式 (2) 中的物理量均由下式计算：

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0=\dfrac{\partial u_0}{\partial x},\kappa_x^b=-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2},\kappa_x^s=-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^0=\dfrac{\partial v_0}{\partial x},\kappa_y^b=-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2},\kappa_y^s=-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy}^0=\dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x},\kappa_{xy}^b=-2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}, \\ \kappa_{xy}^s=-2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y},\gamma_{yz}^s=\dfrac{\partial w_s}{\partial y},\gamma_{xz}^s=\dfrac{\partial w_s}{\partial x} \end{cases} \tag{3}$$

1.2 本构方程

复合材料单层的本构关系为



(a) Composite orthogonal sandwich panel

(b) Composite trapezoidal corrugated sandwich panel

(c) Equivalent model of sandwich panel

d_x, d_y and t_{gc}—Width, length and wall thickness of orthogonal grid core; f_c, b and p—Horizontal segment length, horizontal length of oblique segment and total length of trapezoidal corrugated core; θ_c and t_{cc}—Inclination angle and wall thickness of trapezoidal corrugated core; h_c, h_f and h—Core thickness, facesheet thickness and total thickness of sandwich panels; A and B—Width and length of sandwich panels

图 1 复合材料格栅/波纹夹芯板及其等效连续模型

Fig. 1 Composite grid/corrugated sandwich panels and the equivalent continuous model

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26}\\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0\\ 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0\\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

其中，$\overline{Q}_{ij}$为偏轴刚度系数。格栅芯子和波纹芯子均具有正交各向异性特性，可以等效为 0°铺设的复合材料单层，对应的$\overline{Q}_{ij}$化简为

$$\begin{cases}\overline{Q}_{11}=\dfrac{E_x^i}{1-\nu_{xy}^i\nu_{yx}^i},\overline{Q}_{12}=\dfrac{\nu_{xy}^iE_y^i}{1-\nu_{xy}^i\nu_{yx}^i},\overline{Q}_{16}=0\\ \overline{Q}_{22}=\dfrac{E_y^i}{1-\nu_{xy}^i\nu_{yx}^i},\overline{Q}_{26}=0\\ \overline{Q}_{44}=G_{yz}^i,\overline{Q}_{55}=G_{xz}^i,\overline{Q}_{66}=G_{xy}^i\end{cases} \tag{5}$$

式中：E_x^i、$E_y^i(i=\mathrm{cc},\mathrm{gc})$分别为芯子 x 和 y 方向上的弹性模量；G_{xy}^i、G_{yz}^i、G_{xz}^i为 3 个剪切模量；ν_{xy}^i、ν_{yx}^i为泊松比，具体计算方法见 2.2 节。

1.3　控制方程及求解

假设作用在夹芯板 x=0、A 处的单位长度上的载荷为N_x^0，根据能量法，夹芯板的整体应变能 U 和外力功 V 分别为

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{2}\int_A(N_x\varepsilon_x^0+N_y\varepsilon_y^0+N_{xy}\gamma_{xy}^0+M_x^{\mathrm{b}}\kappa_x^{\mathrm{b}}+\\ &M_y^{\mathrm{b}}\kappa_y^{\mathrm{b}}+M_{xy}^{\mathrm{b}}\kappa_{xy}^{\mathrm{b}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_A(Q_{xy}\gamma_{yz}+Q_{xz}\gamma_{xz}+\\ &M_x^{\mathrm{s}}\kappa_x^{\mathrm{s}}+M_y^{\mathrm{s}}\kappa_y^{\mathrm{s}}+M_{xy}^{\mathrm{s}}\kappa_{xy}^{\mathrm{s}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6}$$

$$V=\frac{1}{2}\int_A N_x^0\frac{\partial^2(w_{\mathrm{b}}+w_{\mathrm{s}})}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7}$$

其中单位宽度上的内力 N_x、N_y、N_{xy}、弯曲内力矩 M_x^{b}、M_y^{b}、M_{xy}^{b}和剪切内力矩M_x^{s}、M_y^{s}、M_{xy}^{s}定义为

$$\begin{cases}(N_x,N_y,N_{xy})=\int(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})\mathrm{d}z\\ (M_x^{\mathrm{b}},M_y^{\mathrm{b}},M_{xy}^{\mathrm{b}})=\int(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})z\mathrm{d}z\\ (M_x^{\mathrm{s}},M_y^{\mathrm{s}},M_{xy}^{\mathrm{s}})=\int(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})f\mathrm{d}z\\ (Q_{yz},Q_{xz})=\int(\tau_{yz},\tau_{xz})(1-f')\mathrm{d}z\end{cases} \tag{8}$$

将式 (3)、(4) 代入式 (8)，化简后的内力-应变关系为

$$\begin{cases}\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16}\\ & A_{22} & A_{26}\\ \mathrm{sym.} & & A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ & B_{22} & B_{26}\\ \mathrm{sym.} & & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{b}}\\ \kappa_y^{\mathrm{b}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{b}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{16}\\ & E_{22} & E_{26}\\ \mathrm{sym.} & & E_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{s}}\\ \kappa_y^{\mathrm{s}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{s}}\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}M_x^{\mathrm{b}}\\ M_y^{\mathrm{b}}\\ M_{xy}^{\mathrm{b}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ & B_{22} & B_{26}\\ \mathrm{sym.} & & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ & D_{22} & D_{26}\\ \mathrm{sym.} & & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{b}}\\ \kappa_y^{\mathrm{b}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{b}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12} & F_{16}\\ & F_{22} & F_{26}\\ \mathrm{sym.} & & F_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{s}}\\ \kappa_y^{\mathrm{s}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{s}}\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}M_x^{\mathrm{s}}\\ M_y^{\mathrm{s}}\\ M_{xy}^{\mathrm{s}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{16}\\ & E_{22} & E_{26}\\ \mathrm{sym.} & & E_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12} & F_{16}\\ & F_{22} & F_{26}\\ \mathrm{sym.} & & F_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{b}}\\ \kappa_y^{\mathrm{b}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{b}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12} & H_{16}\\ & H_{22} & H_{26}\\ \mathrm{sym.} & & H_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x^{\mathrm{s}}\\ \kappa_y^{\mathrm{s}}\\ \kappa_{xy}^{\mathrm{s}}\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}Q_{yz}\\ Q_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{44}^{\mathrm{s}} & A_{45}^{\mathrm{s}}\\ A_{45}^{\mathrm{s}} & A_{55}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{\mathrm{s}}\\ \gamma_{xz}^{\mathrm{s}}\end{Bmatrix}\end{cases} \tag{9}$$

式 (9) 中各矩阵中的刚度系数定义为

$$\begin{cases}(A_{ij},B_{ij},D_{ij},E_{ij},F_{ij},H_{ij})=\\ \qquad\int\overline{Q}_{ij}(1,z,z^2,f,zf,f^2)\mathrm{d}z(i,j=1,2,6)\\ A_{ij}^{\mathrm{s}}=\int\overline{Q}_{ij}(1-f')^2\mathrm{d}z(i,j=4,5)\end{cases} \tag{10}$$

$f(z)$ 为奇函数且 w_{b} 和 w_{s} 相互独立，如果夹芯板整体为对称铺层，部分耦合刚度系数 B_{ij}=E_{ij}=F_{ij}=0 (i, j=1,2,6)。如果夹芯板铺层仅由 0°、90°、±θ 以及它们混合组成，还有 A_{16}=A_{26}=A_{45}=D_{16}=D_{26}=H_{16}=H_{26}=0[16]，式 (9) 可进一步简化。将 $f(z)$ 的表达式代入式 (10) 并积分后得到高阶项刚度系数H_{ij}、A_{ij}^{s}的表达式为

$$\begin{cases}H_{ij}=\dfrac{1}{16}D_{ij}-\dfrac{5}{6h^2}F_{ij}'+\dfrac{25}{9h^4}I_{ij}(i,j=1,2,6)\\ A_{ij}^{\mathrm{s}}=\dfrac{25}{16}A_{ij}-\dfrac{25}{2h^2}D_{ij}+\dfrac{25}{h^4}F_{ij}'(i,j=4,5)\end{cases} \tag{11}$$

