第 15 卷 第 1 期 复 合 材 料 学 报 Vol 15 No. 1
1998 年 2 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA February 1998

复合材料加筋圆拱壳的失稳特性分析

何建国 贺晓光
(宁夏农学院食品科学系, 宁夏永宁 750105)

摘 要 本文应用增量形式的拉格朗日列式法对其有纵横加筋的迭层圆拱壳在均布载荷作用下的稳定性进行了非线性有限元分析。文中应用 Sander 壳体理论及横向剪切的影响, 推导了矩形壳元及与该壳元变形相协调的直梁元和曲梁元的切线刚度矩阵。编制了 FORTRAN 计算程序。计算并分析了加筋拱壳的局部及整体失稳过程。

关键词 复合材料, 壳, 屈曲, 有限元
中图分类号 O242 21, O344 7

以碳纤维/环氧为代表的先进复合材料, 具有比强度高, 比刚度大和可以人为设计材料性能等一系列优点。它已在航空、航天、核工业、机械等重要工业部门得到越来越多的应用。而复合材料薄壁结构在工程应用中, 屈曲失稳已成为主要的破坏形式[2]。解决这类问题的文章虽然已有一些, 但多为解析解, 一般只能用于规则的几何形状和典型的边界条件。实际应用上有一定的局限性。本文就复合材料加筋圆拱壳的失稳特别是后屈曲问题进行了理论推导及计算, 建立了非线性有限元模型, 提出了求解屈曲过程的具体方法及步骤, 最后给出具体算例。文中做了如下假设:

(1) 加筋壳体没有初始缺陷, 也不考虑纤维层间剥离现象;
(2) 材料是线弹性单模量的;
(3) 筋条是横观各向同性材料;
(4) 筋条沿垂直壳中曲面方向有弯曲刚度, 而沿中曲面方向是绝对柔软的;
(5) 在考虑横向剪切变形时, 采用平剖面假设, 不考虑壳体变形时的剖面翘曲现象;
(6) 湿度、温度在元素内为均匀分布。

1 增量形式的非线性平衡方程

本文采用虚功位移原理来建立系统的全量形式的平衡方程, 而后对全量形式的平衡方程两端同时变分, 既得增量形式的非线性平衡方程:

$$[K_T] = \delta\{q\} = \delta\{Q\} + \delta\{F\} \tag{1}$$

其中, $[K_T]$是结构的切线刚度矩阵; $\delta\{Q\}$是外载作用的结点载荷增量列阵; $\delta\{F\}$是湿, 热所引起的结点载荷增量列阵; $\delta\{q\}$是结构总结点位移的增量列阵: 因为:

$$[K_T] = [K_L] + [K_{NL}] + [K_\sigma] \tag{2}$$

收修改稿、初稿日期: 1997-05-19, 1997-02-28

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中:

$$[K_T] = \sum_{e=1}^{r}[T_e]^{\mathrm{T}}\left(\iint_{\Omega}[B_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[E][B_{\mathrm{L}}]\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)[T_e] + \sum_{e=1}^{s}[\bar{T}_e]^{\mathrm{T}}\left(\int_{L}[\bar{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}_{\mathrm{L}}]\mathrm{d}x\right)[\bar{T}_e] + \sum_{e=1}^{t}[\tilde{T}_e]^{\mathrm{T}}\left(\int_{L}[\tilde{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[\tilde{D}][\tilde{B}_{\mathrm{L}}]\mathrm{d}y\right)[\tilde{T}_e]$$

