复 合 材 料 学 报
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA
第 19 卷 第 3 期 6 月 2002 年
Vol. 19 No. 3 June 2002

文章编号: 1000-3851(2002) 03-0075-08

复合材料层合板三维分层问题的断裂力学分析

白 静, 孟庆春, 张 行
(北京航空航天大学 508 教研室, 北京 100083)

摘 要: 对复合材料层板中椭圆分层的断裂力学问题进行了研究。根据层板平面剪切型分层和反平面剪切型分层尖端附近位移场、应力场与应力强度因子的关系, 利用法向切片法, 得到椭圆分层前缘应力强度因子与能量释放率的关系。结合由附加位移所确定的总位能, 确定了能量释放率和应力强度因子沿分层前缘分布的表达形式。数值计算给出了二者随分层区形状、载荷以及各层厚度比等参数变化的分布情况。

关键词: 复合材料层板; 分层; 应力强度因子; 能量释放率
中图分类号: TB330.1; O343.2 **文献标识码:** A

ANALYSIS OF FRACTURE MECHANICS ON DELAMINATION IN COMPOSITE LAMINATE

BAI Jing, MENG Qing-chun, ZHANG Xing
(Division 508, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The fracture mechanics feature of elliptical delaminations in a composite laminate is studied. Using the method of normal slices, the relationship between stress intensity factors and energy release rate was established, based on the stress and displacement fields in the vicinity of the delamination-tip of a plane shear delamination and anti-plane shear delamination in a composite laminate. The distribution expression of the energy release rate along the front of the elliptical delamination area was obtained, combining with the total potential energy determined by the additional displacements. Computational results show the distribution of energy release rate and stress intensity factors with respect to the shape of delamination, load and thickness ratio of the laminate.

Key words: composite laminate; delamination; stress intensity factor; energy release rate

层间分层是复合材料层合结构的一种主要破坏形式。根据分层的结构不同, 可将分层分为二维分层和三维分层。二维分层问题的分析相对简单一些, 研究成果较多[1~3]。而对于三维分层问题, 一般采用薄膜分层模型予以解决。文献[4] 利用可动边界变分方法对分层扩展进行研究, 导出了分层前缘各点处的能量释放率的表达式, 文献[5] 则在分析薄圆板轴对称后屈曲变形之后的二次非轴对称分叉屈曲问题的基础上, 研究了圆形薄膜分层的后屈曲和二次屈曲特性以及圆形分层的能量释放率。对于层板中的分层, 也有人进行三维有限元研究, 文献[6] 建立了计算分层板的能量释放率各分量的三维、几何非线性有限元程序, 得出了一些用已有模型不易得到的结论, 然而这种做法是非常耗费机时的。文献[7] 采用状态分解-片条合成能量解法确定了含椭圆分层层板的附加位移闭合解答, 与文献[8] 双三角级数能量解法的解答吻合很好。文献[9] 则对蜂窝夹层结构脱胶分层问题进行了较为系统的理论研究。

本文中研究了复合材料三维分层问题, 根据复合材料层合板平面剪切型界面裂纹和反平面剪切型界面裂纹的位移场、应力场与应力强度因子的关系, 利用法向切片法, 建立了含椭圆形分层复合材料层合板分层前缘应力强度因子与能量释放率的关系, 并且结合由附加位移确定的总位能, 给出了能量释放率沿裂纹前缘的分布。

1 层板分层力学模型的简化

设对称正交铺层复合材料层合板, 铺层上下对

收稿日期: 2001-06-27; 收修改稿日期: 2001-10-09
基金项目: 航空科学基金资助项目(98B51026)
作者介绍: 白 静(1977), 女, 工学硕士, 主要从事复合材料力学的研究。

称,受横向分布载荷作用,在外层与内层间存在上下对称的椭圆形分层区,分层区 x,y 向的半轴长分别为 a 和 b,外层、内层厚度分别为 $2t_1$ 与 t_2。如文献[7]图 1 所示建立 oxyz 坐标系,原点 o 位于两分层区中心连线与层板上下对称面的交点处,xoy 平面平行于分层表面。本文中采用文献[7]的方法,将层板的受力状态分解为对称与反对称状态。可以证明,对称状态中的对称载荷不会引起分层扩展以及附加弯曲变形和应力;而反对称载荷将引起分层扩展以及附加弯曲变形和应力。通过在分层表面施加剪切载荷,将反对称状态分解为无分层状态($\langle U_1\rangle$状态)与附加分层状态($\langle U_2\rangle$状态)。容易看出,分层的产生和扩展与反对称状态中的无分层状态无关。于是,在考虑板受横向分布载荷的分层问题时,只需研究附加分层状态 $\langle U_2\rangle$。

假设未分层区沿全部厚度服从直法线假设,而分层区的每一层各自服从直法线假设。由于 $\langle U_2\rangle$状态中的层板仅在分层上下表面受到自相平衡的剪切载荷作用,所以未分层区可被视为刚体,其与分层区的交界面相当于固定支座。可见,仅在分层区内存在附加位移。将分层区取出,建立力学模型如图 1 所示(为方便,仅画出 xoz 剖面)。