同时得到式 (10) 和式 (11) 其他刚度系数 A_{ij}、D_{ij}、F_{ij}'、I_{ij}的表达式为

$$\begin{cases}A_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}(z_k-z_{k-1})\\ D_{ij}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\left(z_k^3-z_{k-1}^3\right)\\ F_{ij}'=\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\left(z_k^5-z_{k-1}^5\right)\\ I_{ij}=\dfrac{1}{7}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\left(z_k^7-z_{k-1}^7\right)\end{cases}(i,j=1,2,4,5,6) \tag{12}$$

由最小势能原理$\delta(U+V)=0$及式(6)、式(7)得到平衡方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_x}{\partial x}+\dfrac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial N_y}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial^2 M_x^{\mathrm{b}}}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 M_{xy}^{\mathrm{b}}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 M_y^{\mathrm{b}}}{\partial y^2}+N_x^0\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 M_x^{\mathrm{s}}}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 M_{xy}^{\mathrm{s}}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 M_y^{\mathrm{s}}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_{yz}}{\partial y}+\\ N_x^0\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\end{cases}\tag{13}$$

将式(4)代入式(9)，再代入式(13)可得复合材料夹芯板关于w_{b}和w_{S}的控制方程为

$$\begin{cases}D_{11}\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{b}}}{\partial x^4}+2(D_{12}+D_{66})\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{b}}}{\partial x^2\partial y^2}+\\ \quad D_{22}\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{b}}}{\partial y^4}+N_x^0\dfrac{\partial^2(w_{\mathrm{b}}+w_{\mathrm{s}})}{\partial x^2}=0\\ H_{11}\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{s}}}{\partial x^4}+2(H_{12}+H_{66})\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{s}}}{\partial x^2\partial y^2}+H_{22}\dfrac{\partial^4 w_{\mathrm{s}}}{\partial y^4}+\\ \quad N_x^0\dfrac{\partial^2(w_{\mathrm{b}}+w_{\mathrm{s}})}{\partial x^2}-A_{44}^{\mathrm{s}}\dfrac{\partial^2 w_{\mathrm{s}}}{\partial y^2}-A_{55}^{\mathrm{s}}\dfrac{\partial^2 w_{\mathrm{s}}}{\partial x^2}=0\end{cases}\tag{14}$$

四边简支(x=0、A，y=0、B)夹芯板的边界条件为

$$w_{\mathrm{b}}=w_{\mathrm{s}}=M_x^{\mathrm{b}}=M_x^{\mathrm{s}}=0\tag{15}$$

将满足边界条件式(15)的位移函数w_{b}和w_{s}设为双Fourier级数形式：

$$\begin{cases}w_{\mathrm{b}}=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{\mathrm{b}mn}\sin\alpha x\sin\beta y\\ w_{\mathrm{s}}=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{smn}\sin\alpha x\sin\beta y\end{cases}\tag{16}$$

其中：$\alpha=m\pi/A$，$\beta=n\pi/B$，A、B分别为夹芯板x和y方向上的长度，m、n分别为对应的半波数；$W_{\mathrm{b}mn}$、W_{smn}为待定系数。

将式(16)代入式(14)后推导出：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_{\mathrm{b}mn}\\W_{smn}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\\ k_{11}=\left[D_{11}\alpha^4+2(D_{12}+2D_{66})\alpha^2\beta^2+D_{22}\beta^4\right]-\\ \quad N_x^0\alpha^2\\ k_{12}=-N_x^0\alpha^2\\ k_{22}=\left[H_{11}\alpha^4+2(H_{12}+2H_{66})\alpha^2\beta^2+H_{22}\beta^4\right]+\\ \quad A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2+A_{44}^{\mathrm{s}}\beta^2-N_x^0\alpha^2\end{cases}\tag{17}$$

式(17)存在非零解的条件是其行列式的值恒为零：

$$k_{11}k_{22}-k_{12}^2=0\tag{18}$$

将式(17)代入式(18)后求出N_x^0：

$$\begin{cases}N_x^0=\dfrac{D}{\alpha^2}\dfrac{H+A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2+A_{44}^{\mathrm{s}}\beta^2}{D+H+A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2+A_{44}^{\mathrm{s}}\beta^2}\\ D=D_{11}\alpha^4+2(D_{12}+2D_{66})\alpha^2\beta^2+D_{22}\beta^4\\ H=H_{11}\alpha^4+2(H_{12}+2H_{66})\alpha^2\beta^2+H_{22}\beta^4\end{cases}\tag{19}$$

通过令m、n等于不同的正整数，可以得到一系列的$N_x^0(m,n)$，屈曲临界载$N_{\mathrm{crx}}=N_x^0(m,n)_{\min}$。定义剪切变形影响系数$\varphi$：

$$\varphi=\frac{H+A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2+A_{44}^{\mathrm{s}}\beta^2}{D+H+A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2+A_{44}^{\mathrm{s}}\beta^2}\tag{20}$$

φ=1，即不考虑剪切变形的影响，式(19)退化为经典层合板理论中的屈曲临界载荷计算公式，也证明了本文推导过程的正确性。

对于与y轴平行的加载边简支、两侧边为自由或固支状态的夹芯板，相应的位移函数设为[16,32]

$$\begin{cases}w_{\mathrm{b}}=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}Y_{\mathrm{b}m}(y)\sin\alpha x\\ w_{\mathrm{s}}=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}Y_{sm}(y)\sin\alpha x\end{cases}\tag{21}$$

其中$Y_{\mathrm{b}m}(y)$和$Y_{sm}(y)$为y的待定函数。将式(21)代入式(14)得出：

$$\begin{cases}D_{11}Y_{\mathrm{b}m}\alpha^4-2(D_{12}+D_{66})\alpha^2Y_{\mathrm{b}m}''+\\ \quad D_{22}Y_{\mathrm{b}m}^{(4)}+\alpha^2N_x^0(Y_{\mathrm{b}m}+Y_{sm})=0\\ H_{11}Y_{sm}\alpha^4-2(H_{12}+H_{66})\alpha^2Y_{sm}''+\\ \quad H_{22}Y_{sm}^{(4)}+A_{44}^{\mathrm{s}}Y_{sm}''+A_{55}^{\mathrm{s}}\alpha^2Y_{sm}+\\ \quad \alpha^2N_x^0(Y_{\mathrm{b}m}+Y_{sm})=0\end{cases}\tag{22}$$

两侧边(y=0, B)自由和固支的边界条件为

两侧边自由：

$$\begin{cases}M_y^{\mathrm{b}}=M_y^{\mathrm{s}}=0\\ \dfrac{\partial M_y^{\mathrm{b}}}{\partial y}+2\dfrac{\partial M_{xy}^{\mathrm{b}}}{\partial x}+N_x^0\dfrac{\partial(w_{\mathrm{b}}+w_{\mathrm{s}})}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial M_y^{\mathrm{s}}}{\partial y}+2\dfrac{\partial M_{xy}^{\mathrm{s}}}{\partial x}+Q_{xz}+N_x^0\dfrac{\partial(w_{\mathrm{b}}+w_{\mathrm{s}})}{\partial y}=0\end{cases}\tag{23}$$

两侧边固支：

$$w_{\mathrm{b}}=w_{\mathrm{s}}=\frac{\partial w_{\mathrm{b}}}{\partial y}=\frac{\partial w_{\mathrm{s}}}{\partial y}=0 \tag{24}$$

将式 (22) 以矩阵形式表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{Z}'(y)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}(y)\\ \boldsymbol{Z}(y)=\{Y_{\mathrm{b}m},Y_{\mathrm{b}m}',Y_{\mathrm{b}m}'',Y_{\mathrm{b}m}''',Y_{\mathrm{s}m},Y_{\mathrm{s}m}',Y_{\mathrm{s}m}'',Y_{\mathrm{s}m}'''\}\\ \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\C_1&0&C_2&0&C_3&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\C_4&0&0&0&C_5&0&C_6&0\end{bmatrix}\end{cases} \tag{25}$$