它是与位移无关的线性刚度矩阵。式中 r, s, t 分别表示结构所含壳单元, 直梁元, 曲梁元的单元总数; $[E]$, $[\bar{D}]$, $[\tilde{D}]$分别是相应的弹性矩阵; $[T_e]$, $[\bar{T}_e]$, $[\tilde{T}_e]$分别是相应单元的结点位移列阵转换成结构总位移列阵的转换矩阵。x 轴规定沿壳体轴线方向, y 轴规定沿圆弧方向。$[B_{\mathrm{L}}]$, $[\bar{B}_{\mathrm{L}}]$, $[\tilde{B}_{\mathrm{L}}]$ 分别是壳单元、直梁元、曲梁元的线性几何矩阵。

$$[K_{\mathrm{NL}}] = \sum_{e=1}^{r}[T_e]^{\mathrm{T}}\left\{\iint_{\Omega}(2[B_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[E][B_{\mathrm{NL}}] + 4[B_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[E][B_{\mathrm{NL}}] + 2[B_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[E][B_{\mathrm{L}}])\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right\}[T_e] + \sum_{e=1}^{s}[\bar{T}_e]^{\mathrm{T}}\left\{\int_{L}(2[\bar{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}_{\mathrm{NL}}] + 4[\bar{B}_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}_{\mathrm{NL}}] + 2[\bar{B}_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}_{\mathrm{L}}])\mathrm{d}x\right\}[\bar{T}_e] + \sum_{e=1}^{t}[\tilde{T}_e]^{\mathrm{T}}\left\{\int_{L}(2[\tilde{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}[\tilde{D}][\tilde{B}_{\mathrm{NL}}] + 4[\tilde{B}_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[\tilde{D}][\tilde{B}_{\mathrm{NL}}] + 2[\tilde{B}_{\mathrm{NL}}]^{\mathrm{T}}[\tilde{D}][\tilde{B}_{\mathrm{L}}])\mathrm{d}y\right\}[\tilde{T}_e]$$

它是与位移有关的非线性刚度矩阵。式中, $[B_{\mathrm{NL}}]$, $[\bar{B}_{\mathrm{NL}}]$, $[\tilde{B}_{\mathrm{NL}}]$分别是壳单元, 直梁元, 曲梁元的非线性几何矩阵。

$$[K_\sigma] = \sum_{e=1}^{r}[T_e]^{\mathrm{T}}[K_{\alpha e}][T_e] + \sum_{e=1}^{s}[\bar{T}_e]^{\mathrm{T}}[\bar{K}_{\alpha e}][\bar{T}_e] + \sum_{e=1}^{t}[\tilde{T}_e]^{\mathrm{T}}[\tilde{K}_{\alpha e}][\tilde{T}_e] \tag{3}$$

式中 $[K_{\alpha e}]$, $[\bar{K}_{\alpha e}]$, $[\tilde{K}_{\alpha e}]$ 分别是壳单元、直梁元, 曲梁元的湿, 热刚度矩阵。$[K_\sigma]$是与湿、热膨胀有关的结构刚度矩阵。

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{r}[T_e]^{\mathrm{T}}\{F_e\} + \sum_{e=1}^{s}[\bar{T}_e]^{\mathrm{T}}\{\bar{F}_e\} + \sum_{e=1}^{t}[\tilde{T}_e]^{\mathrm{T}}\{\tilde{F}_e\} \tag{4}$$

其中:

$$\left.\begin{aligned}\{F_e\} &= \iint_{\Omega}[B_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}\lfloor\Delta N_T\ \Delta M_T\ 0\rfloor^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ \{\bar{F}_e\} &= \int_{L}[\bar{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}\lfloor\Delta\bar{N}_{xT}\ 0\ 0\ 0\rfloor^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\\ \{\tilde{F}_e\} &= \int_{L}[\tilde{B}_{\mathrm{L}}]^{\mathrm{T}}\lfloor\Delta\tilde{N}_{yT}\ 0\ 0\ 0\rfloor^{\mathrm{T}}\mathrm{d}y\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\{\Delta N_T\} &= \begin{bmatrix}\Delta N_{xT}\\ \Delta N_{yT}\\ \Delta N_{xyT}\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\\ \alpha_{xy}\end{bmatrix}\Delta T + \begin{bmatrix}\beta_x\\ \beta_y\\ \beta_{xy}\end{bmatrix}\Delta W\right]\mathrm{d}z =\\ &\sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}[\bar{Q}]_k(\{\alpha\}_k\Delta T + \{\beta\}_k\Delta W)\mathrm{d}z\\ \{\Delta M_T\} &= \sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}[\bar{Q}]_k(\{\alpha\}_k\Delta T + \{\beta\}_k\Delta W)z\,\mathrm{d}z\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中, $[\bar{Q}]_k$, $\{\alpha\}_k$、$\{\beta\}_k$分别为第 k 层壳在 xy 坐标系中的弹性矩阵, 热膨胀系数列阵及湿膨胀系数列阵。