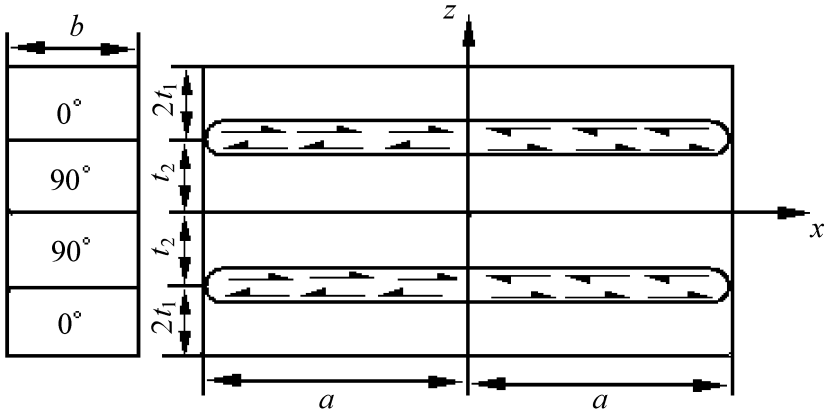

图 1　分层力学模型

Fig. 1　The mechanical model of delamination

2　二维裂纹总位能差率与应力强度因子关系的建立

为了分析三维分层问题,采用法向切片法,在分层前缘的法向切片内建立局部能量释放率与应力强度因子的关系。不论层板怎样铺设,对法向切片而言,分层上下的层板应按斜交铺设处理。

对于斜交铺层复合材料之间的Ⅱ型和Ⅲ型层间裂纹问题,如图 2 所示,文献[10]和[11]采用特征函数展开法,用应力强度因子表示裂纹延长线上的近场剪应力和裂纹上下表面面内位移。

对斜交铺层层板平面剪切型(Ⅱ型)界面裂纹

$$\varepsilon_{xz1}(r,0)=\varepsilon_{xz2}(r,0)=\frac{K_{\mathrm{II}}}{2\pi r} \tag{1}$$

$$u_{x1}(r,\pi)=-\frac{2(p_{11}g_{15}+p_{21}g_{35})}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi}K_{\mathrm{II}} \tag{2}$$

$$u_{x2}(r,-\pi)=\frac{2(p_{12}+p_{22}g_{75})}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi}K_{\mathrm{II}} \tag{3}$$

对斜交铺层层板反平面剪切型(Ⅲ型)界面裂纹

$$\varepsilon_{yz1}(r,0)=\varepsilon_{yz2}(r,0)=\frac{K_{\mathrm{III}}}{2\pi r} \tag{4}$$

$$u_{y1}(r,\pi)=\frac{2}{-_{z1}U_1}\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi}K_{\mathrm{III}} \tag{5}$$

$$u_{y2}(r,-\pi)=-\frac{2}{-_{z1}U_1Y}\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi}K_{\mathrm{III}} \tag{6}$$

其中,等式左端函数的下标 1、2 表示上下层,其余系数为与材料常数以及铺层角度有关的量[11]。

设二维裂纹长度由 a 扩展至 a+Δa,则系统的总位能差[12]为

$$\Delta C=-\frac{1}{2}\int_0^{\Delta a}(\varepsilon_{xz1}\Delta u_{x1}-\varepsilon_{xz2}\Delta u_{x2}+\varepsilon_{yz1}\Delta u_{y1}-\varepsilon_{yz2}\Delta u_{y2})\,\mathrm{d}r \tag{7}$$

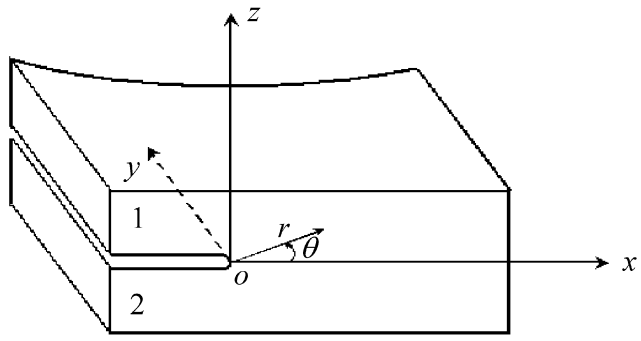

图 2　二维层板分层的力学模型

Fig. 2　The mechanical model of delamination in two-dimensional laminate

根据能量释放率定义[12]可得能量释放率与应力强度因子的关系如下:

$$G=-\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta a}=\frac{1+Y}{4_{-z1}U_1Y}K_{\mathrm{III}}^2-\frac{p_{11}g_{15}+p_{21}g_{35}+p_{12}+p_{22}g_{75}}{\pi(t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35})}K_{\mathrm{II}}^2 \tag{8}$$

3　三维裂纹能量释放率的分布

假设椭圆分层区面内位移为

$$\begin{aligned}u_1(x,y)&=f_1(x,y),\quad v_1(x,y)=g_1(x,y)\\ u_2(x,y)&=f_2(x,y),\quad v_2(x,y)=g_2(x,y)\end{aligned} \tag{9}$$

式中,下标 1、2 表示层号。

由图 3(a)可知,分层前缘法向切片的平面剪切位移 $D_{\mathrm{II}1}$ 与 $D_{\mathrm{II}2}$ 与反平面剪切位移 $D_{\mathrm{III}1}$ 与 $D_{\mathrm{III}2}$ 分别为

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{II}1}&=-(u_1\cos\varphi+v_1\sin\varphi)\\ D_{\mathrm{II}2}&=-(u_2\cos\varphi+v_2\sin\varphi)\\ D_{\mathrm{III}1}&=-(u_1\cos\varphi-v_1\sin\varphi)\\ D_{\mathrm{III}2}&=-(u_2\cos\varphi-v_2\sin\varphi)\end{aligned} \tag{10}$$

