文章编号: 1000-3851(2003)05-0147-07

含矩形内部分层的复合材料圆柱壳块三维问题的片条合成能量解法

白 静, 孟庆春, 张 行
(北京航空航天大学 五系固体力学研究所, 北京 100083)

摘 要: 根据叠加原理将含有矩形分层的复合材料圆柱壳块在横向载荷作用下的受力状态进行分解,将分层问题归结为在分层表面受附加剪切载荷作用时附加状态的分析,并据此建立了一个仅包含分层区的力学模型。通过切取纵横切片,利用含分层层合直梁与曲梁的附加位移,构造分层区附加位移模态。最后,应用最小势能原理确定位移幅值的闭合解。

关键词: 圆柱壳; 复合材料; 分层; 附加状态; 片条合成能量解法
中图分类号: TB331; O343.2; TB330.1 **文献标识码:** A

METHOD OF STATE DECOMPOSITION AND SLICE COMPOSITION ON RECTANGULAR DELAMINATION IN COMPOSITE CYLINDRICAL SHELL

BAI Jing, MENG Qingchun, ZHANG Xing
(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Using the principle of superposition, the transverse loading state of a cylindrical shell with rectangular delaminations is decomposed, and the problem of delamination can be reduced to the analysis of an additional stress state of the original laminate subjected to additional shear load along the delamination surfaces. The laminate sections parallel to the boundary of the delamination area can be regarded as laminated beams with delaminations, the displacements in which can be expressed by the analytical solutions of additional displacements in the above beams. By this way, the additional displacement fields satisfying the displacement boundary conditions of the delamination area can be established. Finally, a closed form solution of additional displacements is obtained by the principle of minimum potential energy.

Key words: cylindrical shell; composite materials; delamination; method of slice composition; additional state

随着科学技术的发展,复合材料在航空航天、机械、化工等各方面都得到了广泛的应用。由于复合材料层合结构在制造及使用过程中经常会出现内部层间分层,使其力学性能大幅度下降,因此,对层合板壳分层问题的研究具有很大的价值。近年来,在这方面从一维到三维,从单层分层到多层分层已经逐步取得了很大进展[1~4],但是复合材料层合结构的三维分层问题仍是一个比较复杂的问题。为方便有效地解决这一问题,我们建立了系列的方法。首先,王奇志等[5]在载荷状态分解的基础上,得到了含分层复合材料层合梁中引起分层的附加位移的解析解。以此为基础,胡伟平、孟庆春等[6~10]采用片条合成能量法对复合材料层合板的矩形以及椭圆形分层问题进行了研究,并用三角级数能量法所得结果与之比较。计算表明:采用片条合成法具有足够的精度。缪长青等[11,12]采用该方法对蜂窝夹芯板的脱胶问

收稿日期: 2002-03-31; 收修改稿日期: 2003-03-11
基金项目: 航空科学基金资助项目(98B51026)
作者介绍: 白 静(1977-),女,工学硕士,主要从事复合材料力学研究。
作者通讯: 孟庆春, E-mail: qcmeng@buaa.edu.cn

题进行分析,所得结果与实验结果吻合得较好。这些工作对层合板三维分层问题的研究做出了贡献。为了进一步研究层合壳的三维分层问题,本文作者[13]对复合材料层合曲梁的分层问题进行了分析,得到了与分层相关的附加位移的解析解。在此基础上,本文作者采用状态分解——片条合成能量法对含有矩形分层的复合材料圆柱壳块的分层问题进行分析,利用曲梁附加位移解答构造圆柱壳块的位移模态,最后应用最小势能原理确定了位移参数的闭合解。

1　圆柱壳块分层力学模型的简化

1.1　圆柱壳块受力状态的分解

图 1 所示为复合材料层合圆柱壳块,其平均半径为 R,关于中面对称四层铺设,由外向内顺序表示为第 1、2、3、4 层。在 1 和 2 层、3 和 4 层间存在两个一边平行于壳块母线的矩形分层区。两分层区沿母线的长度均为 2a,所对应的圆心角均为 $2[_0$。将第 1 层、第 2 和 3 层、第 4 层分别称为外层、中层和内层,设其厚度分别为 $2t_1$, $2t_2$, $2t_1$。所受载荷为沿半径方向的横向分布载荷。可见,在此圆柱壳块中,圆周方向具有一定宽度并包含分层区在内的切片(环向切片)与文献[13]中含分层曲梁的结构与受载情况均相同。为方便起见,以下叙述中以文[13]中相应的图表示环向切片的受力情况,并以此说明壳块的受力情况。

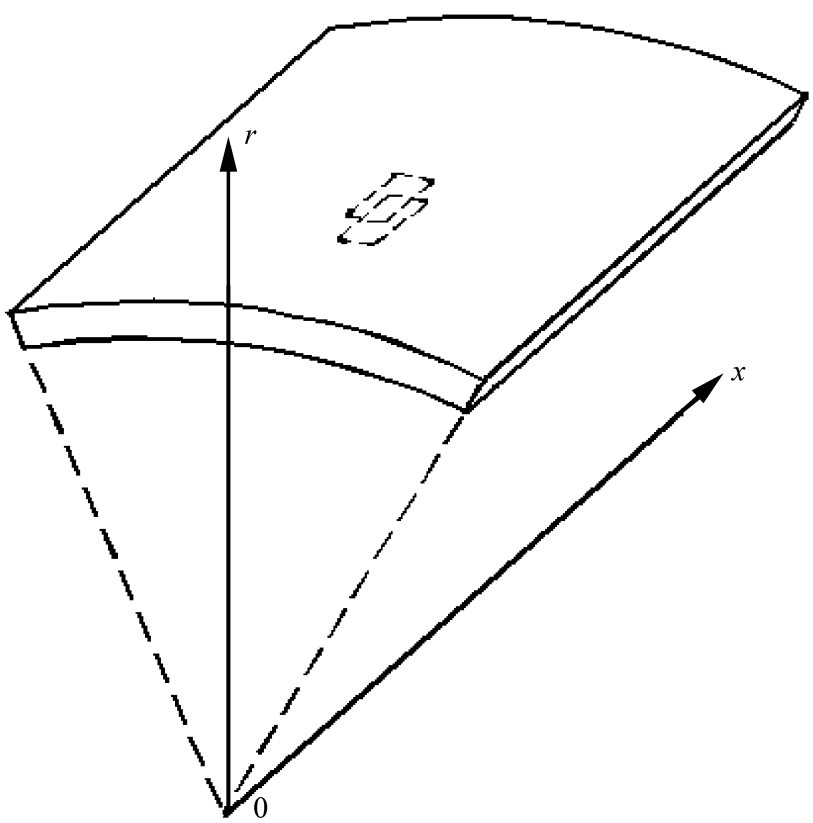

图 1　含矩形分层的复合材料层合壳块

Fig. 1　A composite laminate cylindrical shell with inner rectangular delaminations