$$\left.\Delta\bar{N}_{xT} = EF(\bar{\alpha}_x\Delta T + \bar{\beta}_x\Delta W);\quad \Delta\tilde{N}_{yT} = b\tilde{E}F(\tilde{\alpha}_y\Delta T + \tilde{\beta}_y\Delta W)\right\} \tag{7}$$

式中, $\bar{\alpha}_x$, $\tilde{\alpha}_y$, $\bar{\beta}_x$, $\tilde{\beta}_y$ 分别是直梁元与曲梁元的轴向热膨胀系数与湿膨胀系数; N 为层数; ΔT 与 ΔW 分别为温差和湿差; EF 与$\tilde{E}F$分别是直梁元与曲梁元的横截面拉伸刚度; $b = R/(R-e)$, R 是壳单元的半径, e 是曲梁剖面形心到壳单元中曲面之距(偏心距)。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　壳单元、直梁元、曲梁元几何矩阵的建立

2.1　壳单元的几何矩阵

本文采用矩形壳单元, 在中曲面建立正交曲线坐标系 $o\text{-}xyz$, 坐标原点 o 在中曲面的中点(见图1)沿 x, y, z 方向的中曲面位移分别为 u, v, w, 考虑横向剪切变形后, 采用"直线"假设。即法线变形后仍为直线, 但不再垂直于中曲面, 其转角为:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_x(x,y) &= \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x(x,y)\\ \varphi_y(x,y) &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} - \gamma_y(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中, γ_x, γ_y 分别为相应轴的平均剪切角。

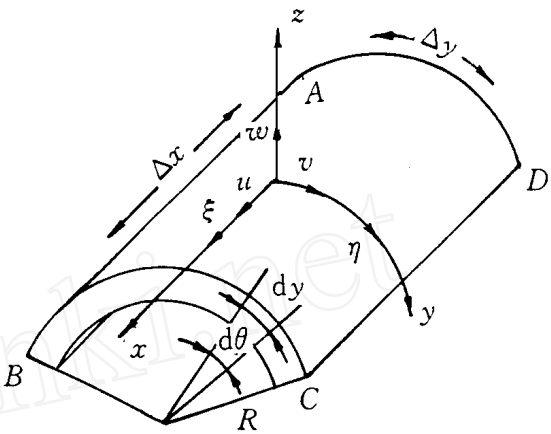

图1　矩形壳单元

Fig. 1　Rectangle shell element

考虑 Sander 壳体理论的中等挠度与大转动时中曲面的应变-位移关系为:

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_x^{\circ} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^2\\ \epsilon_y^{\circ} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^2\\ \gamma_{xy}^{\circ} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}\right);\quad \gamma_{xz}^{\circ} = \gamma_x;\quad \gamma_{yz}^{\circ} = \gamma_y\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

中曲面的曲率及扭率为:

$$\left.\begin{aligned}k_x &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\\ k_y &= -\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}\\ 2k_{xy} &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) =\\ &\quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

