复合材料学报 第20卷 第4期 8月 2003年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 20 No. 4 August 2003

文章编号: 1000-3851(2003)04-0058-05

受分布载荷复合材料层合板应力分析的一般理论

胡伟平, 孟庆春, 张 行
(北京航空航天大学 508 教研室, 北京 100083)

摘 要: 为了克服经典层合板理论的缺点,提高层间应力的计算精度,提出了受分布载荷层合板应力分析的一般理论。首先根据叠加原理将层合板受力状态分解成对称和反对称状态,然后用正交完备的傅立叶级数和勒让德级数构造这两种受力状态中每一铺层与层间胶层的位移场,并应用广义势能原理确定位移场中的待定系数,从而确定层合板的位移场和应力场。另外,胶层被视为各向同性材料,并且与其它材料层具有相似的力学特性,即具有有限厚度、有限弹性常数。计算结果显示,这种解法的收敛性非常好,根据物理方程与根据平衡方程得到的层合板横向剪应力及横向正应力分布非常一致。

关键词: 复合材料层合板; 叠加原理; 傅立叶级数; 勒让德级数; 广义势能原理
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

GENERAL THEORY ON STRESS ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATE PRESSED BY DISTRIBUTED LOADING

HU Weiping, MENG Qingchun, ZHANG Xing
(508 Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100083 Beijing, China)

Abstract: A general theory on stress analysis of laminated composite plate pressed by distributed loading is presented for overcoming the defect of classical plate theory and improving the precision of interfacial stress analysis. By means of the principle of superposition, the loading state of the composite laminated plate is decomposed into symmetric anti-symmetric states. The Fourier series and Legendre series are applied to describe the displacement field of each composite ply and glue layer in the above states. The principle of generalized potential energy is used to determine the unknown coefficients of the above series. In addition, the glue layers are considered to have finite thickness and finite elastic constants in this analysis. From the computational results, it can be shown that the displacements and stresses converge very well, and the distributions of transversal shearing and normal stresses obtained from the constitutive equation agree with those obtained from the equilibrium equation very well.

Key words: laminated composite plate; principle of superposition; Fourier series; Legendre series; principle of generalized potential energy

对于复合材料层合板受分布载荷的应力分析问题,目前来说,主要有以下几种解法,第一种是不考虑横向剪切变形,即采用单直法线[1]的经典板理论,横向剪应力依靠平衡方程求得。这种解法比较粗略,一般只在做位移分析或应力分析精度要求低的情况下采用。第二种是考虑横向剪切变形,采用单直法线假设、多直法线假设或二次曲线以及更高次曲线假设[1~3],即认为剪切变形沿厚度服从某一分布规律。这种做法较第一种有所改进,在横向剪应力的求解方面提高了分析精度,但由平衡方程与物理方程分别求得的横向剪应力并不一致,对于横向正应力而言,两种结果之间的矛盾尤为突出。因此对于要求进

收稿日期: 2002-04-04; 收修改稿日期: 2002-09-19
作者介绍: 胡伟平(1975-),男,博士,讲师,主要从事损伤力学与复合材料力学的研究。
通讯作者: 胡伟平, E-mail: wishyunfly@sina.com

行局部应力分析的问题,例如接触问题,仍然需要提出新的方法。笔者采用正交完备的傅立叶级数和勒让德级数构造层合板中每一铺层与层间胶层的位移场,充分考虑层合板的横向变形,并应用分区广义变分原理求解。

1 层合板受力模型的简化

图 1 为上下对称四边简支层合板关于 y 轴对称处的截面图。该板长为 l_1,宽为 l_2,高为 2 h。载荷集度为 $2p_0$(为简单起见,设为均布载荷),总外载荷为 2P。