设式(9)中面内位移函数的平方为

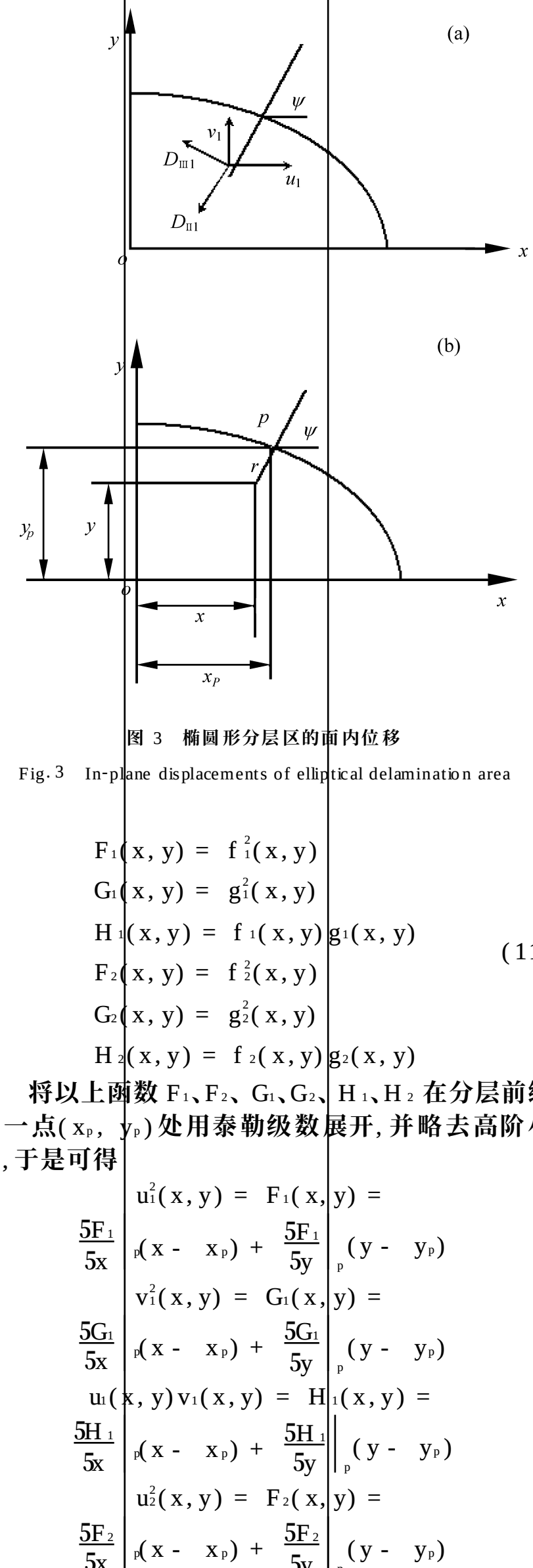

图 3　椭圆形分层区的面内位移

Fig. 3　In-plane displacements of elliptical delamination area

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y) &= f_1^2(x,y)\\
G_1(x,y) &= g_1^2(x,y)\\
H_1(x,y) &= f_1(x,y)g_1(x,y)\\
F_2(x,y) &= f_2^2(x,y)\\
G_2(x,y) &= g_2^2(x,y)\\
H_2(x,y) &= f_2(x,y)g_2(x,y)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

将以上函数 F_1、F_2、G_1、G_2、H_1、H_2 在分层前缘任一点(x_p, y_p)处用泰勒级数展开，并略去高阶小量，于是可得

$$
u_1^2(x,y) = F_1(x,y) = \frac{5F_1}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5F_1}{5y}\Big|_p(y-y_p)
$$

$$
v_1^2(x,y) = G_1(x,y) = \frac{5G_1}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5G_1}{5y}\Big|_p(y-y_p)
$$

$$
u_1(x,y)v_1(x,y) = H_1(x,y) = \frac{5H_1}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5H_1}{5y}\Big|_p(y-y_p)
$$

$$
u_2^2(x,y) = F_2(x,y) = \frac{5F_2}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5F_2}{5y}\Big|_p(y-y_p)
$$

$$
v_2^2(x,y) = G_2(x,y) = \frac{5G_2}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5G_2}{5y}\Big|_p(y-y_p)
$$

$$
u_2(x,y)v_2(x,y) = H_2(x,y) = \frac{5H_2}{5x}\Big|_p(x-x_p) + \frac{5H_2}{5y}\Big|_p(y-y_p) \tag{12}
$$

将式(10)左右两边平方，再将式(12)代入，可得切片梁位移 D_{II}、D_{III} 的平方表达式。再根据式(2)、式(3)、式(5)和式(6)确定的裂纹前缘的位移与 K_{II}、K_{III} 的关系，可知

$$
D_{\mathrm{II}1}^2 = \frac{1}{T_1^*(j)}K_{\mathrm{II}}^2 r,\quad D_{\mathrm{III}1}^2 = \frac{1}{U_1^*(j)}K_{\mathrm{III}}^2 r
$$

$$
D_{\mathrm{II}2}^2 = \frac{1}{T_2^*(j)}K_{\mathrm{II}}^2 r,\quad D_{\mathrm{III}2}^2 = \frac{1}{U_2^*(j)}K_{\mathrm{III}}^2 r \tag{13}
$$

式中：$T_1^*(j)$、$U_1^*(j)$、$T_2^*(j)$、$U_2^*(j)$是以材料弹性常数为参量的角度 j 的已知函数。

由图 3(b)可见

$$
x_p - x = r\cos j,\quad y_p - y = r\sin j \tag{14}
$$

于是将式(14)代入 D_{II}、D_{III} 的平方表达式，再根据式(13)，可得

$$
\begin{aligned}
K_{\mathrm{II}}^2 = -\,T_k^*(j)\;&\Big[\frac{5F_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5F_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big](\cos j)^2 +\\
&\Big[\frac{5G_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5G_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big](\sin j)^2 +\\
&\Big[\frac{5H_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5H_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big]\sin 2j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{\mathrm{III}}^2 = -\,U_k^*(j)\;&\Big[\frac{5F_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5F_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big](\cos j)^2 +\\
&\Big[\frac{5G_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5G_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big](\sin j)^2 -\\
&\Big[\frac{5H_k}{5x}\Big|_p\cos j + \frac{5H_k}{5y}\Big|_p\sin j\Big]\sin 2j
\end{aligned}
\tag{15}
$$