层合壳中任一点的应变为:

$$\lfloor \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rfloor^{\mathrm{T}} = \lfloor \epsilon_x^{\circ} + Zk_x, \epsilon_y^{\circ} + Zk_y, \gamma_{xy}^{\circ} + 2Zk_{xy}, \gamma_x, \gamma_y \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\lfloor \epsilon^{\circ}, k, \gamma \rfloor^{\mathrm{T}} = \lfloor \epsilon_x^{\circ}, \epsilon_y^{\circ}, \gamma_{xy}^{\circ}, k_x, k_y, 2k_{xy}, \gamma_{xz}^{\circ}, \gamma_{yz}^{\circ} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

壳单元的每个节点取8个自由度, 其中, 薄膜状态取 U_i, V_i; 弯曲状态取 W_i, $\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_i$, $\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_i$, $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)_i$; 剪切状态取 γ_{xi}, γ_{yi}。这里的 ξ, η 为壳元的自然坐标。

薄膜位移采用二维线性插值函数:

$$\varphi^{\mathrm{m}} = \frac{1}{4}\lfloor (1-\xi)(1-\eta), (1+\xi)(1-\eta), (1+\xi)(1+\eta), (1-\xi)(1+\eta) \rfloor$$

则:

$$\lfloor u, v \rfloor^{\mathrm{T}} = \varphi^{\mathrm{m}} I \lfloor u_e, v_e \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

其中:

$$\{u_e\}^{\mathrm{T}} = \lfloor u_A, u_B, u_C, u_D \rfloor;\ \{v_e\}^{\mathrm{T}} = \lfloor v_A, v_B, v_C, v_D \rfloor$$

弯曲状态采用一阶厄米特插值函数: $W = \bar{W}^{\mathrm{T}}\{q_e\}$　(14)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中$\bar{W}^{T}$是二点一阶厄米特插值函数组成的行阵,

$$\{q_e\}^T = \lfloor W_A, W_{\xi A}, W_{\eta A}, W_{\xi\eta A}, W_B, W_{\xi B}, W_{\eta B}, W_{\xi\eta B}, W_C, W_{\xi C}, W_{\eta C}, W_{\xi\eta C}, W_D, W_{\xi D}, W_{\eta D}, W_{\xi\eta D} \rfloor$$

剪切状态:

$$\lfloor \gamma_x, \gamma_y \rfloor^T = \bar{\varphi}_I \lfloor \gamma_{xe}, \gamma_{ye} \rfloor^T \tag{15}$$

其中: $\{\gamma_{xe}\} = \lfloor \gamma_{xA}, \gamma_{xB}, \gamma_{xC}, \gamma_{xD} \rfloor^T$; $\{\gamma_{ye}\} = \lfloor \gamma_{yA}, \gamma_{yB}, \gamma_{yC}, \gamma_{yD} \rfloor^T$, I 是2×2阶的单位矩阵。

将(13) (14) (15)式代入(12)式得:

$$\{\epsilon\} = \lfloor \epsilon^{\circ}_x \ k_x \ \gamma \rfloor^T = ([B_L] + [B_{NL}])\{q^e\} \tag{16}$$

其中: $\{q^e\} = \lfloor \{u_e\}^T \{v_e\}^T \{q_e\}^T \{\gamma_{xe}\}^T \{\gamma_{ye}\}^T \rfloor^T$; $[B_L]$ 是壳单元的线性几何矩阵; $[B_{NL}]$ 是壳单元的非线性几何矩阵。

$$\delta\{\epsilon\} = ([B_L] + 2[B_{NL}])\delta\{q_e\} \tag{17}$$

2.2 直梁元的几何矩阵

直梁元的轴向沿壳的 x 轴向(见图2)。为了使直梁元与壳单元协调, 我们以壳单元中曲面为参考面来推导直梁元。

面内位移采取线性插值函数。$\bar{\varphi} = \frac{1}{2}\lfloor (1-\xi), (1+\xi) \rfloor$

$$\lfloor u, v \rfloor^T = \bar{\varphi}_I [\bar{q}_0, \bar{q}_0^1] \tag{18}$$

其中: $\{\bar{q}_0\} = \lfloor u_A, u_B \rfloor^T$; $\{\bar{q}_0^1\} = \lfloor v_A, v_B \rfloor^T$