圆柱壳块沿半径方向受到横向分布载荷作用,环向切片原始受力状态如文[13]图 1 所示。将原始受力状态分解为在面受力状态(T)与出面受力状态(U),对应于文[13]图 2 与图 3。分层的产生与扩展可看成不受在面受力状态的影响,而仅取决于出面受力状态。由于所研究的圆柱壳块为薄壳,因此图中 $a=(t_2+2t_1)/R$ 为远远小于 1 的量,可忽略不计。进一步将文[13]图 3 对应的(U)状态分解成无分层状态(U_1)与附加分层状态(U_2),对应于文[13]图 4、图 5。在(U_1)状态中,在壳块各分层表面施加剪切载荷 $f_{rx}(x,[)$ 和 $f_{r[}(x,[)$,并使其等于无分层层合壳中该层层间剪应力,则(U_1)状态即相当于无分层状态,其中 $f_{rx}(x,[)$ 和 $f_{r[}(x,[)$ 是层间剪应力。在文[13]图 5 所对应的(U_2)状态中,在各分层表面施加与 $f_{rx}(x,[)$ 和 $f_{r[}(x,[)$ 大小相等、方向相反的剪切载荷 $f_{rx}(x,$

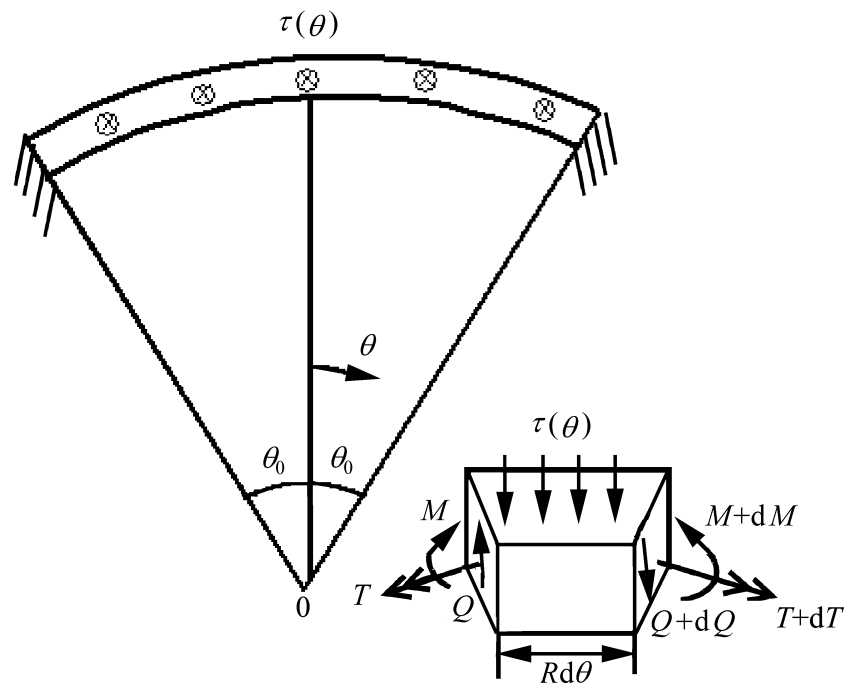

图 2　沿环向切片的受力分析

Fig. 2　The loading analysis in a slice along respect [

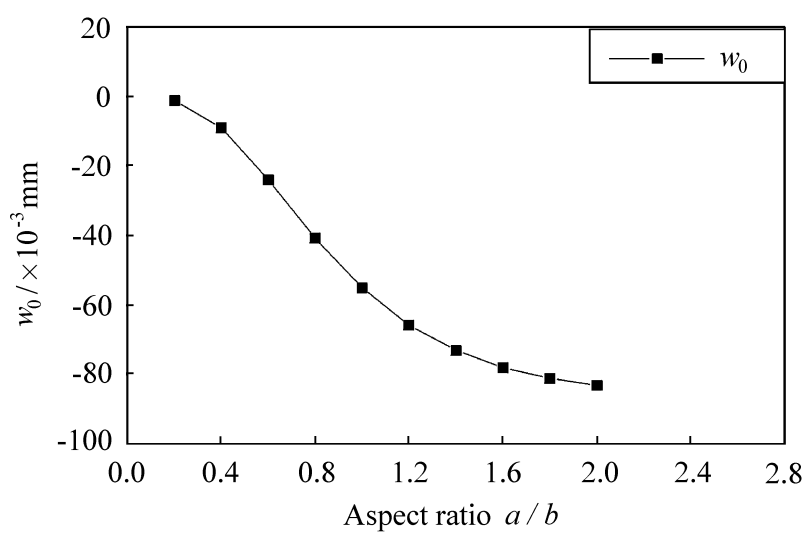

图 3　分层区挠度随长宽比的变化

Fig. 3　Deflection w_0 with respect to aspect ratio of delamination area

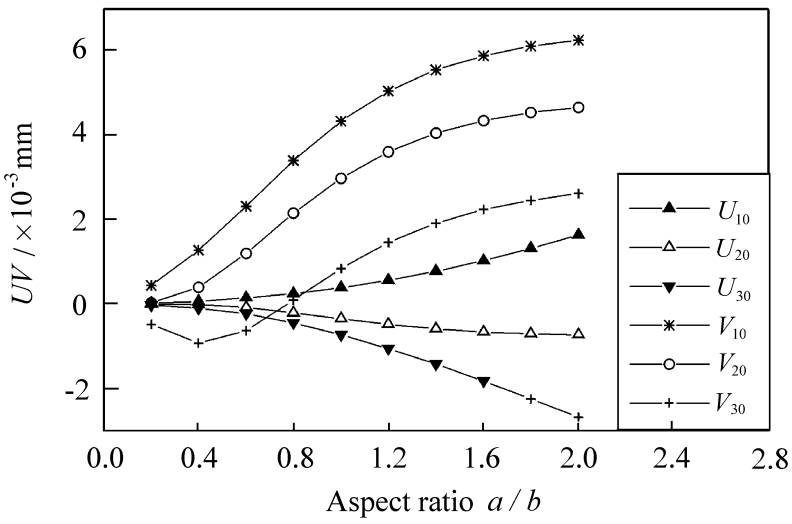

图 4　分层区各层中面位移随长宽比的变化

Fig. 4　Middle plane displacement with respect to aspect ratio of delamination area

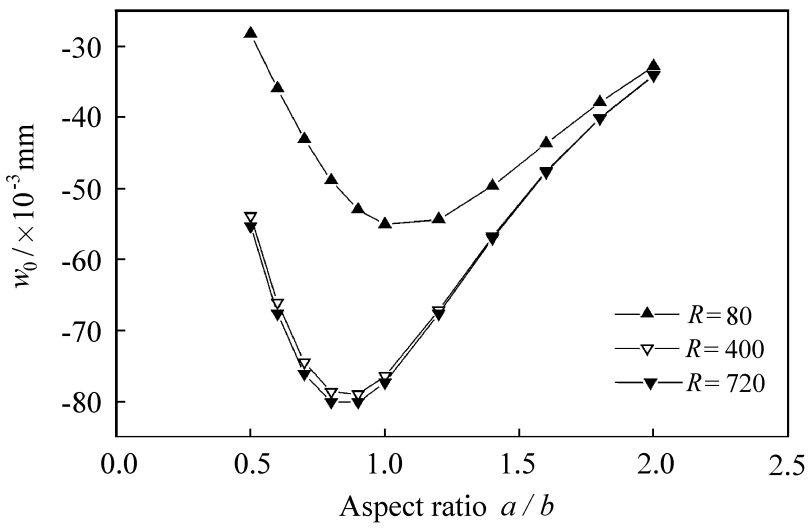

图 5　在不同半径情况下, 挠度随长宽比的变化

Fig. 5　Deflection w_0 with respect to aspect ratio of delamination area in different radius conditions

[) 和 $f_{r[}(x, [)$。层合壳分层的产生与扩展即源于此状态, 与分层相关的位移和应力取决于 $f_{rx}(x, [)$ 和 $f_{r[}(x, [)$。通过以上分析, 我们在考虑壳受横向分布载荷的分层问题时, 就只需研究与文[13]图 5 对应的(U_2)状态, 从而使问题大为简化。

1.2　分层力学模型

由于在(U_2)状态中未分层区仅在其与分层区交界处受到自相平衡的力系作用, 可认为未分层区沿全部厚度服从直法线假设, 则未分层区可被视为刚体。因此, 只需考虑壳块的分层区部分建立力学模型, 模型的环向切片如文[13]图 6 所示。

2　位移函数的设立

在层合圆柱壳块中沿环向或沿母线任取出厚度为无限小的切片, 则分层区内圆柱壳块的位移模态可用切片的位移来构造。切片受到两个互垂方向的剪切载荷作用。假设切片的变形服从平面假设与单