原始受力状态可以分解成反对称与对称受力状态。分别如图 2(a)与图 2(b)所示。

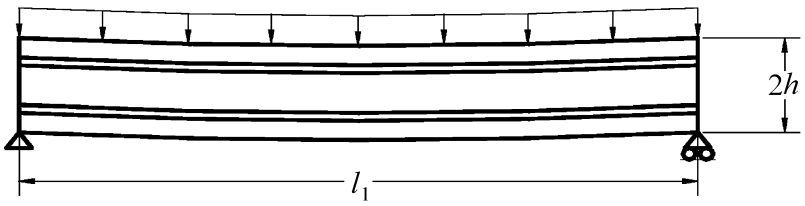

图 1 层合板原始受力状态的截面示意图

Fig. 1 Section of the original loading state of laminated composite plate

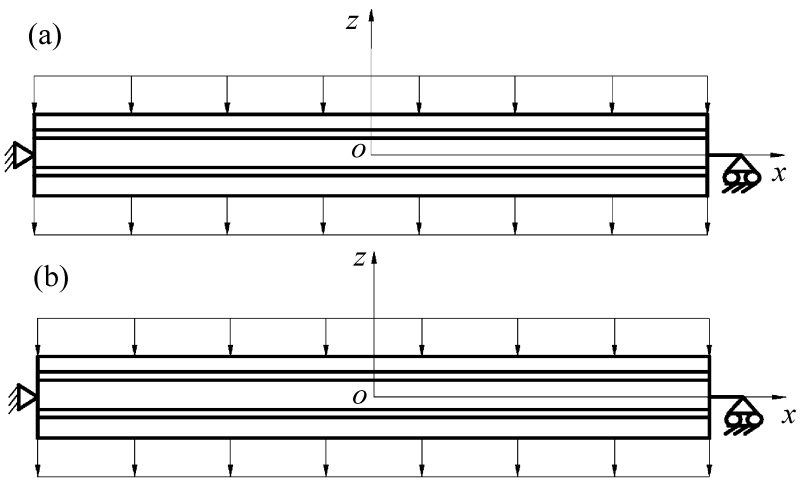

图 2(a) 层合板反对称受力状态(沿 y 轴对称截面处的示意图

图 2(b) 层合板对称受力状态(沿 y 轴对称截面处的示意图

Fig. 2(a) The anti-symmetric loading state on the section that is symmetric about y axis

Fig. 2(b) The symmetric loading state on the section that is symmetric about y axis

说明:图 2(a)与图 2(b)中的坐标原点均位于层合板的中心位置。

2 反对称受力状态的求解

2.1 反对称受力状态的位移场

如图 2(a)所示,层合板受关于 xy 平面反对称,关于 zx 与 zy 平面对称的横向载荷,故挠度为 x, y, z 的偶函数;面内位移 u 为 z 与 x 的奇函数, y 的偶函数;面内位移 v 为 z 与 y 的奇函数, x 的偶函数。因此反对称受力状态的位移场可以表示为

$$w^{(k)}(x,y,z) = \sum_{m,n,p} C^{(k)}_{mnp} f_m(x) f_n(y) g_p(z)$$

$$u^{(k)}(x,y,z) = \sum_{m,n,p} A^{(k)}_{mnp} s_m(x) f_n(y) t_p(z) \qquad (1)$$

$$v^{(k)}(x,y,z) = \sum_{m,n,p} B^{(k)}_{mnp} f_m(x) s_n(y) t_p(z)$$

式中: m, n, p = 1, 2, 3…,表示级数中函数项的编码; k 表示层合板的铺层编码; $A^{(k)}_{mnp}$, $B^{(k)}_{mnp}$ 和 $C^{(k)}_{mnp}$ 为待定广义位移;同时

$$f_m(x) = (-1)^{m+1}\cos\frac{2m-1}{l}\pi x$$

$$s_m(x) = (-1)^{m}\sin\frac{2m-1}{l}\pi x$$

$$f_n(y) = (-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{l}\pi y$$

$$s_n(x) = (-1)^{n}\sin\frac{2n-1}{l}\pi y$$

$$g_p(z) = P_{2p-2}\frac{z}{h} = \sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^i(4p-2i-4)!}{2^{2n-2}i!(2p-i-2)!(2p-2i-2)!}\left(\frac{z}{h}\right)^{2p-2i-2}$$

$$t_p(z) = P_{2p-1}\frac{z}{h} = \sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^i(4p-2i-2)!}{2^{2p-1}i!(2p-i-1)!(2p-2i-1)!}\left(\frac{z}{h}\right)^{2p-2i-1} \qquad (2)$$