剪应变 $\gamma'_x = \bar{\varphi} \lfloor \gamma'_{xA}, \gamma'_{xB} \rfloor^T = \bar{\varphi}\{\gamma'_e\}$ (19)

直梁元的剖面转角: $\varphi'_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma'_x$ (20)

挠度仍采取厄米特插值函数 $w = \bar{\bar{W}}^T \{\bar{q}_1\}$ (21)

其中: $\{\bar{q}_1\} = \lfloor W_A, W_{\xi A}, W_B, W_{\xi B} \rfloor^T$

直梁元与壳元的剪切角不同, 但认为直线假设都成立, 且壳元与直梁元交界面, 弯形后仍是交界面。通过协调性, 可以求得参考面上点 C 的位移 u 与直梁元中性面上对应点 C 的面内位移 $\bar{u}$ 的几何关系为:

$$\bar{u}' = u + \varphi_x \frac{h}{2} + \varphi'_x (e - \frac{h}{2}) = u + \frac{\partial w}{\partial x} e - \frac{h}{2}\gamma_x - (e - \frac{h}{2})\gamma'_x \tag{22}$$

直梁中面拉伸应变为: $\bar{\epsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2$ (23)

上式右端的第二项是由于考虑了大转动而引入的非线性项。

直梁的弯曲曲率: $\bar{k}_x = \varphi'_{x,x} = \lfloor (\frac{2}{\Delta x})^2 \bar{\bar{W}}^T_{\xi\xi} - \frac{2}{\Delta x}\bar{\varphi}'_{\xi} \rfloor \lfloor \bar{q}_x, \bar{\gamma}'_e \rfloor^T$ (24)

直梁的扭转曲率: $\bar{H} = \frac{\partial \varphi'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{R}{R-e} - \frac{\bar{v}'}{R-e})$ (25)

按横观各项同性, 直梁的应变能为拉伸, 弯曲, 扭转与剪切应变能之和, 即:

$$\bar{U}^e = \frac{1}{2}\int_{dx} (\bar{\epsilon}_x E F \bar{\epsilon}_x + \bar{k}_x E I \bar{k}_x + \bar{H} G J \bar{H} + \bar{\gamma}'_x G_Y \bar{\gamma}'_x) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{dx} \{\bar{q}^e\}^T [\bar{a}_e]^T [\bar{D}] [\bar{a}_e] \{\bar{q}^e\} dx = \frac{1}{2}\int_{dx} \{\bar{\epsilon}\}^T \{\bar{D}\} \{\bar{\epsilon}\} dx \tag{26}$$

其中:

$$\{\bar{\epsilon}\} = [\bar{\epsilon}_x, \bar{k}_x, \bar{H}, \bar{\gamma}'_x]^T = ([\bar{B}_L] + [\bar{B}_{NL}])\{\bar{q}^e\} \tag{27}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\{\bar{q}^e\} = \lfloor \{\bar{q}_0\}^T \{\bar{q}_0'\}^T \{\bar{q}_1\}^T \{\bar{q}_2\}^T \{\bar{\gamma}_{ex}\}^T \{\bar{\gamma}_{ey}\}^T \{\bar{\gamma}_e'\}^T \rfloor^T$$

$$\delta\{\bar{\epsilon}\} = ([\bar{B}_L] + 2[\bar{B}_{NL}])\,\delta\{\bar{q}^e\} \tag{28}$$