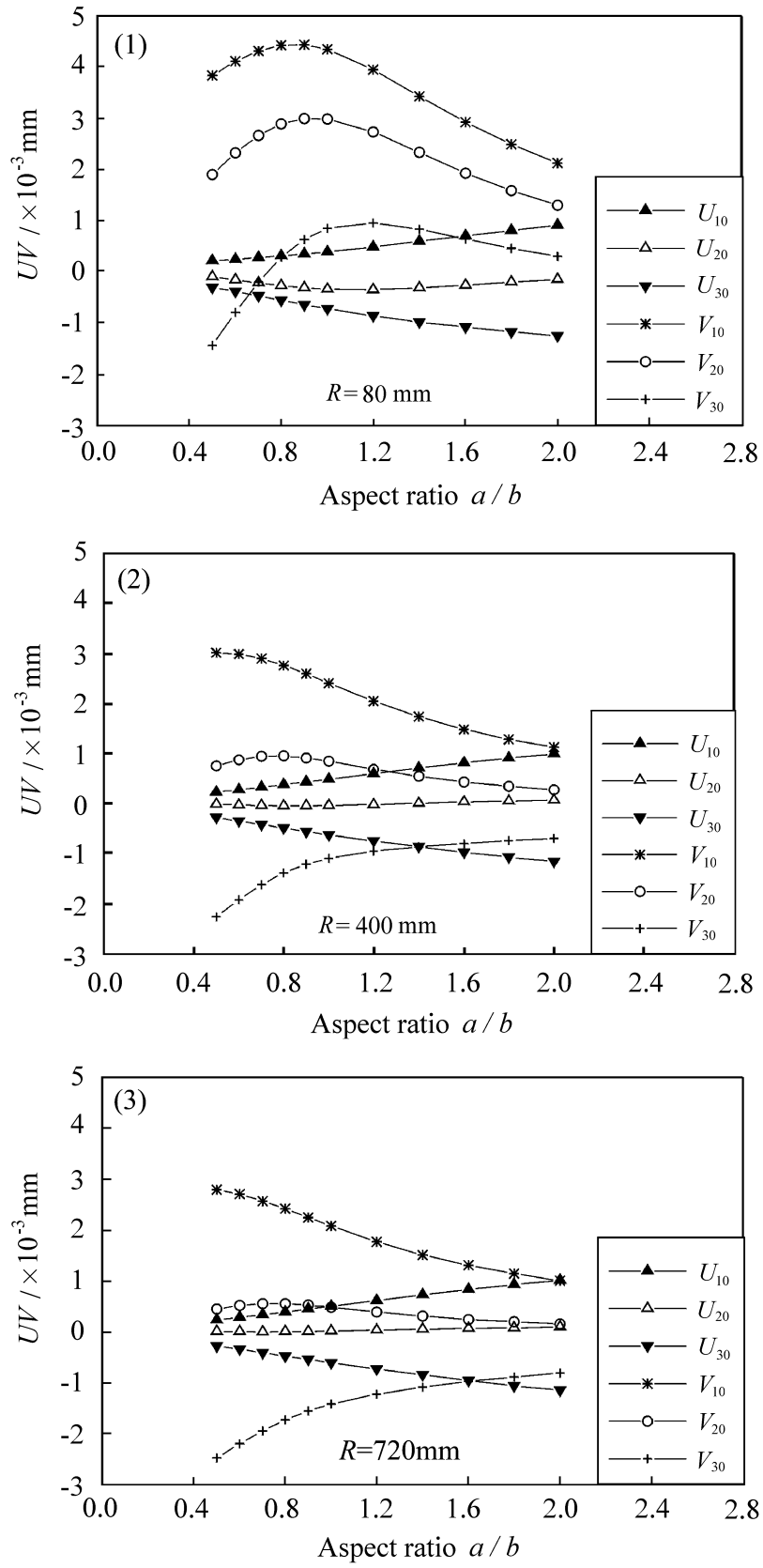

图 6　分层区面积不变, 在不同半径情况下, 各层中面位移随长宽比的变化

Fig. 6　Middle plane displacements with respect to aspect ratio of the same delamination area

向受力假设, 则两个方向的切片可分别看成层合直梁和层合曲梁, 其位移可按工程梁理论求解。

2.1　切片附加位移解答

2.1.1　首先, 沿母线取切片, 此切片看作含分层直梁。由于壳内分层区表面受到两个方向的剪切载荷作用, 故该切片在分层表面受到两类载荷作用: 一是切片平面内剪切载荷 $f_x^{(1)} = \Lambda_m^{(1)} x^m$, $f_x^{(2)} = \Lambda_m^{(2)} x^m$; 二是垂直切片平面的载荷 $f_{[}^{(1)} = __p^{(1)} x^p$ 及 $f_{[}^{(2)} = __p^{(2)} x^p$。式中: 上标(1)、上标(2)分别表示上下两个分层区; $\Lambda_m^{(1)}$, $\Lambda_m^{(2)}$, $__p^{(1)}$, $__p^{(2)}$ 为相应的已知剪切载荷系数。在

切片平面内剪切载荷作用下,根据文[5]的分析,切片的挠度 $w'(x)$ 与分层区各层中面在切片平面内的位移可表示为

$$w'(x) = \frac{3(t_1 + t_2)}{2t_1^3E_1 + t_2^3E_2}\frac{(\Lambda_m^{(1)} + \Lambda_m^{(2)})a^3}{2(m+2)(m+3)} \cdot \left(1 - \frac{m+3}{m+1}x^2 + \frac{2}{m+1}x^{m+3}\right) \tag{1}$$

$$u_{10}'(x) = \frac{\Lambda_m^{(1)}a^2}{2t_1E_1(m+1)(m+2)}[x - x^{m+2}] \tag{2}$$

$$u_{20}'(x) = \frac{a^2}{2t_2E_2}\frac{(\Lambda_m^{(2)} - \Lambda_m^{(1)})}{(m+1)(m+2)}[x - x^{m+2}] \tag{3}$$

$$u_{30}'(x) = \frac{-\Lambda_m^{(2)}a^2}{2t_1E_1(m+1)(m+2)}[x - x^{m+2}] \tag{4}$$

在垂直切片平面的载荷作用下,根据文[7]中的分析,切片分层区各层中面在载荷方向的位移(对应于柱壳在环向的面内位移)为