式中: $P\frac{z}{h}$ 为勒让德函数。

2.2 压力分布的三角级数展开

反对称状态中层合板上表面所受压力分布可表示为

$$p(x,y) = p_0 \qquad (3)$$

式中: p_0 为分布压力集度。

由式(2),总外载荷 P 与最大压应力关系如下:

$$P = p_0 \cdot l_1 \cdot l_2 \qquad (4)$$

将外载荷用傅立叶级数展开

$$p(x,y) = \sum_{m,n} p_{mn}(x,y)(-1)^{m+1}\cdot\cos\frac{2m-1}{l}\pi x\,(-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{l}\pi y \qquad (5)$$

式中:

$$p_{mn}(x,y) = \frac{4}{l_1 l_2}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2} p(x,y)(-1)^{m+1}\cdot\cos\frac{2m-1}{l}\pi x\,(-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{l}\pi y\,dxdy \qquad (6)$$

2.3 能量解法

现在,应用分区广义势能原理[4]满足平衡方程、静力边界条件以及界面的位移与面力连续条件以确定广义位移 $A^{(k)}_{mnp}$, $B^{(k)}_{mnp}$ 和 $C^{(k)}_{mnp}$。

层合板的应变能可由以下表达式得到

$$U = \sum_k U^{(k)} = \sum_k \frac{1}{2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2} e^{(k)}_{ij} X^{(k)}_{ij}\, dx\,dy\,dz \quad (7)$$

层合板单层的本构关系为

$$\begin{matrix} e^{(k)}_x \\ e^{(k)}_y \\ e^{(k)}_z \\ f^{k}_{yz} \\ f^{k}_{xz} \\ f^{k}_{xy} \end{matrix} = \begin{matrix} Q^{(k)}_{11} & Q^{(k)}_{12} & Q^{(k)}_{13} & Q^{(k)}_{14} & Q^{(k)}_{15} & Q^{(k)}_{16} \\ Q^{(k)}_{12} & Q^{(k)}_{22} & Q^{(k)}_{23} & Q^{(k)}_{24} & Q^{(k)}_{25} & Q^{(k)}_{26} \\ Q^{(k)}_{13} & Q^{(k)}_{23} & Q^{(k)}_{33} & Q^{(k)}_{34} & Q^{(k)}_{35} & Q^{(k)}_{36} \\ Q^{(k)}_{14} & Q^{(k)}_{24} & Q^{(k)}_{34} & Q^{(k)}_{44} & Q^{(k)}_{45} & Q^{(k)}_{46} \\ Q^{(k)}_{15} & Q^{(k)}_{25} & Q^{(k)}_{35} & Q^{(k)}_{45} & Q^{(k)}_{55} & Q^{(k)}_{56} \\ Q^{(k)}_{16} & Q^{(k)}_{26} & Q^{(k)}_{36} & Q^{(k)}_{46} & Q^{(k)}_{56} & Q^{(k)}_{66} \end{matrix} \begin{matrix} X^{(k)}_x \\ X^{(k)}_y \\ X^{(k)}_z \\ V^{(k)}_{yz} \\ V^{(k)}_{xz} \\ V^{(k)}_{xy} \end{matrix} \quad (8)$$

第 k 层的几何方程为

$$X^{(k)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{(k)}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^{(k)}_j}{\partial x_i}\right) \quad (9)$$