其中，

$$\begin{cases}C_1=-\dfrac{\alpha^4D_{11}+\alpha^2N_x^0}{D_{22}},C_2=\dfrac{2(D_{12}+D_{66})\alpha^2}{D_{22}},\\ C_3=-\dfrac{\alpha^2N_x^0}{D_{22}},C_4=-\dfrac{\alpha^2N_x^0}{H_{22}},\\ C_5=-\dfrac{\alpha^4H_{11}+\alpha^2A_{55}^{\mathrm{s}}+\alpha^2N_x^0}{H_{22}},\\ C_6=\dfrac{2(H_{12}+H_{66})\alpha^2-A_{44}^{\mathrm{s}}}{H_{22}}\end{cases} \tag{26}$$

式 (25) 的解为

$$\boldsymbol{Z}(y)=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}y}\boldsymbol{\omega} \tag{27}$$

其中：$\boldsymbol{\omega}$ 为由边界条件决定的列向量；$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}y}$展开为

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}y}=[E]\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 y}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{\lambda_8 y}\end{bmatrix}[E]^{-1} \tag{28}$$

其中 λ_i (i=1, 2, ···, 8) 和 $[E]$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{T}$的特征值和对应的特征向量矩阵。将式 (27) 代入边界条件式 (23) 或式 (24) 得到：

$$\begin{cases}G_{ij}\omega_j=0\quad(i,j=1,2,\cdots,8)\\ [G(y)]=[E]\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 y}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{\lambda_8 y}\end{bmatrix}[E]^{-1}\end{cases} \tag{29}$$

令 G_{ij} 的行列式为 0，即可求出屈曲临界载荷 N_x^0。以上求解过程均可由 Matlab 实现，较之四边简支边界条件更为复杂，在此不再赘述。

2　等效弹性常数计算

2.1　复合材料层合板

类比式 (9) 并求逆，得出层合板的面内伸缩和面外剪切应变-内力关系为

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix}a_{11}^*&a_{12}^*&a_{16}^*\\ a_{12}^*&a_{22}^*&a_{26}^*\\ a_{16}^*&a_{26}^*&a_{66}^*\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{bmatrix}_1 \tag{30}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}_1=\begin{bmatrix}a_{44}^*&a_{45}^*\\ a_{45}^*&a_{55}^*\end{bmatrix}_1\begin{Bmatrix}Q_{yz}\\ Q_{xz}\end{Bmatrix}_1 \tag{31}$$

式 (30) 简记作 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^0=\boldsymbol{a}_1^*\boldsymbol{N}_1$，面内柔度系数 $\boldsymbol{a}_1^*=\boldsymbol{A}_1^{-1}$。式 (31) 中元素 a_{ij}^*的计算式为

$$a_{ij}^*=\frac{A_{ij}^{\mathrm{ls}}}{A_{44}^{\mathrm{ls}}A_{55}^{\mathrm{ls}}-A_{45}^{\mathrm{ls}}A_{45}^{\mathrm{ls}}}\ (i,j=4,5) \tag{32}$$

$\boldsymbol{A}_1^{-1}$中元素和 A_{ij}^{ls} $(i,j=4,5)$可类比式 (11) 和式 (12) 计算。参照复合材料单层的柔度系数与弹性常数的关系，可得层合板的等效工程弹性常数为

$$\begin{cases}E_x^{\mathrm{eq}}=\dfrac{1}{a_{11}^*},E_y^{\mathrm{eq}}=\dfrac{1}{a_{22}^*},G_{xy}^{\mathrm{eq}}=\dfrac{1}{a_{66}^*}\\ v_{xy}^{\mathrm{eq}}=-\dfrac{a_{12}^*}{a_{11}^*},G_{yz}^{\mathrm{eq}}=\dfrac{1}{a_{44}^*},G_{xz}^{\mathrm{eq}}=\dfrac{1}{a_{55}^*}\end{cases} \tag{33}$$

2.2　复合材料格栅/波纹芯子

根据式 (33) 层合板等效弹性常数的计算结果，结合文献 [22] 推导的各向同性材料格栅结构的等效拉伸、弯曲和剪切刚度矩阵，给出复合材料格栅芯子等效弹性常数和等效密度的计算式：

$$\begin{cases}E_x^{\mathrm{gc}}=\dfrac{E_x^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{gc}}}{d_x},E_y^{\mathrm{gc}}=\dfrac{E_x^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{gc}}}{d_y}\\ v_{yx}^{\mathrm{gc}}=\dfrac{E_y^{\mathrm{gc}}}{E_x^{\mathrm{gc}}}v_{xy}^{\mathrm{gc}}=\dfrac{E_y^{\mathrm{gc}}}{E_x^{\mathrm{c}}}v_{xy}^{\mathrm{eq}}\\ G_{xz}^{\mathrm{gc}}=\dfrac{G_{xz}^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{gc}}}{d_y},G_{yz}^{\mathrm{gc}}=\dfrac{G_{yz}^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{gc}}}{d_x}\\ G_{xy}^{\mathrm{gc}}=\left[\dfrac{d_yd_x}{E_x^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{gc}}^3}\left(d_y+d_x\right)+\dfrac{1}{t_{\mathrm{gc}}}\left(\dfrac{d_x}{\chi_1^{\mathrm{gc}}G_{xz}^{\mathrm{gc}}}+\dfrac{d_y}{\chi_2^{\mathrm{gc}}G_{yz}^{\mathrm{gc}}}\right)\right]^{-1}\\ \rho_{\mathrm{gc}}=\dfrac{2\left(d_x+d_y\right)t_{\mathrm{gc}}}{d_xd_y}\rho\end{cases} \tag{34}$$

其中：ρ 为复合材料的密度；χ_i^{gc} (i=1, 2) 为格栅壁板的剪切修正因子，对于各向同性和正交各向异性材料矩形板以及铺层角度一致的单向层合板，χ_i^{gc}一般取 5/6。而对于一般铺层的复合材料层合板，χ_i^{gc}还与铺层角度和铺层顺序有关，文献 [16] 提供了基于剪切应变能比较法的剪切修正因子公

式，但求解过程中需多次积分，计算繁琐。根据式 (11) 的计算结果，给出 χ_i^{gc} 的简单计算式：

$$\chi_1^{\mathrm{gc}}=\frac{A_{55}^{\mathrm{gc}}}{A_{55}^{\mathrm{sgc}}},\chi_2^{\mathrm{gc}}=\frac{A_{44}^{\mathrm{gc}}}{A_{44}^{\mathrm{sgc}}} \tag{35}$$

其中 A_{55}^{gc}、A_{55}^{sgc}、A_{44}^{gc} 和 A_{44}^{sgc} 为复合材料格栅胞元壁板的横向剪切刚度系数，可类比式 (11) 计算得出。

在充分考虑复合材料波纹芯子壁板各向异性的基础上，复合材料波纹芯子 y 方向的等效弹性模量 E_y^{cc}、yz 和 xz 平面内的等效剪切模量 G_{yz}^{cc}、G_{xz}^{cc} 分别为[26]

$$\begin{cases}E_y^{\mathrm{cc}}=p\left(\dfrac{2f_{\mathrm{c}}}{E_y^{\mathrm{eq}}}+\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{E_y^{\mathrm{eq}}t_{\mathrm{cc}}}\dfrac{C_{11}C_{33}-C_{13}^2}{C_{33}}\right)^{-1}\\ G_{yz}^{\mathrm{cc}}=\dfrac{E_y^{\mathrm{eq}}h_{\mathrm{c}}t_{\mathrm{cc}}}{b}\dfrac{C_{22}C_{33}-C_{23}^2}{C}\\ G_{xz}^{\mathrm{cc}}=G_{xz}^{\mathrm{eq}}\dfrac{t_{\mathrm{cc}}\tan\theta_{\mathrm{c}}}{p}\end{cases} \tag{36}$$