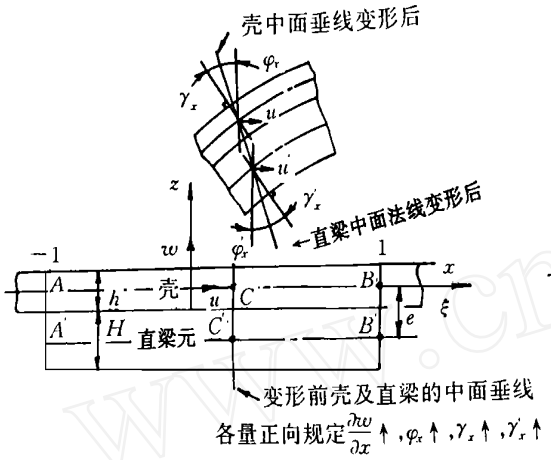

图2　直梁元与壳单元

Fig. 2　Straight beam element and shell element

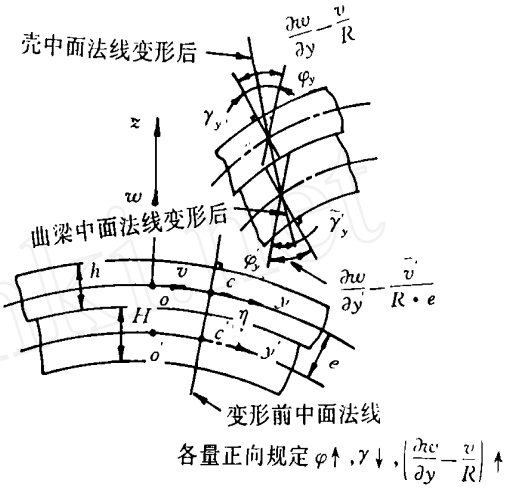

图3　曲梁元与壳单元

Fig. 3　Curved beam element and shell element

2.3　曲梁元的几何矩阵

曲梁元的轴向沿壳元的 y 轴向(见图3)其处理过程与直梁的相似, 只需增加初始曲率的影响, 如曲梁的剖面转角为:

$$\varphi_y' = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{R}{R-e} - \frac{\tilde{v}'}{R-e} - \gamma_y' \tag{29}$$

曲梁元的中面位移与参考面相应的位移关系式为:

$$\tilde{\gamma}' = v + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{h}{2} + \frac{R}{R-e}\left(e - \frac{h}{2}\right)\right) - \frac{v}{R} \cdot \frac{h}{2} - \tilde{\gamma}_y \cdot \frac{h}{2} - \frac{\tilde{v}'}{R-e}\left(e - \frac{h}{2}\right) - \tilde{\gamma}_y'\left(e - \frac{h}{2}\right) \tag{30}$$

曲梁元的中面拉伸应变为:

$$\tilde{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R-e} + \frac{1}{2}\frac{R}{R-e}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{R}{R-e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{31}$$

最后得:

$$\{\tilde{\epsilon}\} = [\tilde{\epsilon}_y, \tilde{k}_y, \tilde{H}, \tilde{\gamma}_{ey}']^T = [\tilde{a}_e]\{\tilde{q}^e\} \tag{32}$$

其中:

$$[\tilde{a}_e] = [\tilde{B}_L] + [\tilde{B}_{NL}] \tag{33}$$

3　屈曲过程的求解方法

求解非线性方程组的方法多种多样, 如牛顿-罗夫森(Newton-Rophson)的方法, 以及拟牛顿(Q. N. R)方法[3]。对于远离极值点的计算较容易, 但当载荷达到极值点时, 由于结构切线刚度矩阵 $[k_T]$ 的行列式为零, 此时应采取一些特殊处理方法。如假想弹簧法, 当前参数法和控制弧长法等。每种方法各有其优缺点, 选择何种方法最适宜, 原则是在满足同一计算精度的前提下, 最经济, 最省计算机时。因此, 不必用一种方法自始至终地计算到底, 可以在前后屈曲过程采用牛顿法, 当载荷接近极值点时改用控制弧长法, 最后用拉格朗日插值法求出极值点失稳载荷。利用该方法我们计算出整个结构在失稳过程中前后屈曲载荷-位移曲线。特别是对于加筋圆拱壳的局部失稳和整体失稳的计算结果表明了此种计算方法的可行性。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