根据式(1)和式(7)～式(9),复合材料层合板第 k 层的应变能表达式为

$$\begin{aligned} U^{(k)} = \frac{1}{2}\{ & \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(AA)}_{kmnpijq} A^{(k)}_{mnp} A^{(k)}_{ijq} + \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(AB)}_{kmnpijq} A^{(k)}_{mnp} B^{(k)}_{ijq} + \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(AC)}_{kmnpijq} A^{(k)}_{mnp} C^{(k)}_{ijq} + \\ & \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(BA)}_{kmnpijq} B^{(k)}_{mnp} A^{(k)}_{ijq} + \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(BB)}_{kmnpijq} B^{(k)}_{mnp} B^{(k)}_{ijq} + \\ & \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(BC)}_{kmnpijq} B^{(k)}_{mnp} C^{(k)}_{ijq} + \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(CA)}_{kmnpijq} C^{(k)}_{mnp} A^{(k)}_{ijq} + \\ & \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(CB)}_{kmnpijq} C^{(k)}_{mnp} B^{(k)}_{ijq} + \sum_{m,n,p,i,j,q} S^{(CC)}_{kmnpijq} C^{(k)}_{mnp} C^{(k)}_{ijq} \} \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $S^{(AA)}_{kmnpijq}$, $S^{(AB)}_{kmnpijq}$, $S^{(AC)}_{kmnpijq}$, …, $S^{(CC)}_{kmnpijq}$ 为已知系数,它们的值由式(1)及式(7)～式(9)确定。

外力势能可表示为

$$V = -2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \frac{\sqrt{1-(x/a)^2}}{1-(x/a)^2} p(x,y) \cdot w^{(k_{max})}(x,y,h)\, dx\, dy \quad (11)$$

式中: k_{max} 表示层合板的最外层。

在第 k 层和第 k+1 层的交界面上,应保证位移和面力连续,故在总势能泛函中应包括如下附加项

$$J^{(k,k+1)} = \int_{S^*} [u^{k+1} - u^{(k)} f^{(k)}_{xz} + (v^{(k+1)} - v^{(k)}) f^{(k)}_{yz} + (w^{k+1} - w^{(k)}) e^{(k)}_z]\, dS^* \quad (12)$$

根据分区广义势能原理,有

$$\delta C = \delta\left(\sum_{k=1}^{k_{max}} U^{(k)} + \sum_{k=1}^{k_{max}-1} J^{(k,k+1)}\right) + \delta V = 0 \quad (13)$$

根据式(13),可以得到满足平衡方程、静力边界条件以及界面位移与面力连续条件的关于广义位移 $A^{(k)}_{mnp}$, $B^{(k)}_{mnp}$ 和 $C^{(k)}_{mnp}$ 的线性代数方程组

$$\begin{aligned} & \sum_{k,i,j,q} T^{(AA)}_{kmnpijq} \cdot A^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(AB)}_{kmnpijq} \cdot B^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(AC)}_{kmnpijq} \cdot C^{(k)}_{ijp} = 0 \\ & \sum_{k,i,j,q} T^{(BA)}_{kmnpijq} \cdot A^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(BB)}_{kmnpijq} \cdot B^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(BC)}_{kmnpijq} \cdot C^{(k)}_{ijp} = 0 \\ & \sum_{k,i,j,q} T^{(CA)}_{kmnpijq} \cdot A^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(CB)}_{kmnpijq} \cdot B^{(k)}_{ijp} + \sum_{k,i,j,q} T^{(CC)}_{kmnpijq} \cdot C^{(k)}_{ijp} = R_{kmnp} \end{aligned} \quad (14)$$

$(k = 1, 2, \cdots k_{max},\quad m, i = 1, 2, 3, \cdots, M,$

$n, j = 1, 2, 3 \cdots, N,\quad p, q = 1, 2, 3, \cdots, NP)$

通过求解线性方程组(14),可确定广义位移 $A^{(k)}_{mnp}$, $B^{(k)}_{mnp}$ 和 $C^{(k)}_{mnp}$,由此可求出位移场,再将所得结果代回到几何方程以及物理方程,即可得到反对称状态下复合材料层合板的应变场和应力场。M, N 的值由式(5)给出, NP 的值根据应力收敛来确定。