式 (36) 中刚度系数 C_{ij} 及 C 的表达式为

$$\begin{cases}C_{11}=\dfrac{4}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b^3\tan^2\theta_{\mathrm{c}}}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}+b\cos\theta_{\mathrm{c}}+\dfrac{bE_y^{\mathrm{eq}}}{\chi_1^{\mathrm{cc}}G_{xz}^{\mathrm{eq}}}\dfrac{\sin^2\theta_{\mathrm{c}}}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}\\ C_{12}=\dfrac{4}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b^3\tan^2\theta_{\mathrm{c}}}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}-b\cos\theta_{\mathrm{c}}+\dfrac{bE_y^{\mathrm{eq}}\sin\theta_{\mathrm{c}}}{\chi_1^{\mathrm{cc}}G_{xz}^{\mathrm{eq}}}\\ C_{13}=-\dfrac{6}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b^2\tan\theta_{\mathrm{c}}}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}\\ C_{22}=\dfrac{4}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b^3}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}+\dfrac{b\sin^2\theta_{\mathrm{c}}}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}+\dfrac{bE_y^{\mathrm{eq}}\cos\theta_{\mathrm{c}}}{\chi_1^{\mathrm{cc}}G_{xz}^{\mathrm{eq}}}\\ C_{23}=-\dfrac{6}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b^2}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}\\ C_{33}=\dfrac{12}{t_{\mathrm{cc}}^2}\dfrac{b}{\cos\theta_{\mathrm{c}}}\\ C=C_{11}C_{22}C_{33}+C_{12}C_{23}C_{31}+C_{13}C_{21}C_{32}-\\ \quad C_{13}C_{22}C_{31}-C_{12}C_{21}C_{33}-C_{11}C_{23}C_{32}\end{cases} \tag{37}$$

其中，χ_1^{cc} 为波纹芯子壁板的剪切修正因子，计算方法参考式 (34)。x 方向上的等效弹性模量 E_x^{cc}、xy 平面内的等效剪切模量 G_{xy}^{cc}、泊松比 ν_{yx}^{cc} 以及等效密度 ρ_{cc} 为

$$\begin{cases}E_x^{\mathrm{cc}}=E_x^{\mathrm{eq}}\dfrac{t_{\mathrm{cc}}}{bh_{\mathrm{c}}}\left(p-\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\tan\theta_{\mathrm{c}}}+\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\sin\theta_{\mathrm{c}}}\right)\\ G_{xy}^{\mathrm{cc}}=G_{xy}^{\mathrm{eq}}\dfrac{t_{\mathrm{cc}}p}{h_{\mathrm{c}}}\left(p-\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\tan\theta_{\mathrm{c}}}+\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\sin\theta_{\mathrm{c}}}\right)^{-1}\\ \nu_{yx}^{\mathrm{cc}}=\dfrac{E_y^{\mathrm{cc}}}{E_x^{\mathrm{cc}}}\nu_{xy}^{\mathrm{cc}}=\dfrac{E_y^{\mathrm{cc}}}{E_x^{\mathrm{cc}}}\nu_{xy}^{\mathrm{eq}}\\ \rho_{\mathrm{cc}}=\dfrac{t_{\mathrm{cc}}}{ph_{\mathrm{c}}}\rho\left(p-\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\tan\theta_{\mathrm{c}}}+\dfrac{h_{\mathrm{c}}}{\sin\theta_{\mathrm{c}}}\right)\end{cases} \tag{38}$$

3 数值算例与讨论分析

3.1 算 例

分别选定复合材料梯形波纹夹芯板 (CCSP) 和复合材料格栅夹芯板 (CGSP) 两个算例，其芯子和面板均采用碳纤维增强树脂基复合材料，预浸料单层的弹性参数见表 1。设 CCSP 和 CGSP 的上面板、芯子壁板和下面板的铺层方式为 $[(90/0)_4/\theta_{\mathrm{lf}}/-\theta_{\mathrm{lf}}]_{nf}$、$[0/90/0/(\theta_{\mathrm{lc}}/-\theta_{\mathrm{lc}})_2 0/90/0]_{nc}$ 和 $[-\theta_{\mathrm{lf}}/\theta_{\mathrm{lf}}/(0/90)_4]$，其中 $\theta_{\mathrm{lf}}=\theta_{\mathrm{lc}}=30°$。面板 h_{f} 和芯子壁板厚度 t_i (i = cc, gc) 均为 2 mm，芯子高度 h_{c}=15 mm，夹芯板总厚度 h=19 mm。CCSP 和 CGSP 的其他参数分别为：$b=h_{\mathrm{c}}/\tan\theta_{\mathrm{c}}$，$f_{\mathrm{c}}$=5 mm，$\theta_{\mathrm{c}}$=60°；$d_x$=40 mm，$d_y$=40 mm。为了便于比较分析，定义无量纲屈曲临界载荷为

$$\overline{N}_{\mathrm{cr}i}=\frac{10^6N_x^0h}{E_2A^2}\quad(i=\mathrm{gc},\mathrm{cc}) \tag{39}$$

同时为了衡量复合材料夹芯板结构的轻量化效益，定义比屈曲临界载荷 K_i：

$$K_i=\frac{h_{\mathrm{c}}+2h_{\mathrm{f}}}{\rho_ih_{\mathrm{c}}+2\rho h_{\mathrm{f}}}\overline{N}_{\mathrm{cr}i}\quad(i=\mathrm{gc},\mathrm{cc}) \tag{40}$$

表 1 碳纤维增强树脂基复合材料 (CFRP) 单层的弹性参数
Table 1 Elastic parameters of carbon fiber reinforced polymer (CFRP) material layer

Elastic parameter	Value
Longitudinal elastic modulus E_1/GPa	115
Normal elastic modulus E_2=E_3/GPa	6.2
In-plane shear modulus G_{12}=G_{13}/GPa	4.0
Out-plane shear modulus G_{23}/GPa	3.0
In-plane Poisson's ratio ν_{12}=ν_{13}	0.31
Out-plane Poisson's ratio ν_{23}	0.33
Average single layer thickness t/mm	0.2
Density ρ/(g·cm^{-3})	1.55

3.2 模型验证

在 ABAQUS/Standard 中建立 CCSP 和 CGSP 的三维有限元模型，面板和芯子均选用 SC8R 连续壳单元，分别施加四边简支 (SSSS)、加载边简支两侧边自由 (SSFF) 和加载边简支两侧边固支 (SSCC) 等 3 种不同边界条件，利用“Buckle”分析步计算屈曲临界载荷 $N_{\mathrm{cr}i}$。表 2 为本文的理论解与有限元数值结果的对比。与有限元结果相比，本文理论模型计算的屈曲临界载荷的误差均在 5% 以内，完全能够满足工程分析的精度要求。图 2 为网格尺寸为 25 时不同边界条件下两算例的整体屈曲模态云图，变形状态符合预期。

表 2　本文方法与有限元仿真得到的 CFRP 复合材料梯形波纹夹芯板 (CCSP) 和复合材料格栅夹芯板 (CGSP) 屈曲临界载荷

Table 2　Critical buckling load of the CFRP composite trapezoidal corrugated sandwich panel (CCSP) and composite grid sandwich panel (CGSP) by present method and numerical simulation

Example	Boundary condition	Numerical results under different mesh sizes					Present	Average error/%
		25	20	15	10	5		
CCSP	SSFF	22.29	22.11	21.94	21.79	21.34	22.71	3.70
	SSSS	38.89	38.66	38.40	38.19	38.06	39.49	2.74
	SSCC	78.79	78.10	77.28	76.62	76.35	78.14	0.93
CGSP	SSFF	13.46	13.47	13.35	13.17	13.22	13.03	−2.26
	SSSS	22.60	23.59	23.34	23.07	22.71	22.65	−2.63
	SSCC	39.99	39.98	39.11	38.55	38.10	40.90	4.53

Notes: SSFF—Loading opposite sides simply supported and the others free; SSSS—Four sides simply supported; SSCC—Loading opposite sides simply supported and the others clamped.