4 算例与结论

本文重点对复合材料加筋圆拱壳在均布载荷作用下的稳定性进行了分析, 三种元素(壳元, 直梁元, 曲梁元)可靠性已在文献[1]中得到验证。

算例1: 复合材料加筋圆拱壳(见图4), 结构有4条环筋, 2条纵筋, 筋条横截面为矩型, 结构沿径线固支, 弧线自由, 壳壁为8层对称铺层, 铺层形式为$(90°, \pm 45°, 0°)_{2s}$, 弹性模量为:

$$E_1 = 14413.0\text{kg/mm}^2;\ E_2 = 914.0\text{kg/mm}^2;\ G_{12} = 527.3\text{kg/mm}^2;\ G_{23} = 439.4\text{kg/mm}^2;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = 0.335$$

所有筋条的纤维是沿纵向铺设的, 即筋条为横观各向同性材料, 弹性模量与壳壁相同。

结构几何尺寸为:

$a = 254\text{mm}$; $b = 254\text{mm}$; $\theta = 0.6$; $h = 1.0\text{mm}$; $H = 3.5\text{mm}$ (筋条高); $B = 1.5\text{mm}$ (筋条宽)

利用本文所推导的三种元素对加筋拱壳进行单元划分, 在相邻筋条之间采用4×4壳单元。利用对称性四分之一结构被划分成36个壳单元, 12个曲梁元, 6个直梁元, 参考均布压力 $q_0 = 100.0\text{kg/cm}^2$。计算了72个加载步。计算结果见图5(载荷-位移曲线), 其中 w_c 是加筋拱壳中心点的位移。λ 是载荷因子(即 $q = \lambda q_0$)由图5可见。加载过程可分5个阶段, 4个转折点。

(1) $0A$ 段为加载初始阶段, 该段蒙皮、筋条受压。A 点开始发生加筋条/框间的蒙皮局部失稳。

(2) AB 段蒙皮失去受压承载能力, B 点为蒙皮由受压转为受拉的转折点。

(3) BC 段主要是加筋条/框承载受压。而蒙皮处于受拉状态。C 点开始发生整体失稳。

(4) CD 段结构整体失去受压承载能力。D 点为结构整体由受压转为受拉的转折点。

(5) DE 段是所有结构元件受拉, 直到材料发生拉伸断裂。

A、B、C、D 各点的载荷因子 λ, 位移 w_c 的数值见表。

算例2: 与算例1不同之处是环筋密度加大, 即有6条环筋均匀分布, 外形尺寸, 铺层形式及其它参数不变。计算结果见表。由算例1、2比较可见, 由于环筋的密度加大, 结构的局部失稳和整体失稳载荷均有所提高。并且局部失稳时, 位移 w_c 减小, 可见, 以增加筋条为代价可以改善结构的局部及整体承载特性。

算例3: 结构尺寸, 铺层形式及其它参数同算例1不同之处是加筋圆拱壳外表面温度为90℃, 内表面温度30℃, 温度沿厚度方向呈线性分布。热膨胀系数 $\alpha_x = \alpha_y = 0.288 \times 10^{-5}\text{mm/mm/℃}$, 计算结果见表。

算例4: 与算例3的不同之处是处表面温度为30℃, 内表面温度90℃。计算结果见表。

由算例3、4结果可见, 当加筋圆拱壳的外表面温度高于内表面时结构的承载能力有所加大。其原因在于此时, 外表面的热膨胀大于内表面, 反之, 可得出相反的结果。

表1 A、B、C、D 各点的 λ 和 w_c 值

Table1 deflection w_c and loading factors λ of A、B、C、D (w_c/cm)