3 对称受力状态的求解

如图 2(a)所示,层合板受关于 x 轴、y 轴和 z 轴均对称的横向载荷作用,所以,挠度 w 为 x 与 y 的偶函数, z 的奇函数。面内位移 u 为 y 与 z 的偶函数, x 的奇函数。面内位移 v 为 x 与 z 的偶函数, y 的奇函数。据此,可设出对称受力状态的位移场。这个位移场的表达式中,除了 $t_p(z)$ 和 $g_p(z)$ 外,其余均与式(1)中相同。$t_p(z)$ 和 $g_p(z)$ 的表达式如下:

$$g_p(z) = P_{2p-1}\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (4p-2i-2)!}{2^{2p-1} i!(2p-i-1)!(2p-2i-1)!} \left(\frac{z}{h}\right)^{2p-2i-1}$$

$$t_p(z) = P_{2p-2}\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (4p-2i-4)!}{2^{2p-2} i!(2p-i-2)!(2p-2i-2)!} \left(\frac{z}{h}\right)^{2p-2i-2} \quad (15)$$

然后只需要采用与 2.2 和 2.3 中相同的步骤,即可求得位移场中的广义位移,由此可求出位移场,再将所得结果代回到几何方程以及物理方程,即可得到对称受力状态下复合材料层合板的应变场和应力场。

表 1 层合板挠度与应力的收敛性验证

Table 1 The convergence tests of deflection and stresses of the plate

NP	$w(0,0,h)/h$	$e_x(0,0,h)/E_0$	$e_y(0,0,h)/E_0$	$e_z(0,0,h)/E_0$	$f_{xy}(l/4,l/4,z_1)/E_0$
1	-2.725670E-03	-8.037710E-05	-3.453030E-05	-3.657010E-05	4.301540E-09
2	-2.916580E-03	-7.168930E-05	-2.545970E-05	-1.512660E-06	2.059740E-07
3	-2.933600E-03	-7.168500E-05	-2.561630E-05	-1.726150E-06	2.061410E-07
4	-2.937510E-03	-7.152780E-05	-2.552020E-05	-1.383050E-06	2.061720E-07
5	-2.938120E-03	-7.159500E-05	-2.558180E-05	-1.557840E-06	2.061770E-07
6	-2.938210E-03	-7.156400E-05	-2.555650E-05	-1.481290E-06	2.061780E-07
7	-2.938220E-03	-7.157640E-05	-2.556700E-05	-1.512410E-06	2.061780E-07
8	-2.938220E-03	-7.157150E-05	-2.556290E-05	-1.500280E-06	2.061780E-07
9	-2.938220E-03	-7.157330E-05	-2.556450E-05	-1.504840E-06	2.061780E-07
10	-2.938220E-03	-7.157270E-05	-2.556390E-05	-1.503170E-06	2.061780E-07

注: 表中, $z_1 = 0.4875h$。

4 算 例

为了验证上述方法的正确性, 下面给出一个典型算例

层合板单层为正交各向异性材料, 其材料常数为

$$E_1 = E_0,\ E_2 = 0.3E_0,\ E_3 = 0.6E_0,$$
$$G_{12} = 0.16E_0,\ G_{13} = 0.3E_0,\ G_{23} = 0.2E_0,$$
$$\nu_{12} = 0.3,\ \nu_{13} = 0.3,\ \nu_{23} = 0.3$$

层合板的长、宽、高尺寸分别为: $L_1 = 20h$, $L_2 = 20h$, $H = 2h$。层合板关于 x 轴及 y 轴对称, 层合板的铺层角为: 0°/90°/0°; 层合板各单层的厚度为: 0.4875h/0.975h/0.4875h, 胶层厚度为 0.025h。

胶层为各向同性材料, 其材料常数为: $E_g = 0.021E_0$, $\nu_g = 0.30$。

总外载荷取为 $P = 6.0\times10^{-4}E_0h^2$。挠度以及应力的收敛性验证如上面表 1 所示。

进一步可以得到层合板的应力分布, 如图 3～图 8 所示。从这些图中可以看出, 由物理方程与由平衡方程求出的横向剪应力及横向正应力分布非常一致。

注: 以下图 3～图 8 的图例中, "s-tao1(xz)"与"s-tao2(xz)"表示在对称受力状态 (Ⅰ) 下分别由物理方程与平衡方程求得的 f_{xz}, "a-tao1(xz)"与"a-tao2(xz)"表示在反对称受力状态 (Ⅱ) 下分别由物理方程与平衡方程求得的 f_{xz}, 其它图例代表的意义可以由此规律类推。