3.3　铺层参数对复合材料格栅/波纹夹芯结构屈曲特性的影响

表 3 为 3 种芯子高度下不同铺层组数 n_c 对屈曲特性的影响，可发现随着芯子壁厚增加，CGSP 和 CCSP 的屈曲临界载荷增大，而比屈曲临界载荷均减小；3 种边界条件下两算例屈曲载荷和比屈曲载荷的大小关系为 SSCC>SSSS>SSFF, 说明增强边界约束能显著提高抗屈曲特性；计算结果显示每组参数对应的剪切影响系数 φ 的变化范围在 $0.99\pm1\times10^{-3}$ 以内，说明剪切变形的影响较小。

保持算例结构参数不变，基于验证过的理论模型，计算得出 3 种边界条件下 CCSP 和 CGSP 的铺层角度在 $0\leqslant\theta_{lf}=\theta_{lc}\leqslant90°$范围内变化时对应的曲线，如图 3 所示。可发现相同边界条件下 CCSP

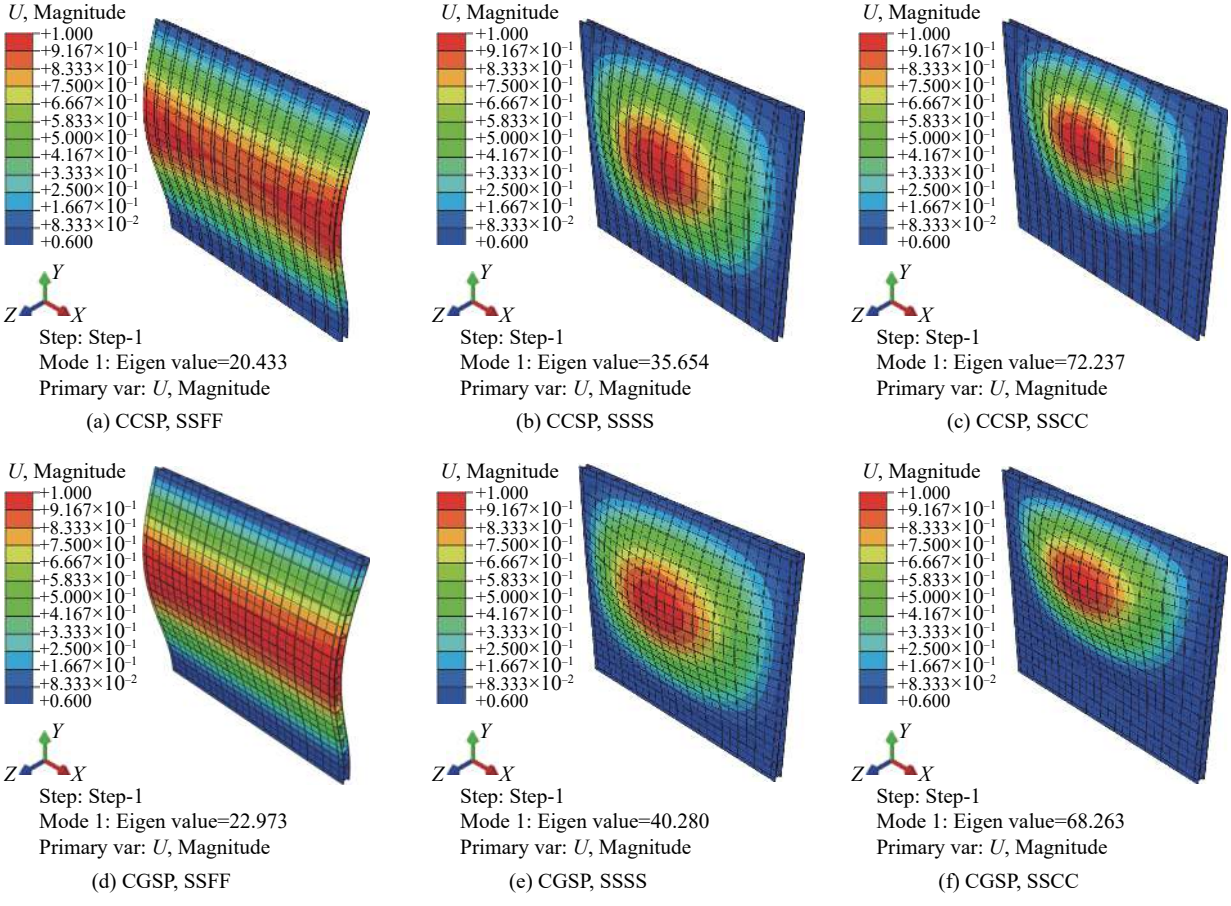


图 2　CFRP 复合材料夹芯板的有限元屈曲模态云图

Fig. 2　Finite element buckling mode of CFRP composite sandwich panel

表 3 芯子壁板铺层数对 CFRP 复合材料夹芯板屈曲特性的影响

Table 3 Effect of the number of layers of core siding on the buckling characteristics of CFRP composite sandwich panel

h_c	n_c	$\overline{N}_{crcc}$			K_{cc}			$\overline{N}_{crgc}$			K_{gc}		
		SSFF	SSSS	SSCC	SSFF	SSSS	SSCC	SSFF	SSSS	SSCC	SSFF	SSSS	SSCC
15	1	22.71	39.49	78.14	37.36	64.98	128.58	13.03	22.62	40.90	22.82	39.62	71.63
	2	27.54	48.70	95.81	27.35	48.36	95.15	13.62	23.61	42.88	16.70	28.94	52.56
	3	34.81	65.92	122.21	21.66	41.02	76.05	14.22	24.60	44.85	13.41	23.19	42.41
20	1	57.11	100.68	194.83	118.21	208.39	403.27	28.11	48.85	88.22	54.40	94.56	170.75
	2	65.50	114.09	225.83	84.50	147.20	291.37	29.89	51.81	94.13	38.56	66.85	121.46
	3	76.43	136.06	265.91	65.59	116.75	228.17	31.66	54.77	100.05	30.64	53.00	96.82
	4	91.92	173.01	322.22	53.85	101.37	188.79	33.45	57.74	105.98	25.89	44.70	82.05
25	1	126.69	229.15	428.38	315.12	569.97	1 065.54	52.15	90.66	163.74	108.42	188.47	340.39
	2	138.09	242.00	472.33	217.69	381.48	744.59	56.34	97.63	177.69	75.29	130.48	237.47
	3	154.53	269.63	533.38	166.85	291.12	575.89	60.54	104.63	191.66	59.62	103.03	188.74
	4	175.33	312.38	609.83	134.80	240.18	468.87	64.75	111.64	205.66	50.48	87.03	160.33
	5	203.83	379.63	713.60	113.64	211.66	397.85	68.97	118.68	219.69	44.50	76.57	141.74

Notes: h_c—Thickness of core; n_c—Number of groups of core plies; $\overline{N}_{crcc}$—Critical buckling load of CCSP; K_{cc}—Specific critical buckling load of CCSP; $\overline{N}_{crgc}$—Critical buckling load of CGSP; K_{gc}—Specific critical buckling load of CGSP.

的屈曲临界载荷均大于 CGSP；随着铺层角度增大，3 种边界条件下 CCSP 和 CGSP 的屈曲临界载荷的变化趋势相同，均为先增大后减小，在 45°附近取最大值，而 CGSP 的屈曲临界载荷的变化幅度不大，受铺层角度的影响较小。

综合表 2、表 3 及图 3 可知，相同参数下边界条件的加强会提高屈曲特性，但不会对屈曲临界载荷随参数的变化趋势造成影响，即边界条件与铺层、结构参数没有耦合效应，下文参数分析的内容也证明了这一点。限于篇幅，以下段落仅列出了四边简支夹芯板的分析结果。