假设椭圆形分层区的扩展如图 4 所示，可知

$$
dr = dx\cos j + dy\sin j \tag{16}
$$

设椭圆的参数方程

$$
x = a\cos j,\quad y = b\sin j \tag{17}
$$

于是

$$
dr = \cos j\,\cos j\,da + \sin j\,\sin j\,db \tag{18}
$$

椭圆上微弧长

$$
ds = \sqrt{(a\sin j)^2 + (b\cos j)^2}\,dj \tag{19}
$$

由式(8)得法向切片的能量释放率与应力强度因子的关系

$$
R = V_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{II}}^2 + V_{\mathrm{III}}K_{\mathrm{III}}^2 \tag{20}
$$

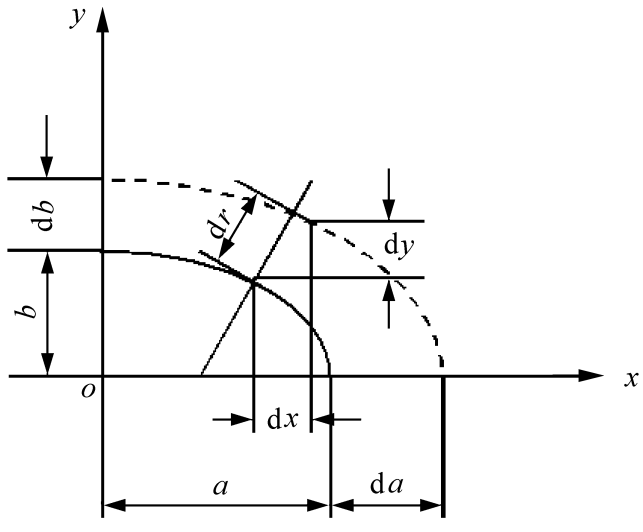

图 4　分层区扩展示意图

Fig. 4　The sketch map of crack extension in delamination area

式中,

$$V_{II} = -\frac{p_{11}g_{15} + p_{21}g_{35} + p_{12} + p_{22}g_{75}}{\pi(t_{11}g_{15} + t_{21}g_{35})}$$

$$V_{III} = \frac{1 + Y}{4_{z1}U_1Y}$$

可以得到椭圆形分层区的总位能的增量

$$dC = -\oint_s R\,dr\,ds =$$

$$-\oint_s (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\cos j\ \cos j\ ds\ da +$$

$$-\oint_s (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\sin j\ \sin j\ ds\ db \quad (21)$$

另一方面,总位能增量可表示为

$$dC = \frac{5C}{5a}da + \frac{5C}{5b}db \quad (22)$$

考虑到

$$\cos j = \frac{b\cos j}{\sqrt{(a\sin j)^2 + (b\cos j)^2}}$$

$$\sin j = \frac{a\sin j}{\sqrt{(a\sin j)^2 + (b\cos j)^2}} \quad (23)$$

故

$$\frac{5C}{5a} = -\int_s (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\,b(\cosh)^2 dj \quad (24)$$

$$\frac{5C}{5b} = -\int_s (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\,a(\sin j)^2 dj \quad (25)$$

设裂纹尖端区(即椭圆形分层区边缘)附近的位移场函数模态为

$$f_1(x,y) = a_f \frac{x}{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$Z_f \frac{x^3}{a^3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$Y_f \frac{x^5}{a^5}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (26)$$

$$g_1(x,y) = a_g \frac{y}{b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$Z_g \frac{y^3}{b^3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$Y_g \frac{y^5}{b^5}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}} +$$

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (27)$$

其中, a_f、a_g 是位移函数幅值, 为无量纲量。

$$a = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},\quad b = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (28)$$

我们知道

当 $x \to a$ 时, $\lim \frac{x}{a} = 1$,

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = 2\frac{a - x}{a} = 2\frac{r}{a}\cos j \quad (29)$$

当 $y \to b$ 时, $\lim \frac{x}{b} = 1$,

$$1 - \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{b - y}{b} = 2\frac{r}{b}\sin j \quad (30)$$

且

$$a = a\cos j \qquad b = b\sin j \quad (31)$$

为了描述裂纹尖端附近的应力、位移场, 可设

$$f_1(x,y) = a_f\sqrt{\frac{2}{a}\cos j\ \cos j + \frac{2}{b}\sin j\ \sin j}\ \sqrt{r}$$

$$g_1(x,y) = a_g\sqrt{\frac{2}{a}\cos j\ \cos j + \frac{2}{b}\sin j\ \sin j}\ \sqrt{r} \quad (32)$$

因而根据式(11)与(15)可得

$$K_{II}^2 = T_1^*(j)(a_f\cos j + a_g\sin j)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{a}\cos j\ \cosh + \frac{2}{b}\sin j\ \sin j}\right)^2$$

$$K_{III}^2 = U_1^*(j)(a_f\cos j - a_g\sin j)^2 \cdot$$

$$\frac{2}{a}\cos j\ \cos j + \frac{2}{b}\sin j\ \sin j \qquad (33)$$

将式(33)代入式(24)、(25), 可得到关于 a_f、a_g 的非线性方程组, 即

$$\frac{5C}{5a} = -\int_s [V_{II}T_1^*(j)(a_f\cos j + a_g\sin j)^2 + V_{III}U_1^*(h)(a_f\sin j - a_g\cos j)^2] \cdot \frac{2}{\frac{2}{a}\cos j\cos j + \frac{2}{b}\sin j\sin j}\, b(\cos j)^2 dj \qquad (34)$$

$$\frac{5C}{5b} = -\int_s [V_{II}T_1^*(j)(a_f\cos j + a_g\sin j)^2 + V_{III}U_1^*(j)(a_f\sin j - a_g\cos j)^2] \cdot \frac{2}{\frac{2}{a}\cos j\ \cos j + \frac{2}{b}\sin j\ \sin j}\, a(\sin j)^2 dj \qquad (35)$$