$$v_{10}'(x) = \frac{\Xi_p^{(1)}}{EI_z}\frac{a^4}{2(p+1)(p+3)(p+4)} \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2}x^2 + \frac{2}{p+2}x^{p+4}\right) \tag{5}$$

$$v_{20}'(x) = \frac{(\Xi_p^{(2)} - \Xi_p^{(1)})}{EI_z}\frac{a^4}{2(p+1)(p+3)(p+4)} \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2}x^2 + \frac{2}{p+2}x^{p+4}\right) \tag{6}$$

$$v_{30}'(x) = \frac{-\Xi_p^{(2)}}{EI_z}\frac{a^4}{2(p+1)(p+3)(p+4)} \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2}x^2 + \frac{2}{p+2}x^{p+4}\right) \tag{7}$$

式中: $x = \frac{x}{a}$ 为无量纲坐标; a 为切片的半长。$u_{10}'(x)$, $u_{20}'(x)$, $u_{30}'(x)$ 与 $v_{10}'(x)$, $v_{20}'(x)$, $v_{30}'(x)$ 分别是外层、中层、内层沿圆柱壳轴向、环向的中面位移。

2.1.2　其次,沿环向取切片,此切片可看作含分层的层合曲梁。与母线方向切片类似,该切片同样受到切片平面内剪切载荷 $f_\xi^{(1)} = \Xi_q^{(1)}\xi^q$, $f_\xi^{(2)} = \Xi_q^{(2)}\xi^q$,以及垂直切片平面的载荷 $f_x^{(1)} = \Lambda_n^{(1)}\xi^n$, $f_x^{(2)} = \Lambda_n^{(2)}\xi^n$ 作用。式中: 上标(1)、上标(2)分别表示上下两个分层区; $\Lambda_n^{(1)}$, $\Lambda_n^{(2)}$, $\Xi_q^{(1)}$, $\Xi_q^{(2)}$ 为相应的已知剪切载荷系数。在切片平面内载荷作用下,根据文[13]的分析,切片的挠度 $w''(\xi)$ 与各层中面的面内位移 $v_{10}''(\xi)$, $v_{20}''(\xi)$, $v_{30}''(\xi)$ 表示为

$$w''(\xi) = \frac{3R^3(t_1 + t_2)}{4E_1t_1^3 + 2E_2t_2^3}\frac{(\Xi_q^{(1)} + \Xi_q^{(2)})\xi_0^3}{2(q+2)(q+3)} \cdot \left(1 - \frac{q+3}{q+1}\xi^2 + \frac{2}{q+1}\xi^{q+3}\right) \tag{8}$$