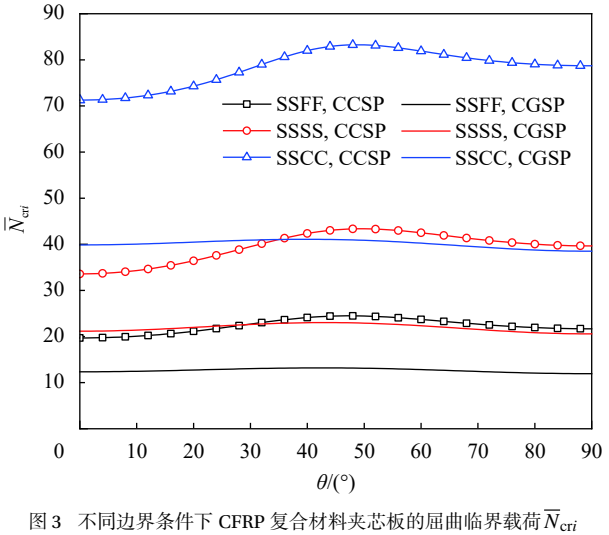


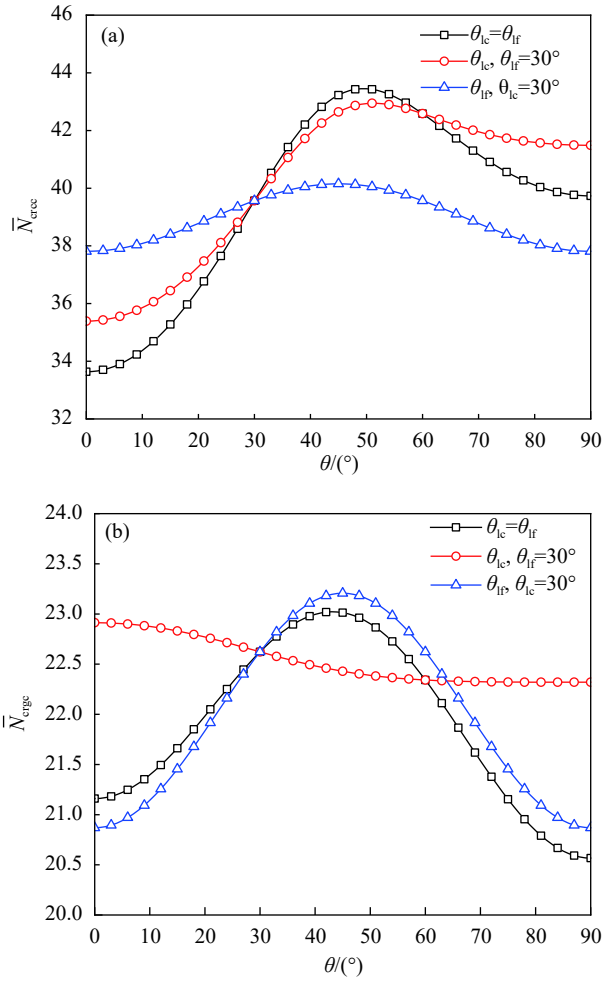
图 3 不同边界条件下 CFRP 复合材料夹芯板的屈曲临界载荷 $\overline{N}_{cri}$ 随铺层角度 θ 的变化

Fig. 3 Critical buckling load $\overline{N}_{cri}$ of CFRP composite sandwich panel under different boundary conditions varies with the layer angle θ

为评估格栅和波纹芯子的增强效果，保持四边简支条件下 CCSP 和 CGSP 的结构参数不变，计算 $0\leqslant\theta_{lf}=\theta_{lc}\leqslant90°$，$\theta_{lf}$=30°、$0\leqslant\theta_{lc}\leqslant90°$和 θ_{lc}=30°、$0\leqslant\theta_{lf}\leqslant90°$三种铺层方式下两算例的 $\overline{N}_{cri}$随铺层角度的变化规律，如图 4 所示。可发现波纹芯子壁板角度变化对 $\overline{N}_{crcc}$的影响程度要大于面板角度，而格栅芯子壁板角度变化对 $\overline{N}_{crgc}$的影响程度较小，说明波纹芯子的增强效果更为明显；计算出两个算例的剪变形切影响系数 φ 的变化幅度在 $\pm1\times10^{-3}$ 以内，说明该铺层厚度下角度变化对 φ 的影响可以忽略。

保持芯子的铺层参数和结构参数不变，分析四边简支边界条件下两个算例 $\overline{N}_{cri}$、K_i 和 φ 随面板铺层组数 n_f 的变化规律，如图 5 所示。由图 5(a) 可知，增加面板铺层数可以显著提高 CCSP 和 CGSP 的屈曲临界载荷和比屈曲临界载荷；由图 5(b) 可知，随着铺层数 n_f 增加，两算例的剪切变形影响系数均呈下降趋势，说明屈曲临界载荷受剪切变形的影响越来越大，n_f=15 对应的宽厚比 A/h=6.67，CCSP 和 CGSP 的 φ 分别为 0.81 和 0.82。

取算例的 n_f=15，其他参数保持不变，分析铺层角度在 $0\leqslant\theta_{lf}=\theta_{lc}\leqslant90°$范围内变化剪切变形影响系数的变化趋势，结果如图 6 所示。可发现 $\theta_{lf}=\theta_{lc}$=45°，两算例受剪切变形的影响最大；整体来看 CGSP 受剪切变形的影响程度要小于 CCSP，说明 CGSP 的抗剪性能相对较好。



θ_{lc}—Layer angle of core; θ_{lf}—Layer angle of facesheet

图 4　CFRP 复合材料夹芯板屈曲临界载荷随铺层角度变化规律

Fig. 4　Variation of critical buckling load of CFRP composite sandwich panel with layers angle

3.4　结构参数对复合材料格栅/波纹夹芯结构屈曲特性的影响

保持算例铺层参数不变，绘制两算例的屈曲临界载荷和比屈曲临界载荷随芯子高度 h_c 的变化规律曲线，如图 7 所示。可以看出，随着芯子高度的增加，两算例的 $\overline{N}_{cri}$ 和 K_i 均非线性增加；CCSP 的 $\overline{N}_{crgc}$ 和 K_{gc} 分别大于 CGSP 的 $\overline{N}_{crcc}$ 和 K_{cc}。而增大芯子高度以获得更大的屈曲临界载荷和比屈曲临界载荷的前提是夹芯板芯子壁板和胞元间面板不发生局部屈曲。

保持算例面板的所有参数和波纹芯子的铺层参数不变，基于精确板理论模型，分析复合材料波纹芯子的 2 个结构参数 $f_c=kb$ 和 θ_c 对 $\overline{N}_{crcc}$ 和 K_{cc} 的影响，计算结果如图 8 所示。可发现随着波纹倾角和波纹水平段的增大，CCSP 的 $\overline{N}_{crcc}$ 和 K_{cc} 整体均呈非线性减小趋势。在保证水平段能提供足够粘结力的前提下，应尽量选择较短的水平段长度和较小的倾角，以获得更好的屈曲性能。

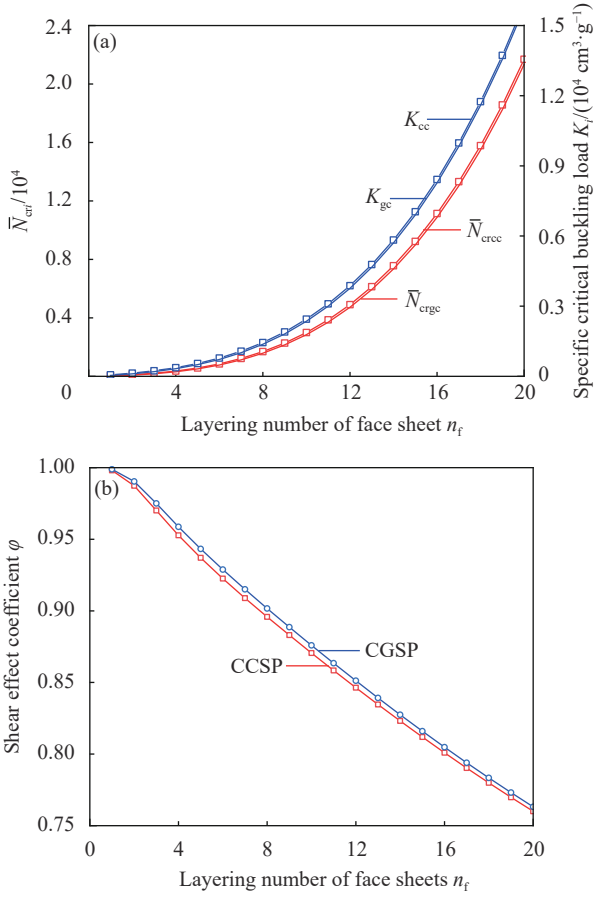


图 5　面板铺层数对 CFRP 复合材料夹芯板屈曲特性的影响

Fig. 5　Effect of the number of layers on the buckling characteristics of CFRP composite sandwich panel