经积分后, 上式可写成

$$\frac{5C}{5a} = A_1 a_f^2 + A_2 a_f a_g + A_3 a_g^2 \qquad (36)$$

$$\frac{5C}{5b} = B_1 a_f^2 + B_2 a_f a_g + B_3 a_g^2 \qquad (37)$$

式中, 系数 A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3 是已知量, 可通过式(34)与 式(35)中之积分得到。

在参考文献[7]中, 利用片条合成法, 得到了分层区的总位能 Π, 进而可以求导得出$\frac{5C}{5a}$、$\frac{5C}{5b}$。求解非线性方程组(36)、(37)得 a_f、a_g 的值, 代入式(33), 然后将式(33)代入式(20), 可得沿椭圆分层区前缘的能量释放率的分布。

以上给出了一般情况下复合材料层合板分层问题能量释放率的计算方法。在上面式(26)与式(27)中所设位移 $f_1(x, y)$ 与 $g_1(x, y)$ 是相同的函数, 因此可以认为 $a_f = a_g = a$, 并假设裂纹的虚扩展方式是比例扩展, 即

$$da = a\,df,\quad db = b\,df$$

于是

$$dC = \frac{5C}{5a}da + \frac{5C}{5b}db = \frac{5C}{5a}a + \frac{5C}{5b}b\ df \qquad (38)$$

同时

$$dC = -\oint R\,ab\,dj\ df = -\oint (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\,ab\,dj\ df \qquad (39)$$

由以上两式

$$\frac{5C}{5a}a + \frac{5C}{5b}b = -\oint (V_{II}K_{II}^2 + V_{III}K_{III}^2)\,ab\,dj = -a^2\oint [V_{II}T_1^*(b\cos j + a\sin j)^2 + V_{III}U_1^*(a\sin j - b\cos j)^2] \cdot \frac{2(b\cos j + a\sin j)^2}{[(a\sin j)^2 + (b\cos j)^2]^{\frac{3}{2}}}\, dj \qquad (40)$$

式中左边$\frac{5C}{5a}$、$\frac{5C}{5b}$(参照文献[7])可由总位能表达式求导后得到。由式(40)容易解得 a 的值。将 a 值代入式(33)可得到应力强度因子 K_{II}、K_{III} 的表达式, 再根据式(20), 即可得分层区各点的能量释放率分布的表达式

$$R(j) = a^2[V_{II}T_1^*(b\cos j + a\sin j)^2 + V_{III}U_1^*(a\sin j - b\cos j)^2] \cdot \frac{2(b\cos j + a\sin j)^2}{ab[(a\sin j)^2 + (b\cos j)^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (41)$$

其中 h 是椭圆参数角。

4　算例及结果分析

设正交复材四层板铺设角为[0°/90°/90°/0°], 0°层纤维沿 x 方向。材料常数如下: E_1 = 137.9 GPa, E_2 = 14.48 GPa, G_{12} = 5.86 GPa, ν_{12} = 0.21, ν_{23} = 0.21。假定 x 方向为椭圆分层区的长轴方向, 半长轴 a = 100 mm不变, 而半短轴分别为 b = 100、90、80、70、60、50 mm。以下图表给出了在各种几何尺寸、载荷状态下, 含椭圆分层区的层合板按椭圆参数角 j 的能量释放率分布值(1/4 分层区)。横坐标为椭圆参数角 j (deg), 纵坐标为能量释放率($N \cdot m^{-1}$)。

图 5 给出了双向均布载荷作用、厚度比 $t_2/t_1 = 1$ 情况下, 六种椭圆形分层区的能量释放率分布。由图中可以看出, 能量释放率沿分层区前缘的变化很大, 其幅值点随短长轴比的变小而趋向于长轴顶点, 最大值出现在 b/a = 1 时 j = 17 附近, 并且在不同分层区形状下, 最大能量释放率随着短轴的增大而增大。由于能量释放率的幅值点并不随厚度变化而变化, 图 6 给出了在总厚度不变双向均布载荷作用下, 在能量释放率幅值点能量释放率随厚度比的变化规律。图 7 与图 8 分别给出了只有 x 方向和只有 y 方向均布载荷作用下, 不同椭圆形分层区下的能量释放率分布。由图中可以看出分布规律与双向均布载荷作用时相似。等值均布载荷作用于椭圆短轴方向时能量释放率比作用于椭圆长轴方向时大, 但比双