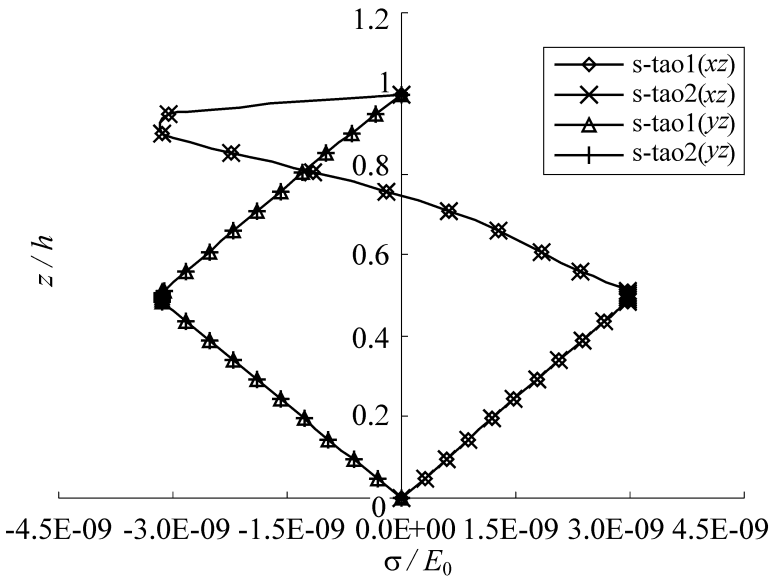

图 3 对称状态 (Ⅰ) 下横向剪应力沿 x= l/40, y= l/40 截线的分布

Fig. 3 The distribution of transversal shearing stresses on the section of (l/40, l/40, z) in symmetric loading state

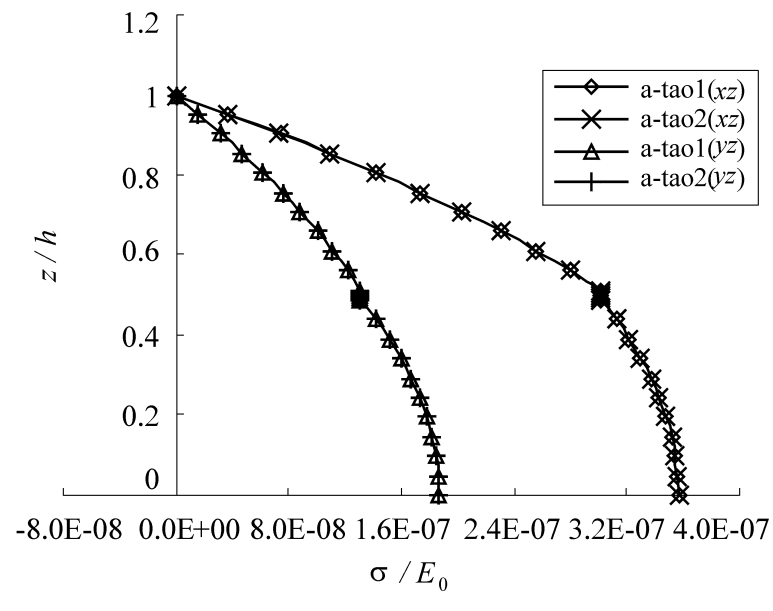

图 4 反对称状态 (Ⅱ) 下横向剪应力沿 x= l/40, y= l/40 截线的分布

Fig. 4 The distribution of transversal shearing stresses on the section of (l/40, l/40, z) in anti-symmetric loading state