$$v_{10}''(\xi) = \frac{R^2\xi_0^2\Xi_q^{(1)}}{2E_1t_1(q+1)(q+2)}\left[\xi^{q+2} - \xi\right] - \frac{3R^3(t_1 + t_2)}{4E_1t_1^3 + 2E_2t_2^3}\frac{(\Xi_q^{(1)} + \Xi_q^{(2)})\xi_0^4}{2(q+2)(q+3)} \cdot \left[-\frac{q+3}{3(q+1)}\xi^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}\xi^{q+4}\right] \tag{9}$$

$$v_{20}''(\xi) = \frac{R^2\xi_0^2}{2E_2t_2}\frac{(\Xi_q^{(2)} - \Xi_q^{(1)})}{(q+1)(q+2)}\left(\xi^{q+2} - \xi\right) - \frac{3R^3(t_1 + t_2)}{4E_1t_1^3 + 2E_2t_2^3}\frac{(\Xi_q^{(1)} + \Xi_q^{(2)})\xi_0^4}{2(q+2)(q+3)} \cdot \left[-\frac{q+3}{3(q+1)}\xi^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}\xi^{q+4}\right] \tag{10}$$

$$v_{30}''(\xi) = \frac{-R^2\xi_0^2\Xi_q^{(2)}}{2E_1t_1(q+1)(q+2)}\left[\xi^{q+2} - \xi\right] - \frac{3R^3(t_1 + t_2)}{4E_1t_1^3 + 2E_2t_2^3}\frac{(\Xi_q^{(1)} + \Xi_q^{(2)})\xi_0^4}{2(q+2)(q+3)} \cdot \left[-\frac{q+3}{3(q+1)}\xi^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}\xi^{q+4}\right] \tag{11}$$

式中: $\xi = \frac{\xi}{\xi_0}$ 为无量纲坐标。

再来分析环向切片在垂直切片平面的载荷作用下,切片沿载荷方向的位移。首先分析外层位移。外层所受载荷为第一个分层区表面的载荷 $f_x^{(1)} = \Lambda_n^{(1)}\xi^n$,如图 2 所示。由于切片很薄,可略去载荷对切片产生的扭转作用,故此受力状态可看成该切片在 $f_x^{(1)}$ 作用下产生弯曲变形,其挠度即为切片中面位移,设为 $u_{10}''(\xi)$。在图 2 中取微段做受力分析,可得

$$dQ = f_x^{(1)}Rd\xi \tag{12}$$

$$M + dM = M\cos(d\xi) + QR\sin(d\xi) + f_x^{(1)}Rd\xi \cdot R\sin\frac{d\xi}{2} + T\sin(d\xi) \approx M + QRd\xi \tag{13}$$

由以上两式可推出

$$\frac{d^2M}{R^2d\xi^2} = f_x^{(1)} \tag{14}$$

引入小变形下的挠曲轴近似微分方程,可得微段以位移表示的平衡方程

$$EI\frac{d^4u_1}{R^4d\xi^4} = \Lambda_n^{(1)}\xi^n \tag{15}$$

利用切片的对称性取一半研究,边界条件为

$$\xi = 0\text{ 处},\ \frac{du_{10}''}{Rd\xi} = 0,\ \frac{d^3u_{10}''}{R^3d\xi^3} = 0 \tag{16}$$

$$\xi = \xi_0\text{ 处},\ u_{10}'' = 0,\ \frac{du_{10}''}{Rd\xi} = 0 \tag{17}$$

求解式(15)可得

$$u''_{10}([) = \frac{\wedge_n^{(1)} R^4}{EI} \frac{[^4_0}{2(n+1)(n+3)(n+4)} \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{18}$$

同理可得中层、内层切片的中面位移

$$u''_{20}([) = \frac{(\wedge_n^{(2)} - \wedge_n^{(1)}) R^4}{EI} \frac{[^4_0}{2(n+1)(n+3)(n+4)} \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{19}$$

$$u''_{30}([) = \frac{-\wedge_n^{(2)} R^4}{EI} \frac{[^4_0}{2(n+1)(n+3)(n+4)} \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{20}$$

2.2　分层区附加位移模态

将分层表面的附加剪切载荷表示为幂级数形式, 并设其通项为

$$f_{rx}^{(1)} = \wedge_{mn}^{(1)} x^m [^n, \quad f_{r[}^{(1)} = __{pq}^{(1)} x^p [^q \tag{21}$$

$$f_{rx}^{(2)} = \wedge_{mn}^{(2)} x^m [^n, \quad f_{r[}^{(2)} = __{pq}^{(2)} x^p [^q \tag{22}$$

式中: m, n, p, q= 0, 1, 2, …, ∧; _ 为已知剪切载荷系数。

在文[13]图 6 所对应的模型中, 过原点(0, 0)沿母线方向取切片, 该切片挠度 w(x, 0)的形式由式(1)确定, 其幅值就是原点处的挠度 w_0。再过点(x, 0)沿环向取切片, 其挠度函数的形式由式(8)确定, 幅值为 w(x, 0)。于是, 分层区内任一点的位移可表示为

$$w(x,0) = w_0 \left(1 - \frac{m+3}{m+1} x^2 + \frac{2}{m+1} x^{m+3}\right) \cdot \left(1 - \frac{q+3}{q+1}[^2 + \frac{2}{q+1}[^{q+3}\right) \tag{23}$$

容易看出: 先沿环线方向取切片再沿母线方向取切片, 可以得到与上式相同的结果。

下面构造圆柱壳块分层区的面内位移模态。

首先, 过原点(0, 0)沿母线取切片, 根据式(2)构造此切片外层中面的面内位移 $u_{10}(x, 0)$。再过点(x, 0)沿环向取切片, 该切片的弯曲位移模态由式(18)给出, 其幅值为 $u_{10}(x, 0)$。于是分层区外层中面上任一点(x, [)的沿 x 方向的位移为

$$u_{10}(x,[) = u_{01}[x - x^{m+2}] \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{24}$$