算 例	A 点		B 点		C 点		D 点	
	λ	w_c	λ	w_c	λ	w_c	λ	w_c
算例1	1.897	1.520	1.561	4.990	3.123	10.010	1.981	33.590
算例2	2.212	1.249	1.701	3.806	4.690	9.870	2.711	32.112
算例3	1.914	1.531	1.572	4.998	3.135	10.027	1.987	33.610
算例4	1.880	1.515	1.550	5.071	3.107	9.920	1.972	33.501

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

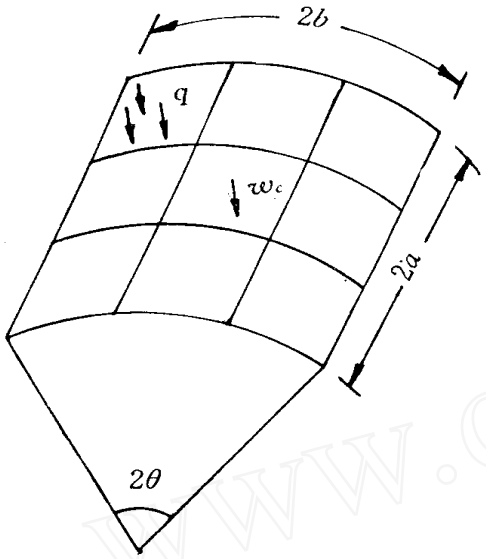

图4　加筋圆拱壳

Fig. 4　Reinforced arch shell

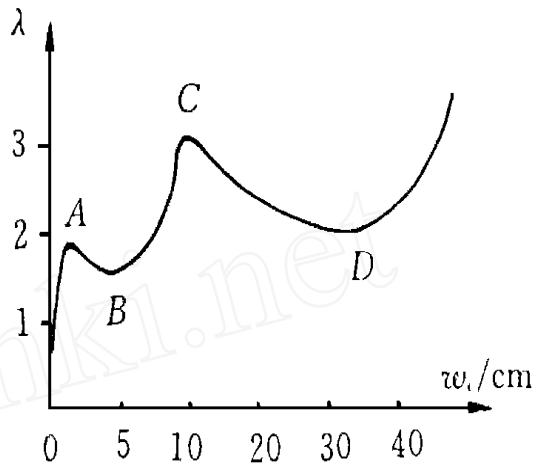

图5　载荷位移曲线

Fig. 5　Load and displacement curve

参 考 文 献

1　何建国, 胡训传, 李松年, 等. 复合材料加筋圆柱壳稳定性的非线性有限元分析. 航空学报, 1989, 10(6): 247～253

2　程昌钧, 杨骁, 吕小安. 开孔柱壳的非线性理论及其应用. 宁夏工学院学报增刊, 1996年7月: 1～9

3　龚尧南, 王寿梅. 结构分析中的非线性有限元素法. 北京: 北京航空学院出版社, 1986. 131～161. 203～241

4　Reddy J N. Geometrically nonlinear analysis of layered composite shells. VA 24061, 1983

ANALYSIS OF INSTABILITY FOR LAMINATED COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS WITH LONGITUDINAL STIFFENERS AND TRANSVERSE FRAMES

He Jianguo　　He Xiaoguang

(Departement of Food Science, NingXia Agricultural College, Yongning 750105)

Abstract　A nonlinear finite element based on the total Lagrangian incremental formulation of a two-dimensional anisotropic medium is developed, and its application in the geometrical nonlinear buckling and postbuckling analysis of stiffened layered composite shell is demonstrated via example problems under the combination of mechanical loading and hygrothermal loading. The finite element based on the Sander's shell theory with transverse shear strains is also presented. The tangential stiffness matrices of rectangle shell finite element, the beam and curved beam, the equivalent hygrothermal force vector, and the method of analysis of buckling and postbuckling are given. Finally, several example problems are illustrated by the FORTRAN Programme.

Key words　composite, shell, buckling, FEM

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net