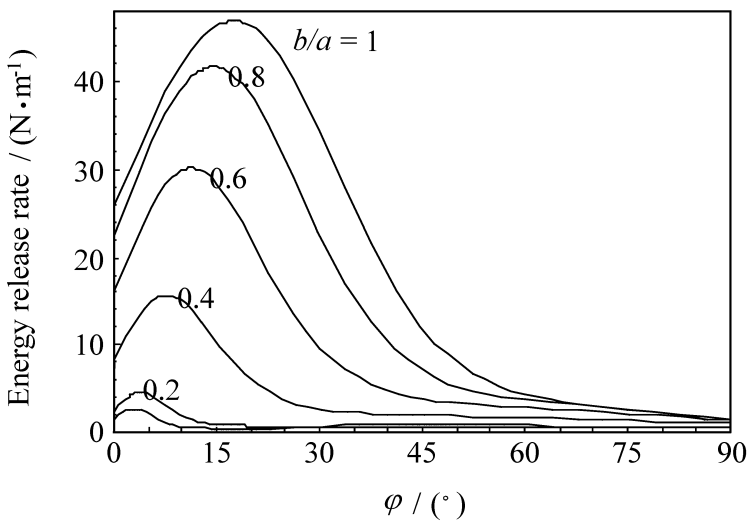

图 5　双向均布载荷作用下不同形状分层区分层前缘能量释放率的角分布

Fig. 5　The distribution of energy release rate along the front of delamination area in bi-directional uniform loading state

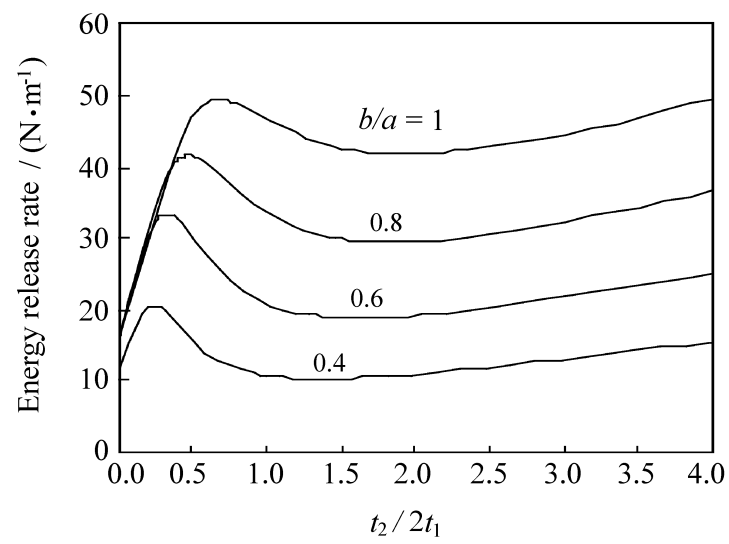

图 6　双向均布载荷作用下, 不同形状分层区最大能量释放率随厚度比的变化

Fig. 6　The largest energy release rate with respect to thickness ratio of different shapes of delamination area in bi-directional uniform loading state

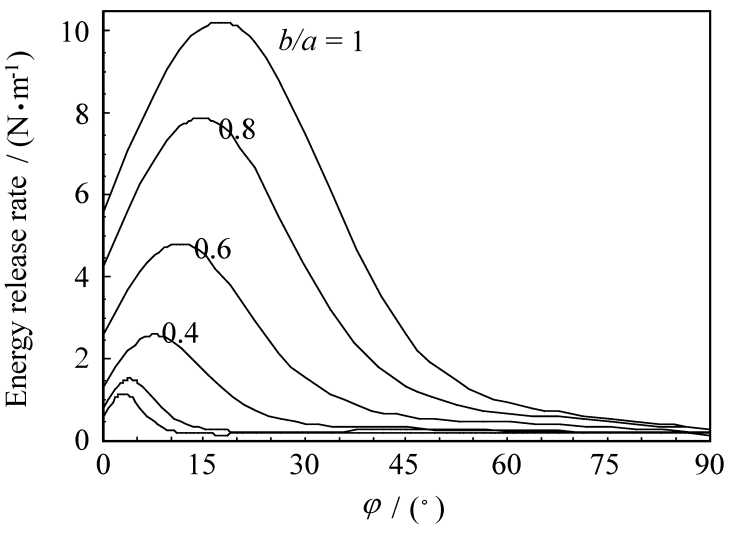

图 7　x 方向均布载荷作用下能量释放率的角分布

Fig. 7　The distribution of energy release rate along the front of delamination area in x-directional uniform loading state

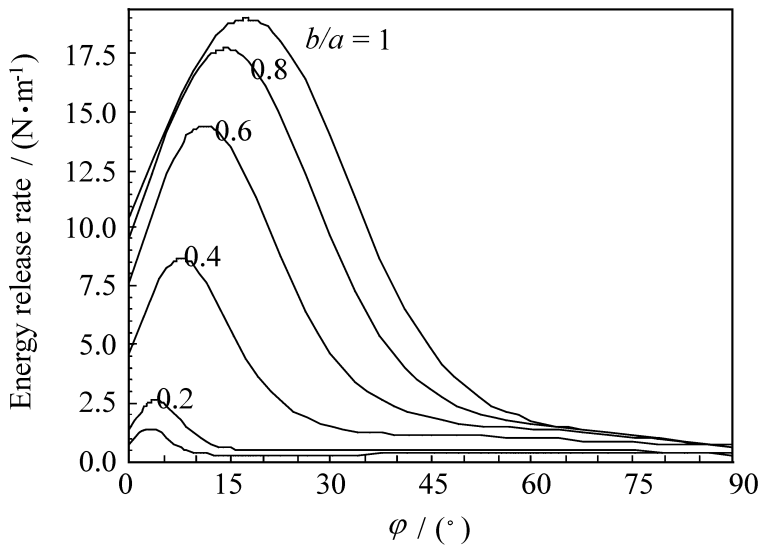

图 8　y 方向均布载荷作用下能量释放率的角分布

Fig. 8　The distribution of energy release rate along the front of delamination area in y-directional uniform loading state