同理, 中、内两层中面位移构造成

$$u_{20}(x,[) = u_{02}[x - x^{m+2}] \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{25}$$

$$u_{30}(x,[) = u_{03}[x - x^{m+2}] \cdot \left(1 - \frac{n+4}{n+2}[^2 + \frac{2}{n+2}[^{n+4}\right) \tag{26}$$

类似地, 分层区内外、中、内各层中面上任一点(x, [)的环向位移

$$v_{10}(x,[) = v_{01}[[- [^{q+2}] - w_0[_0 \cdot \left[- \frac{q+3}{3(q+1)}[^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}[^{q+4}\right] \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2} x^2 + \frac{2}{p+2} x^{p+4}\right) \tag{27}$$

$$v_{20}(x,[) = v_{02}[[- [^{q+2}] - w_0[_0 \cdot \left[- \frac{q+3}{3(q+1)}[^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}[^{q+4}\right] \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2} x^2 + \frac{2}{p+2} x^{p+4}\right) \tag{28}$$

$$v_{30}(x,[) = v_{03}[[- [^{q+2}] - w_0[_0 \cdot \left[- \frac{q+3}{3(q+1)}[^3 + \frac{2}{(q+1)(q+4)}[^{q+4}\right] \cdot \left(1 - \frac{p+4}{p+2} x^2 + \frac{2}{p+2} x^{p+4}\right) \tag{29}$$

以上各式中 u_{01}, u_{02}, u_{03}, v_{01}, v_{02}, u_{03}为待定位移参数。

在小变形、无剪切变形条件下, 外、中、内三层(分别以下标 1、下标 2、下标 3 表示)的面内位移为

$$\begin{aligned}
u_1(x,[,z) &= u_{10}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{5x}(z - R - t_1 - t_2) \\
v_1(x,[,z) &= v_{10}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{R5[}(z - R - t_1 - t_2) \\
u_2(x,[,z) &= u_{20}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{5x}(z - R) \\
v_2(x,[,z) &= v_{20}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{R5[}(z - R) \\
u_3(x,[,z) &= u_{30}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{5x}(z - R + t_1 + t_2) \\
v_3(x,[,z) &= v_{30}(x,[) - \frac{5w(x,[)}{R5[}(z - R + t_1 + t_2)
\end{aligned} \tag{30}$$

至此, 我们构造了以 u_{01}, u_{02}, u_{03}, v_{01}, v_{02}, v_{03}, w_0表示的对应于式(21)与式(22)所示载荷状态的分层区内的位移模态。此位移模态满足分层区位移边界条件。

3　附加位移的能量解法

令

$$X_{x1} = X_x, \quad X_{x2} = X_x, \quad X_{x2} = \frac{1}{2} V_{x[} \tag{31}$$

则在线弹性条件下, 各层的应变与应力分量可表示为

$$X_{ij}^{(k)} = r_{ij(k)}(x,[) u_{0k} + s_{ij(k)}(x,[) v_{0k} + t_{ij(k)}(x,[) w_0 \tag{32}$$

$$e_{ij}^{(k)} = C_{ijpq}^{(k)} X_{pq}^{(k)} \tag{33}$$

式中: 标号 $k=1,2,3$ 表示外、中、内三层层号; $C_{ijpq}^{(k)}$ 为各层刚度系数。将式(30)代入几何方程可确定函数 $r_{ij(k)}, s_{ij(k)}, t_{ij(k)}, i,j,p,q=1,2$。

分层区内圆柱壳块的应变能表示为(只考虑第一象限)

$$U=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{v_k} e_{ij}^{(k)} X_j^{(k)} dv_k \tag{34}$$

v_k 为层板三层在第一、五象限的体积。外力势能为

$$\begin{aligned} V=&-\int_A\{f_{rx}^{(1)}(x,[)[u_1(x,[,R+t_1+t_2)-\\ &u_2(x,[,R+t_1+t_2)]+\\ &f_{r[}^{(1)}(x,[)[v_1(x,[,R+t_1+t_2)-\\ &v_2(x,[,R+t_1+t_2)]\}dA\\ &-\int_A\{f_{rx}^{(2)}(x,[)[u_2(x,[,R-t_1-t_2)-\\ &u_3(x,[,R-t_1-t_2)]+\\ &f_{r[}^{(2)}(x,[)[v_2(x,[,R-t_1-t_2)-\\ &v_3(x,[,R-t_1-t_2)]\}dA \end{aligned} \tag{35}$$

式中: A 为分层区面积的四分之一。

最后, 根据最小势能原理

$$W(U+V)=0$$

得到待定位移参数的闭合解答

$$u_{01}=\frac{A_{22}B_1-A_{12}B_2}{-A_{12}^2+A_{11}A_{22}}+\frac{A_{12}A_{27}-A_{17}A_{22}}{-A_{12}^2+A_{11}A_{22}}w_0,$$

$$v_{01}=\frac{-A_{12}B_1+A_{11}B_2}{-A_{12}^2+A_{11}A_{22}}+\frac{A_{12}A_{17}-A_{11}A_{27}}{-A_{12}^2+A_{11}A_{22}}w_0,$$

$$u_{02}=\frac{A_{44}B_3-A_{34}B_3}{-A_{34}^2+A_{33}A_{44}}+\frac{A_{34}A_{47}-A_{37}A_{44}}{-A_{34}^2+A_{33}A_{44}}w_0,$$

$$v_{02}=\frac{-A_{34}B_3+A_{33}B_4}{-A_{34}^2+A_{33}A_{44}}+\frac{A_{34}A_{37}-A_{33}A_{47}}{-A_{34}^2+A_{33}A_{44}}w_0,$$

$$u_{03}=\frac{A_{66}B_5-A_{56}B_6}{-A_{56}^2+A_{55}A_{66}}+\frac{A_{56}A_{67}-A_{57}A_{66}}{-A_{56}^2+A_{55}A_{66}}w_0,$$

$$v_{03}=\frac{-A_{56}B_5+A_{55}B_6}{-A_{56}^2+A_{55}A_{66}}+\frac{A_{56}A_{57}-A_{55}A_{67}}{-A_{56}^2+A_{55}A_{66}}w_0,$$