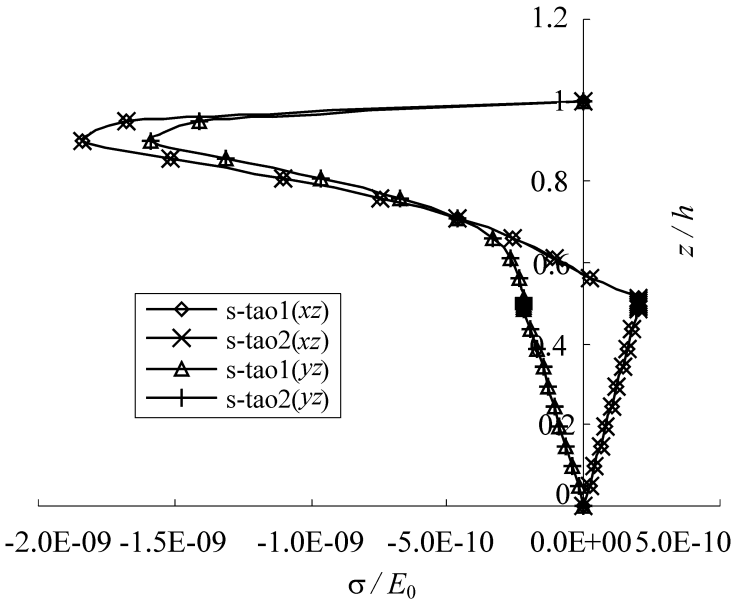

图 5　对称状态 (Ⅰ)下横向剪应力沿 x = l/4, y = l/4 截线的分布

Fig. 5　The distribution of transversal shearing stresses on the section of (l/4, l/4, z) in symmetric loading state

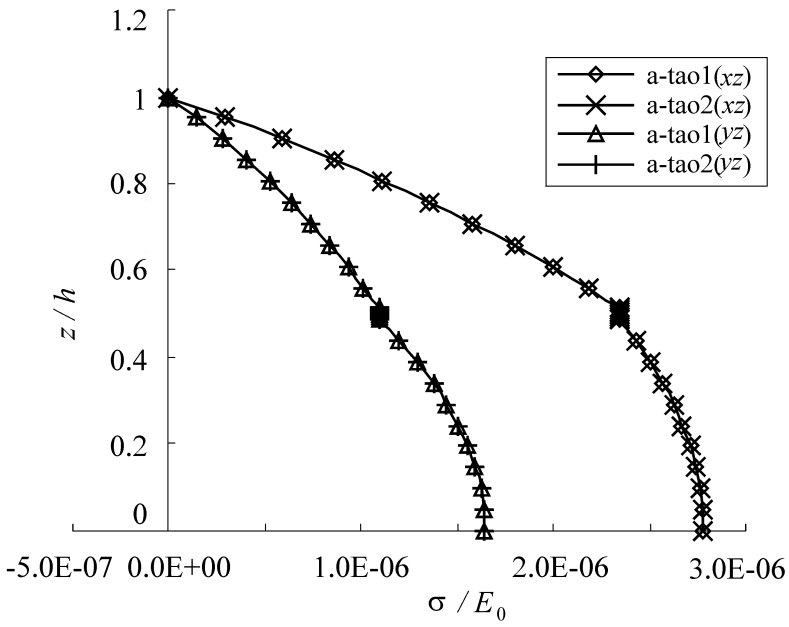

图 6　反对称状态 (Ⅱ)下横向剪应力 x = l/4, y = l/4 截线的分布

Fig. 6　The distribution of transversal shearing stresses on the section of (l/4, l/4, z) in anti-symmetric loading state