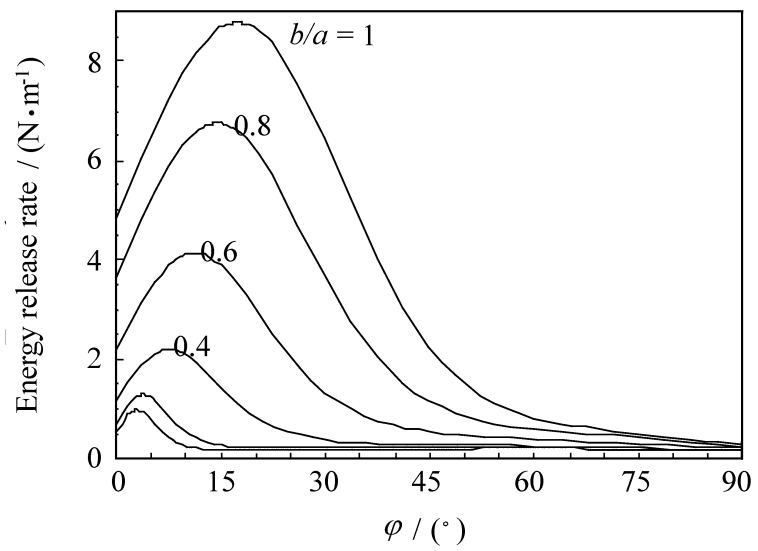

图 9　x 方向线性载荷作用下能量释放率的角分布

Fig. 9　The distribution of energy release rate along the front of delamination area in x-directional linear loading state

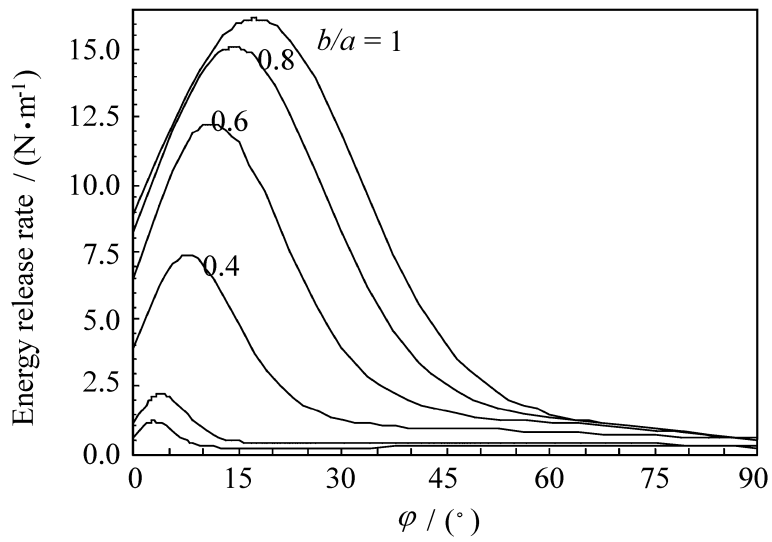

图 10　y 方向线性载荷作用下能量释放率的角分布

Fig. 10　The distribution of energy release rate along the front of delamination area in y-directional linear loading state

向均布载荷作用时小。图 9、图 10 给出了几种形状椭圆分层区在分别只有 x 或 y 方向线性载荷作用时能量释放率分布值。由图可以看出线性载荷作用时, 其分布规律与只有 x 方向或 y 方向受均布载荷作用时相似, 在与均布载荷合力相同的情况下, 幅值较均布载荷作用时小。图 11、图 12 给出了应力强

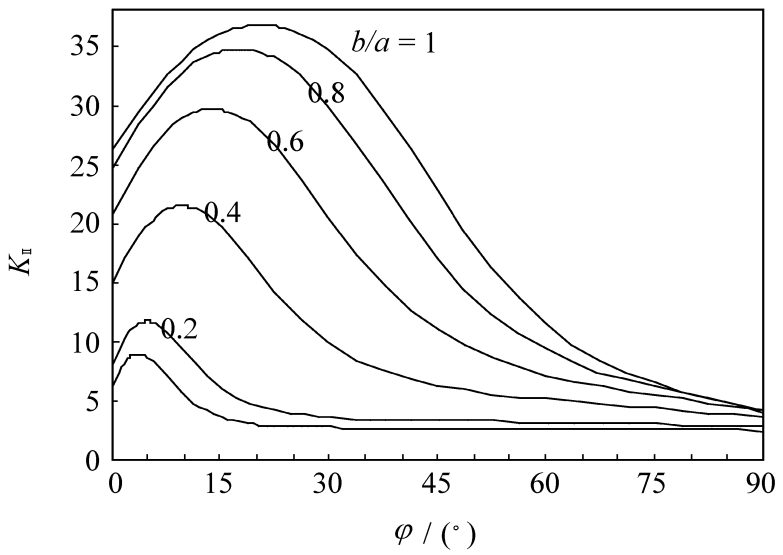

图 11　双向均布载荷作用下不同形状分层区分层前缘 K_{II}的角分布

Fig. 11　The distribution of K_{II} along the front of delamination area in bi-directional uniform loading state