$$\begin{aligned} w_0=&\frac{(A_{22}B_1-A_{12}B_2)A_{17}+(A_{11}B_2-A_{12}B_1)A_{27}}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}+\\ &\frac{(A_{44}B_3-A_{34}B_4)A_{37}+(A_{33}B_4-A_{34}B_3)A_{47}}{A_{34}^2-A_{33}A_{44}}+\\ &\frac{(A_{66}B_5-A_{56}B_6)A_{57}+(A_{55}B_6-A_{56}B_5)A_{67}}{A_{56}^2-A_{55}A_{66}}+B_7\\ &/\frac{A_{17}^2A_{22}+2A_{12}A_{17}A_{27}+A_{11}A_{27}^2}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}+\\ &\frac{A_{37}^2A_{44}+2A_{34}A_{37}A_{47}+A_{33}A_{47}^2}{A_{34}^2-A_{33}A_{44}}+\\ &\frac{A_{57}^2A_{66}+2A_{56}A_{57}A_{67}+A_{55}A_{67}^2}{A_{56}^2-A_{55}A_{66}}+A_{77} \end{aligned} \tag{36}$$

式中: 系数 A_{ij}, B_i 的解析表达由应变、应力表达式直接积分而得到。

根据上述闭合解, 由式(24)～式(29)可得到位移模态的闭合解, 并进一步确定其它力学参量。

4 算　例

设正交铺层复合材料四层圆柱壳块的材料为石墨/环氧, 铺层角为[0°/90°/90°/0°], 0°层纤维沿母线方向, 材料常数如下: $E_1=53.74$ GPa, $E_2=17.95$ GPa, $`_{12}=0.25$, $G_{12}=8.628$ GPa。取附加剪切载荷 $f_{rx}^{(1)}=f_{r[}^{(1)}=\wedge_1=__1=1$ MPa, $f_{rx}^{(2)}=f_{r[}^{(2)}=\wedge_2=__2=1.1$ MPa, 根据式(36)计算不同情况下的挠度幅值与中面位移待定参数, 并根据式(24)～式(29)计算各层在(a/2, b/2)点处的中面位移 $U_{10}, U_{20}, U_{30}, V_{10}, V_{20}$ 和 V_{30}。

取圆柱壳块的平均半径 R= 80 mm, 分层区的半长与半宽分别用 a 与 b 表示, 其中 b= R[0。保持 b= 20 mm不变, 图 3、图 4 分别给出了(0, 0)点处的挠度 w_0 以及各层在(a/2, b/2)点处的中面位移随长宽比 a/b 的变化。由图中可以看出: 挠度及内外两层的中面位移随着长宽比的变大而变大, 分层区的挠度幅值远远大于中面位移。

保持分层区面积不变($S=a\times b=400\ mm^2$), 两层厚度取为 $2t_1=t_2=1.0$ mm, 分别取半径 R= 80 mm, 400 mm, 720 mm, 图 5、图 6 分别给出了(0, 0)点处的挠度 w_0 以及各层在(a/2, b/2)点处的中面位移随长宽比的变化。由图中可以看出: 挠度随着半径的增大而增大。同时可以看出: 当取较大的半径 R= 720 mm, 这时圆柱壳的曲率较小, 将所得结果与文献[7]中对层合板分层问题分析的结果相比较, 可以看出两者的结果是很接近的。取圆柱壳的半径很大时, 沿母线方向的中面位移随着长宽比的变大而变大, 沿环向的位移随着长宽比的增大而减小。

图 7、图 8 给出了当总厚度不变($2t_1+t_2=2.0$ mm), 分层区的半长与半宽 a= b= 20 mm 时, 分别取半径 R= 80 mm, 400 mm, 720 mm 时, (0, 0)点处的挠度 w_0 以及各层在(a/2, b/2)点处的面内位移随厚度比的变化。由图中可以看出: 挠度随着半径的增大而增大。同样当取半径很大时, 可以得到与文献[7]接近的结果, 并且各层中面位移随着外层厚度的减小而增大。

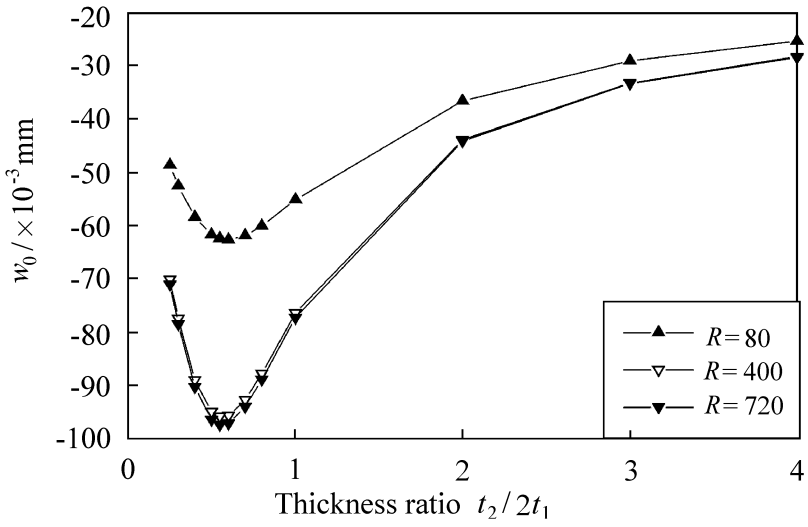

图 7　分层区挠度随厚度比的变化

Fig. 7　Deflection w_0 with respect to thickness ratio of delamination area in different radius conditions

