复合材料学报 第27卷 第4期 8月 2010年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 27 No. 4 August 2010

文章编号：1000-3851(2010)04-0174-06

用变分渐近法进行复合材料层合板仿真及三维场重构

钟轶峰*[1]，YU Wenbin[2]
（1. 重庆大学 土木工程学院，重庆 400030；2. Department of Mechanics and Aerospace Engineering，Utah State University，U. S.）

摘　要： 为有效模拟和准确重构复合材料层合板三维应力/应变/变形场，基于变分渐近方法构建单斜对称的复合材料层合板渐近修正理论和重构关系。主要内容包括：基于旋转张量分解概念用一维广义应变和翘曲表示板的三维应变场，以考虑包括板翘曲变形在内的所有变形；基于变分渐近法将原三维问题分析严格拆分为非线性二维板分析（等效单层板模型）和沿法线方向的一维线性分析；通过层合板厚跨比和二维应变量阶数2个较小参数将应变能渐近修正到第二阶，并转换为Reissner形式以便于实际应用；利用生成的二维板变形和翘曲函数精确重构三维场。通过一具有20层复合层合板的柱形弯曲算例表明：基于该理论和重构过程开发的渐近变分程序VAPAS重构生成的三维应力场精确性较一阶剪切变形理论和古典层合理论更好，与三维有限元精确解相一致。

关键词： 变分渐近法；复合材料层合板；应力重构；Reissner模型
中图分类号： TB330.1　　**文献标志码：** A

Simulation and 3D field recovery of composite laminated plates by use of variational asymptotic method

ZHONG Yifeng*[1]，YU Wenbin[2]
（1. College of Civil Engineering，Chongqing University，Chongqing 400030，China；
2. Department of Mechanics and Aerospace Engineering，Utah State University，U. S.）

Abstract： To effectively simulate and accurately recover the three-dimensional stress/strain/deformation field of composite laminated plates，an asymptotic revise theory and the recovery relationship were established based on the variational asymptotic method (VAM). The original 3D stress field was expressed by one-dimensional generalized stress and warping function based on decomposition of rotation tensor (DRT) to consider all the deformations，and VAM was used to strictly split the three-dimensional problem into a two-dimensional non-linear analysis of deformation plate (equivalent single-layer plate model) and a one-dimensional linear analysis along the transverse normal direction. Then，the strain energy was asymptotic corrected to second order by taking advantage of the ratio of height to span and the order of two-dimensional strain，and the energy was converted to the form of Reissner formula for practical applications. Based on this theory，a variational asymptotic plate and shell analysis program (VAPAS) was developed. The cylindrical bending example of a 20-layer composite plate shows that the three-dimensional field recovered by this theory agrees better with the exact results than that by the first-order shear deformation theory (FOSDT) and classic laminated theory (CLT).

Keywords： variational asymptotic method；composite laminated plates；stress field recovery；Reissner model

近20年来，先进复合材料结构因其高强度、高模量、可设计性等优点已广泛应用于航天航空、机械、土木等领域。复合材料结构很多是厚度尺寸比其它两个方向尺寸小得多的平板铺层结构，复合材料铺层设计的灵活性为结构的应力计算、变形分析以及强度预测带来额外的复杂性。基于Kirchhoff假设（薄板）、由三维弹性理论推导出的古典层合理论是最简单的复合板分析理论。但若计入板厚，其精度较三维有限元分析下降很多。Noor[1-3]、Reddy[4]、Touratier[5]、DiSciuva[6]和Cho[7]利用板厚

收稿日期： 2010-01-05；**收修改稿日期：** 2010-04-26
基金项目： 重庆市自然科学基金(CSTC,2007BB6119)；重庆大学高层次人才科研基金(0903005104203)
通讯作者： 钟轶峰，工学博士，讲师，主要研究方向：复合材料结构设计　E-mail：zhongjy58@sina.com

相对基准面上的变形很小的特点，将板的厚度坐标从偏微分方程的独立变量中去掉，用精确的二维模型代替三维模型对古典模型不足之处进行改进，但大部分研究都是基于特定的动力学假设(如沿厚度方向的位移分布假设等)，无法较好地反映层合板三维效应和铺层之间的相互作用。

随着近年来计算硬件和软件的发展，可使用三维有限元软件 ANSYS 或 NASTRAN 对这类复合层合板进行三维计算和分析，如王跃全等[8]以 ABAQUS 有限元软件为平台，对三维复合层合板渐近损伤进行非线性分析；Apalak[9]的分析模型中对复合材料层合板采用 ANSYS 软件中的八节点三维层状体单元进行应力求解。但仍有必要对这种结构进行简化分析，原因在于：首先，许多工程问题目前无法用三维有限元分析处理，如实际的转子叶片由 200 多层非常薄的复合层构成，若使用三维有限元模型，每一铺层至少需要一个单元进行模拟，该叶片模型很容易超过 10^9 个自由度。因此，由 4 个转子叶片构成的旋翼气弹性分析目前无法在任一台计算机上通过三维有限元分析解决；而且在对整个结构进行有限元分析的起始准备工作，包括材料种类的选择、层合和夹层结构的设计以及层合板铺设方式设计，有限元软件的实用性不大，当在层合板结构的不同层的级别上来对复合材料行为(应力、应变分布)进行细节研究时，有限元软件提供的后处理能力尤其有限。另外，尽管三维有限元在连续介质力学框架内提供很好的准确性，但计算太费时，且耗费大量的计算机资源，难以在规定的设计和分析时间内完成预定目标，因此迫切需要一种高效、快速的专业复合材料层合板分析方法和程序，以缩短设计时间，降低计算成本。