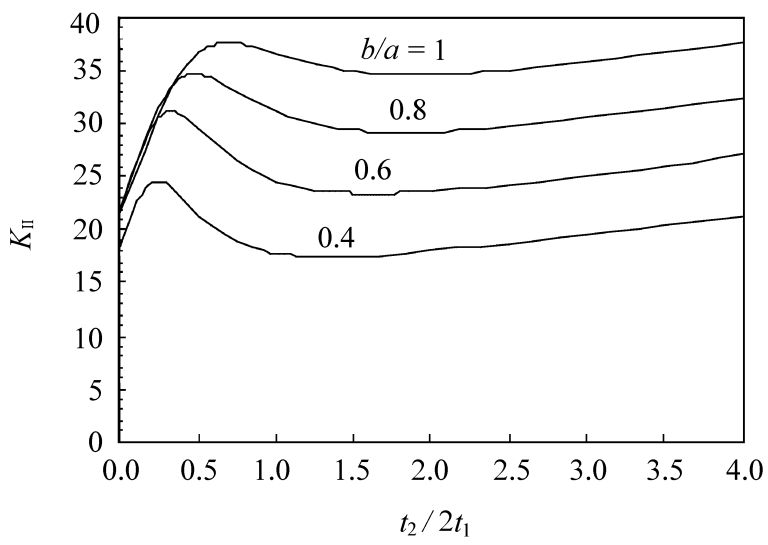

图 12　双向均布载荷作用下，不同形状分层区 K_{II}最大值随厚度比的变化

Fig. 12　The largest K_{II} with respect to thickness ratio of different shapes of delamination area in bi-directional uniform loading state

度因子 K_{II}的分布，图 13、图 14 给出了应力强度因子 K_{III}的分布，其分布规律与能量释放率的分布规律相似。

5　结　论

(1) 在二维能量释放率的基础上，通过切片法，给出了含椭圆形分层层合板沿分层区前缘的平面剪切型(Ⅱ型)和反平面剪切型(Ⅲ型)应力强度因子的表达式以及能量释放率的分布表达式。

(2) 算例分析表明，能量释放率及应力强度因子的极值点随短轴的减小而趋向于长轴顶点。

(3) 同样载荷作用于短轴方向时能量释放率及应力强度因子比作用于长轴方向时大。

图 13　双向均布载荷作用下不同形状分层区分层前缘 K_{III}的角分布

Fig. 13　The distribution of K_{III} along the front of delamination area in bi-directional uniform loading state

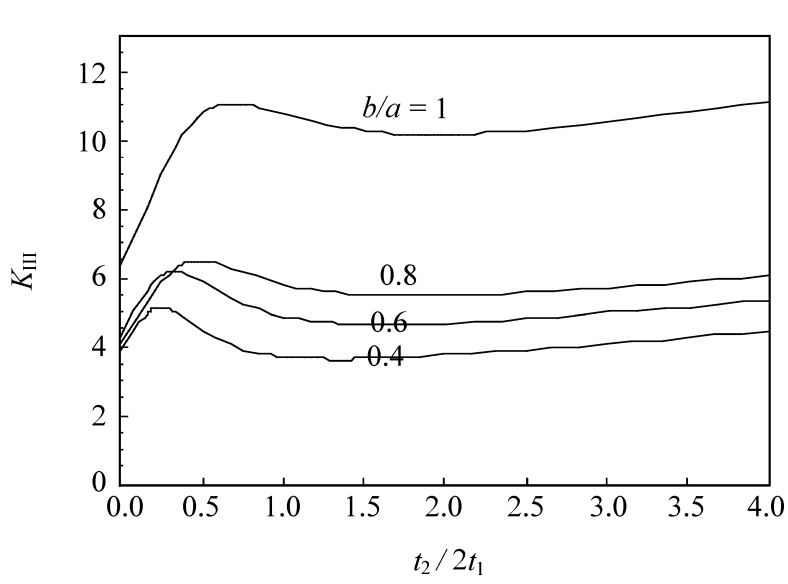

图 14　双向均布载荷作用下，不同形状分层区 K_{III}最大值随厚度比的变化

Fig. 14　The largest K_{III} with respect to thickness ratio of different shapes of delamination area in bi-directional uniform loading state

(4) 在合力相等的情况下，线性载荷作用时，其分布规律与均布载荷作用时相似，但幅值较均布载荷作用时小。

(5) 能量释放率及应力强度因子沿分层区前缘的变化很大，能量释放率随短轴的增大而增大；在总厚度不变的情况下，能量释放率随厚度比变化先急剧上升，到达极大值点后又逐渐下降，到达极小值点，最后又平缓上升。Ⅱ型应力强度因子的分布与能量释放率的分布相似。Ⅲ型应力强度因子沿椭圆前缘分布变化较大，有两个极大值点，同时有一个极小值为零的点。

参考文献:

[1] Adan M, Sheinman I, Altus E. Buckling of multiply delamination beams [J]. J of Composite Materials, 1994, 28(1): 77- 90.

[2] Shu D. Buckling of multiple delaminated beams [J]. Int J Solids Structure, 1998, 35(13): 1451- 1465.

[3] Gu H, Chattopadhyay A. Elasticity approach for delamination buckling of composite beam plates [J]. AIAA J, 1998, 36(8): 1529- 1534.

[4] 邹振民,樊蔚勋. 层板脱层的能量释放率分析 [J]. 固体力学学报, 1993, 14(2): 147- 157.

[5] 王安稳. 薄圆板的后屈曲响应及圆形脱层的能量释放率 [J]. 力学学报, 1999, 31(1): 75- 82.

[6] Whitcomb J D. Three-dimensional analysis of a postbuckled embedded delamination [J]. J of Composite Materials, 1989, 23(9): 862- 869.

[7] 孟庆春, 胡伟平, 张 行. 含椭圆形分层层板的状态分解-片条合成能量解法 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(2): 102- 108.

[8] 胡伟平, 孟庆春, 张 行. 含椭圆分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法[J]. 航空学报, 2000, 21(4): 338- 342.

[9] 缪长青. 蜂窝夹芯结构脱胶三维问题的研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 1998.

[10] 孟庆春. 复合材料层板分层的解析广义变分解法与广义守恒积分 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 1992.

[11] 孟庆春, 张 行, 王俊奎. 对称角铺层复合材料层板在反平面变形情况下分层问题的解析-广义变分解法 [J]. 复合材料学报, 1991, 8(1): 81- 90.