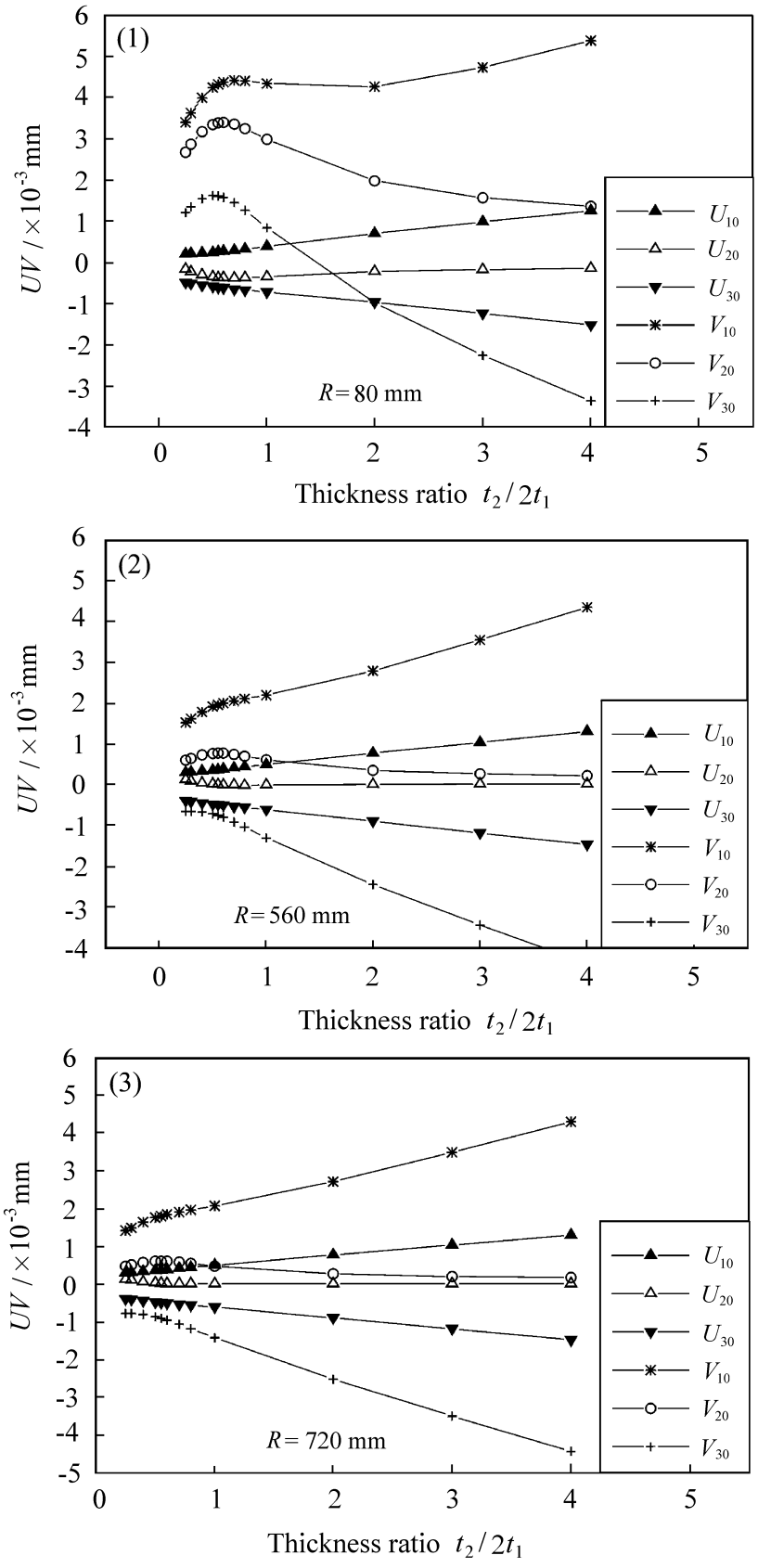

图 8　在不同半径情况下, 分层区各层中面位移随厚度比的变化

Fig. 8　Middle plane displacements with respect to thickness ratio in different radius conditions

5　结　论

(1) 采用了状态分解的方法, 使圆柱壳块的三维分层问题归结为对分层表面只受附加剪切载荷的受力状态的分析, 从而使问题大大简化。

(2) 分层区的挠度远远大于各层的中面位移。

(3) 取半径很大时可以得到与层合板很接近的结果, 表明用这种方法分析圆柱壳块的分层问题的可行性。

(4) 采用片条合成方法构造了形式简单的附加位移, 并用能量法得到了其闭合解。该方法可用于分析含分层层合结构的断裂与稳定问题, 为这类结构的损伤容限设计提供参考性依据。

参考文献:

[1] 李四平, 黄玉盈, 胡元太, 李大望. 3D 复合材料中纤维搭桥对脱层屈曲的影响 [J]. 工程力学, 1998, 15(4): 127- 132.

[2] 李思简, 万　晖. 层合圆柱壳块体表层矩形分层屈曲分析 [J]. 上海交通大学学报, 1990, 24(5, 6): 164- 172.

[3] Chattopadhyay Aditi, Gu Haozhong. Modeling of delamination buckling in composite cylindrical shell with a new higher-order theory [J]. Composite Science and Technology, 1995, 54(2): 223- 232.

[4] Gu Haozhong, Aditi Chattopadhyay. Delamination buckling and postbuckling of composite cylindrical shell [J]. AIAA Journal, 1996, 34(6): 1279- 1286.

[5] 王奇志, 孟庆春, 张　行. 复合材料层合梁分层问题解析解法 [J]. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(3): 319- 322.

[6] 胡伟平, 孟庆春, 张　行. 含内部分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法 [J]. 复合材料学报, 1998, 15(3): 113- 118.

[7] 孟庆春, 胡伟平, 张　行. 含矩形内部分层的复合材料层板的状态分解——片条合成能量解法 [J]. 复合材料学报, 1999, 16(3): 118- 123.

[8] 胡伟平, 孟庆春, 张　行. 含椭圆分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法 [J]. 航空学报, 2000, 21(4): 338- 342.

[9] 孟庆春, 胡伟平, 张　行. 含椭圆形分层层板的状态分解——片条合成能量解法 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(2): 102- 108.

[10] 胡伟平. 含分层的复合材料层合板三维问题的研究 [D]. 北京航空航天大学硕士论文, 1998.

[11] 缪长青, 孟庆春, 张　行. 分析蜂窝夹芯板脱胶问题的状态分解——能量方法 [J]. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(2): 207- 211.

[12] 缪长青. 蜂窝夹芯结构脱胶三维问题的研究 [D]. 北京航空航天大学博士论文, 1998.

[13] 白　静, 孟庆春, 张　行. 复合材料层合曲梁分层问题的解析解法 [J]. 复合材料学报, 2003, 20(5): 142- 146.