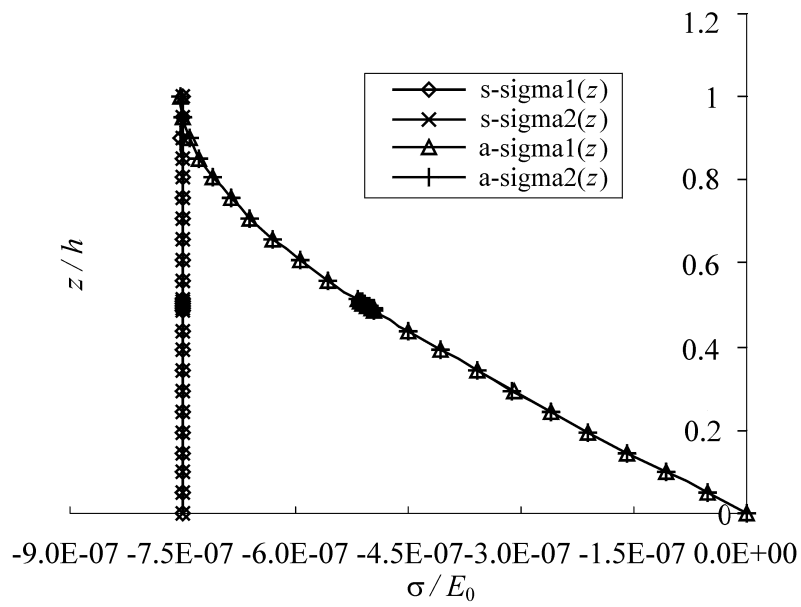

图 7　对称状态 (Ⅰ)和反对称状态 (Ⅱ)下 e_z 沿 x = 0, y = 0 截线的分布

Fig. 7　The distribution of transversal normal stresses on the section of (0, 0, z) in symmetric loading state

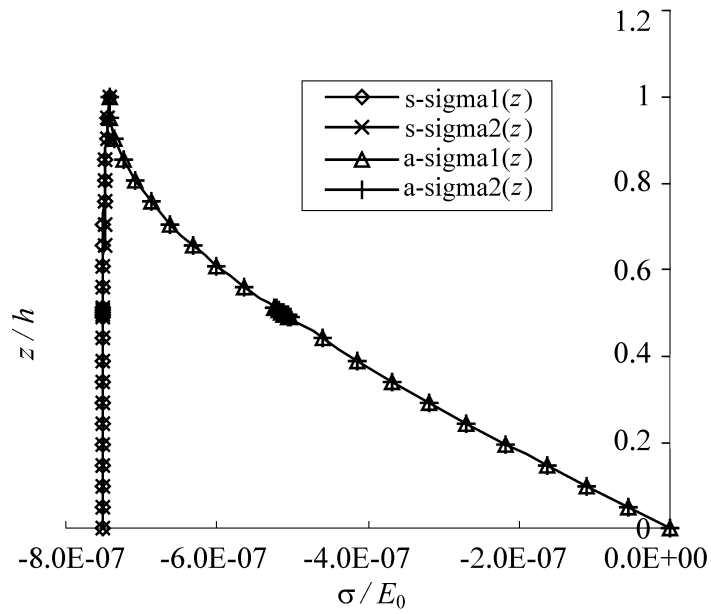

图 8　对称状态 (Ⅰ)和反对称状态 (Ⅱ)下 e_z 沿 x = l/4, y = l/4 截线的分布

Fig. 8　The distribution of transversal normal stresses on the section of (l/4, l/4, z) in anti-symmetric loading state

5　总　结

现将本文分析总结如下:

(1) 根据叠加原理可以将原问题分解成对称和反对称受力状态。

(2) 对于对称与反对称受力状态中层合板每一铺层与层间胶层的位移场,采用傅立叶级数和勒让德级数来构造,并运用分区广义势能原理确定未知广义位移。

(3) 在分析过程中,胶层被完全作为单独的一层来考虑,它被视为各向同性材料,具有有限厚度和刚度。

(4) 根据计算结果可以看出,由物理方程与由平衡方程得到的横向剪应力及横向正应力分布相当一致。

(5) 比较对称与反对称受力状态的计算结果,可以看出,对称受力状态可以忽略不计。

(6) 这一分析模型可以运用于复合材料层合板接触问题的分析。

参考文献:

[1] 黄克智. 板壳理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987. 1; 89-112.

[2] Whitney J M, Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1970, 37: 1031- 1036.

[3] Bhimaraddi A, Stewens L K. Higher-order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51: 195-198.

[4] 张　行. 高等弹性理论 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 241- 262.