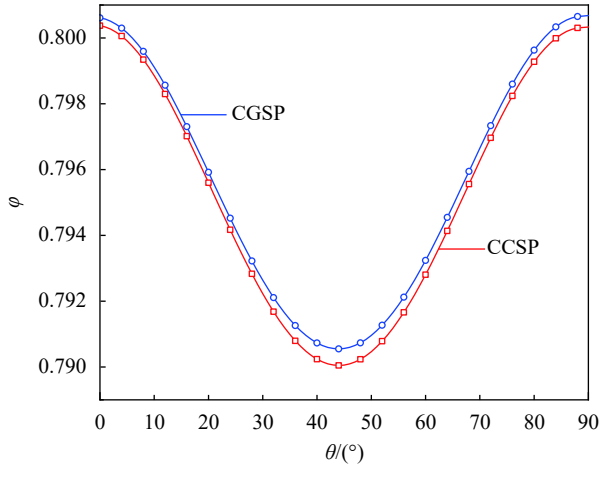


图 6　铺层角度对 CFRP 复合材料夹芯板剪切变形系数的影响

Fig. 6　Effect of layer angle on the shear deformation coefficient of CFRP composite sandwich panel

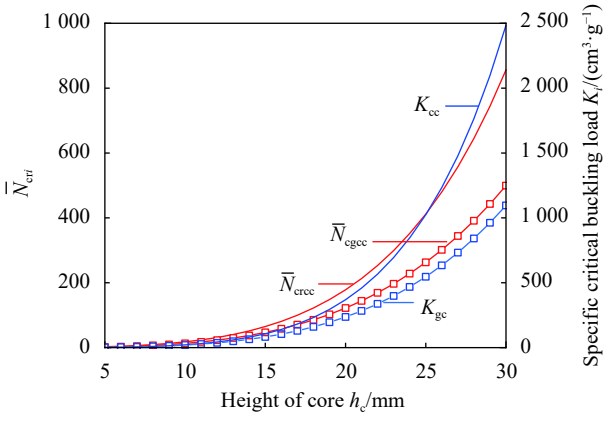


图 7 芯子高度对 CFRP 复合材料夹芯板屈曲特性的影响

Fig. 7 Effect of core height on the buckling characteristics of CFRP composite sandwich panel

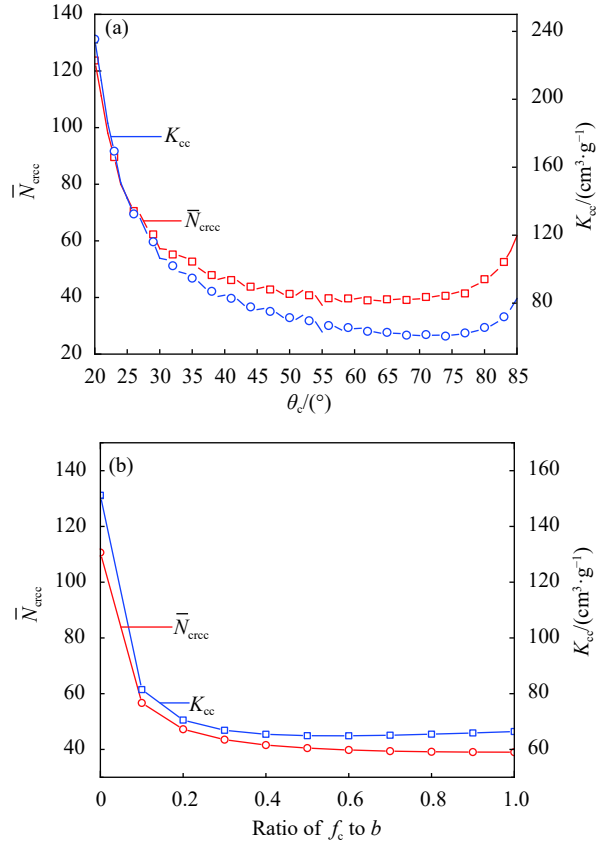


图 8 波纹芯子结构参数对 CFRP 复合材料波纹夹芯板屈曲特性的影响

Fig. 8 Effect of structure parameters of corrugated core on the buckling characteristics of CFRP composite corrugated sandwich panel

保持 CGSP 的铺层参数的不变，分别绘制“d_x=40 mm，5 mm ≤ d_y ≤ 500 mm”和“5 mm ≤ $d_y = d_x$ ≤ 500 mm”范围内 CGSP 的屈曲特性的变化规律曲线，如图 9 所示。可发现当格栅间距小于 0.5A 时，CGSP 的$\overline{N}_{crgc}$和 K_{gc} 随格栅间距的增大而大幅度减小；当格栅间距大于 0.5A 时，CGSP 的$\overline{N}_{crgc}$和 K_{gc} 随格栅间距的增大而变化的幅度较小。

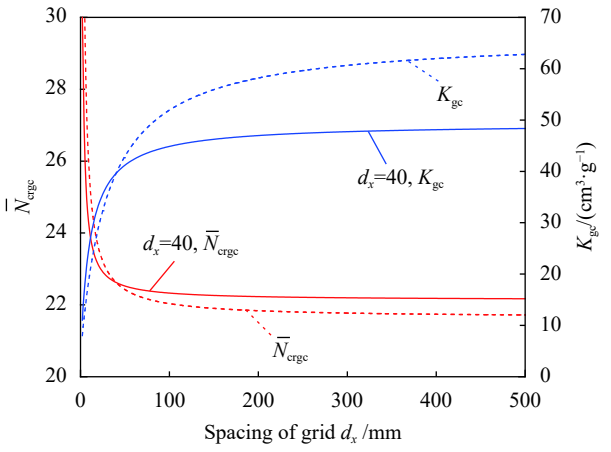


图 9 格栅间距对 CFRP 复合材料格栅夹芯板屈曲特性的影响

Fig. 9 Effect of grid spacing on the buckling characteristics of CFRP composite grid sandwich panel

本节中提及的结构参数的变化对 CCSP 和 CGSP 的剪切变形系数 φ 的变化幅度均在±1×10^{-3} 以内，故不予讨论。

4 结 论

(1) 基于三阶剪切变形精确板理论，提出了一种全复合材料格栅/波纹夹芯板屈曲临界载荷的计算方法，该方法精度高且比有限元仿真效率高，可用于复合材料夹芯板结构的屈曲特性预测评估和优化设计。

(2) 给出了复合材料横观各向同性层合板、正交各向异性格栅和梯形波纹芯子等效工程弹性常数的表达式，基于精确板理论模型计算式中的剪切修正因子更为简单。

(3) 加强复合材料夹芯板边界约束可显著提高屈曲临界载荷；随着铺层角度的增大，两种夹芯板的屈曲临界载荷$\overline{N}_{cri}$均先增大后减小，对应的剪切变形影响系数 φ 的变化规律正好相反，$\overline{N}_{cri}$和 φ 均在 45°铺层取极值；与面板的铺层角度 θ_{lf} 相比，梯形波纹芯子铺层角度 θ_{lc} 的变化对屈曲临界载荷的影响更大。

(4) 芯子壁板铺层组数 n_c、面板铺层组数 n_f、芯子高度 h_c 的增大会使两种夹芯板屈曲临界载荷$\overline{N}_{cri}$和比屈曲临界载荷 K_i 均增大；面板铺层组数 n_f 增大会使夹芯板受剪切变形的影响也增大。

(5) 随着波纹芯子倾角 θ_c 和水平段长度 f_c 的增大，对应夹芯板的屈曲临界载荷$\overline{N}_{crcc}$和比屈曲临界载荷 K_{cc} 整体均呈非线性减小趋势；随着格栅

间距 d_x 的增大，对应夹芯板的屈曲临界载荷 $\overline{N}_{\mathrm{crgc}}$ 减小，且在 $d_x \leqslant 0.5A$ 范围内大幅减小，而比屈曲临界载荷 K_{gc} 的变化趋势正好相反。

参考文献：

[1] 刘建良, 梅志远, 张焱冰, 等. 浮力材料和橡胶格栅夹层板振动响应试验对比研究[J]. 中国舰船研究, 2019, 14(4)：1-6, 13.
LIU J L, MEI Z Y, ZHANG Y B, et al. Comparative study on vibration response test of buoyancy-core and rubber-core grid sandwich panels[J]. Chinese Journal of Ship Research，2019，14(4)：1-6, 13(in Chinese).

[2] 燕瑛, 刘玉佳, 廖宝华, 等. 先进复合材料格栅结构与大型飞机[J]. 航空制造技术, 2009(2)：26-29.
YAN Ying, LIU Yujia, LIAO Baohua, et al. Advanced composite grid structure and large aircraft[J]. Aviation Manufacturing Technology，2009(2)：26-29(in Chinese).

[3] GIUSTO G, TOTARO G, SPENA P, et al. Composite grid structure technology for space applications[J]. Materials Today: Proceedings，2021，34(Part 1)：332-340.

[4] ZANGANA S, EPAARACHCHI J, FERDOUS W, et al. A novel hybridised composite sandwich core with Glass, Kevlar and Zylon fibres – Investigation under low-velocity impact[J]. International Journal of Impact Engineering，2020，137：103430.

[5] CHEN Liming, PENG Shiwei, LIU Jian, et al. Compressive response of multi-layered thermoplastic composite corrugated sandwich panels: Modelling and experiments[J]. Composites Part B: Engineering，2020，189：107899.

[6] HU Yang, LI Wanxin, AN Xiyue, et al. Fabrication and mechanical behaviors of corrugated lattice truss composite sandwich panels[J]. Composites Science and Technology，2016，125：114-122.

[7] 徐世南, 吴催生. 导弹结构热防护一体化设计与优化[J]. 国防科技大学学报, 2020, 42(2)：78-84.
XU Shinan, WU Cuisheng. Design and optimization of structure-thermal protection intergrated for missile[J]. Journal of National University of Defense Technology，2020，42(2)：78-84(in Chinese).

[8] 时圣波, 唐硕, 梁军. 临近空间飞行器防隔热/承载一体化热结构设计及力/热行为[J]. 装备环境工程, 2020, 17(1)：36-42.
SHI Shengbo, TANG Shuo, LIANG Jun. Design and thermo-mechanical behavior of full-composite structurally integrated thermal protection structure for near space vehicles[J]. Equipment Environmental Engineering，2020，17(1)：36-42(in Chinese).

[9] LI Ying, ZHANG Lu, HE Rujie, et al. Integrated thermal protection system based on C/SiC composite corrugated core sandwich plane structure[J]. Aerospace Science and Technology，2019，91：607-616.

[10] SUN Jian, GUAN Qinghua, LIU Yanju, et al. Morphing aircraft based on smart materials and structures: A state-of-the-art review[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures，2016，27(17)：2289-2312.

[11] HIROKI Takahashi, TOMOHIRO Yokozeki, YOSHIYASU Hirano. Development of variable camber wing with morphing leading and trailing sections using corrugated structures[J]. Journal of Intelligent Material System Structures，2016，27(20)：2827-2836.

[12] 骆伟. 混杂夹层结构低速冲击及剩余弯曲强度研究[D]. 北京: 中国舰船研究院, 2018.
LUO Wei. Investigation of low-velocity and residual bending strength characteristics of hybrid sandwich structures[D]. Beijing: China Ship Research and Development Academy, 2018 (in Chinese).

[13] 石姗姗, 孙直, 任明法, 等. 格栅非均匀分布效应对复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的影响[J]. 工程力学, 2012, 29(4)：43-48.
SHI Shanshan, SUN Zhi, REN Mingfa, et al. The effect of non-uniform distribution of grid on stability of advanced grid stiffened composite conical shell[J]. Engineering Mechanics，2012，29(4)：43-48(in Chinese).

[14] 石姗姗, 陈秉智, 孙直, 等. 基于变环肋间距的碳纤维/环氧树脂复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体稳定性[J]. 复合材料学报, 2018, 35(8)：2032-2038.
SHI Shanshan, CHEN Bingzhi, SUN Zhi, et al. Stability of advanced grid stiffened carbon fiber/epoxy composite conical shells with novel distribution of circumferential ribs[J]. Acta Materiae Composite Sinica，2018，35(8)：2032-2038(in Chinese).

[15] 石姗姗, 孙直, 任明法, 等. 温度-机械混合载荷作用下先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体的屈曲分析[J]. 复合材料学报, 2013, 30(6)：209-214.
SHI Shanshan, SUN Zhi, REN Mingfa, et al. Buckling resistance of advanced grid stiffened composite trapped conical shells under thermal and mechanical mixed loading[J]. Acta Materiae Composite Sinica，2013，30(6)：209-214(in Chinese).

[16] 陈烈民, 杨宝宁. 复合材料的力学分析[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2006: 174-314.
CHEN Liemin, YANG Baoning. Mechanical analysis for composite materials[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2006: 174-314 (in Chinese).

[17] ZHU Xiujie, XIONG Chao, YIN Junhui, et al. Bending experiment and mechanical properties analysis of composite sandwich laminated box beams[J]. Materials，2019，12(18)：2959.

[18] 李华东, 周振龙, 陈国涛. 基于高阶剪切理论的复合材料格栅夹层板弯曲特性[J]. 复合材料学报, 2019, 36(12)：2745-2755.

LI H D, ZHOU Z L, CHEN G T. Bending characteristic of composite grid sandwich plate based on high-order shear theory[J]. Acta Materiae Composite Sinica，2019，36(12)：2745-2755(in Chinese).

[19] 谈超, 李玉龙, 郭亚洲. 复合材料夹芯管胶接连接结构力学特性分析[J]. 复合材料学报, 2014, 31(6)：1532-1542.
TAN Chao, LI Yulong, GUO Yazhou. Mechanical property analysis of composite adhesively bonded sandwich pipe joints[J]. Acta Materiae Composite Sinica，2014，31(6)：1532-1542(in Chinese).

[20] 富明慧, 尹久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数[J]. 力学学报, 1999(1)：113-118.
FU Minghui, YIN Jiuren. Equivalent elastic parameters of the honeycomb core[J]. Acta Mechanica Sinica，1999(1)：113-118(in Chinese).

[21] GIBSON L J, ASHBY M F，SCHAJER G S. The mechanics of two-dimension cellular materials[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1982, 382(1782): 43-59.

[22] CHEN H J. Analysis and optimum design of composite grid structures[J]. Journal of Composite Materials，1996，30(4)：503-533.

[23] 郑青. 新型格栅结构设计及力学性能研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2017.
ZHENG Qin. Design and mechanical properties of novel lattice structures[D]. Changsha: National University of Defense Technollogy, 2017 (in Chinese).

[24] PENG L X, LIEW K M, KITIPORNCHAI, S. Analysis of stiffened corrugated plates based on the FSDT via the mesh-free method[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2006，49(3)：364-378.

[25] PARK K J, JUNG K, KIM Y W. Evaluation of homogenized effective properties for corrugated composite panels[J]. Composite Structures，2016，140：644-654.

[26] BARTOLOZZI Giorgio, BALDANZINI Niccolò, PIERINI Marco. Equivalent properties for corrugated cores of sandwich structures: A general analytical method[J]. Composite Structures，2014，108：736-746.

[27] REDDY J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis[M]. New York: CRC Press, 2004: 669-720.

[28] SHIMPI R P, PATEL H G. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis[J]. International Journal of Solids and Structures，2006，43(22)：6783-6799.

[29] THAI H T, CHOI D H. A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates[J]. Composite Structures，2013，106：754-763.

[30] 周涛, 宋彦琦. 基于4变量精确平板理论的剪切效应分析[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(11)：1268-1281.
ZHOU Tao, SONG Yanqi. Shear effect analysis on plates based on the 4-variable refined plate theory[J]. Applied Mathematics and Mechanics，2018，39(11)：1268-1281(in Chinese).

[31] SAYYAD A S, GHUGAL Y M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature[J]. Composite Structures，2017，171：486-504.

[32] 于天崇, 聂国隽, 仲政. 变刚度矩形板弯曲问题的Levy解[J]. 力学季刊, 2012, 33(1)：53-59.
YU Tianchong, NIE Guojun, ZHONG Zheng. Levy-type solution for the bending of rectangular plates with variable stiffness[J]. Chinese Quarterly of Mechanics，2012，33(1)：53-59(in Chinese).