本文中对三维复合材料层合板的各向异性、弹性问题进行分析，利用旋转张量分解概念(DRT)[10-11]和渐近变分法[12-13](VAM)对复合材料层合板进行高仿真模拟和三维场精确重构研究，以解决复合材料层合板各向异性、非均匀性带来结构复杂性的关键技术问题，为今后复合层合板进一步研究与应用提供新的思路和理论依据。

1 公式推导

1.1 复合材料层合板能量表达式

复合材料层合板变形前基准面上任意一点位置可由图 1 所示的笛卡尔坐标系 x_i 表示，其中 x_α 是

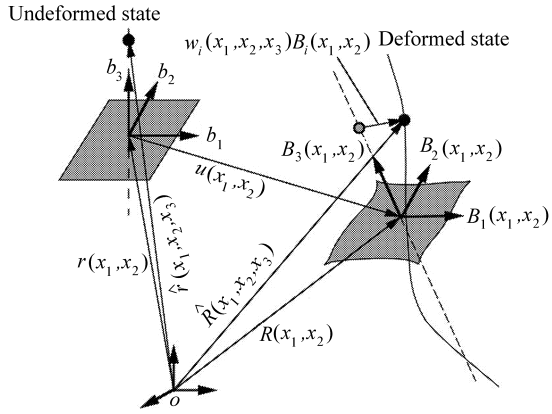

图 1 层合板变形前、后坐标系

Fig. 1 Coordinates system of composite laminated plate before and after deformation

基准面上相互正交的坐标，x_3 是法向坐标(字母下标 i、j、k 代表 1、2、3；字母下标 α 代表 1、2，下同)。引入一组沿 x_i 方向的单位向量 b_i，板上任一点的位置可由固定点 o 到 x_α 确定点的位置向量 $\hat{r}$ 描述为

$$\hat{r}(x_1, x_2, x_3)=r(x_1, x_2)+x_3 b_3 \tag{1}$$

当定义板的中间层为其基准面时

$$\langle \hat{r}(x_1, x_2, x_3)\rangle=r(x_1, x_2) \tag{2}$$

其中尖括号表示沿板厚度的积分，下同。

板变形后，位置向量 $\hat{r}$ 转换为变形后的位置向量 $\hat{R}$，后者可由板的变形唯一确定。为推导方便，引入与板变形相关的另一组单位向量 B_i。B_i 和 b_i 之间的关系由方向余弦函数矩阵 $C(x_1, x_2)$ 确定为

$$B_i=C_{ij} b_j, \quad C_{ij}=B_i \cdot b_j \tag{3}$$

变形板上任一点的位置向量 $\hat{R}$ 可表示为

$$\hat{R}(x_1, x_2, x_3)=R(x_1, x_2)+x_3 B_3(x_1, x_2) +w_i(x_1, x_2, x_3) B_i(x_1, x_2) \tag{4}$$

其中 w_i 是翘曲分量，在这里视为未知的三维函数求解，以考虑包括古典层合理论未考虑的局部翘曲变形在内的所有变形。翘曲的引入使式(4)有 6 次冗余，需 6 个约束来求解方程，可通过适当定义 $\hat{R}$ 和 B_i 消除冗余，与式(2)类似，可定义 $\hat{R}$ 在板的中间层，这样，翘曲函数必须满足 3 个约束：

$$\langle w_i(x_1, x_2, x_3)\rangle=0 \tag{5}$$

将 B_3 设为与板变形面垂直可确定其它 2 个约束。

基于旋转张量分解理论[10-11]，由局部小旋转的条件，Jauman-Biot-Cauchy 应变分量可表示为

$$\Gamma_{ij}=1/2(F_{ij}+F_{ji})-\delta_{ij} \tag{6}$$

其中，F_{ij} 是变形梯度张量的混合基分量。

假设应变很小，忽略一维广义应变和翘曲的乘积项，可得到一维广义应变和翘曲函数表示的三维应变场

$$\Gamma=\Gamma_h w+\Gamma_\varepsilon \varepsilon+\Gamma_{l_\alpha} w_{,\alpha} \tag{7}$$

其中：

$$\Gamma=[\Gamma_{11}\quad 2\Gamma_{12}\quad 2\Gamma_{22}\quad 2\Gamma_{13}\quad 2\Gamma_{23}\quad \Gamma_{33}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

$$w=[w_1\quad w_2\quad w_3]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$\varepsilon=[\varepsilon_{11}\quad 2\varepsilon_{12}\quad \varepsilon_{22}\quad K_{11}\quad K_{12}+K_{21}\quad K_{22}]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

算子 Γ_h、Γ_ε、Γ_{l_α} 可参阅文献[8]。$()_{,\alpha}=\partial()/\partial x_\alpha$，下同。

板每单位面积上的应变能可表示为

$$U=\frac{1}{2}\langle \Gamma^{\mathrm{T}} D\Gamma\rangle \tag{11}$$

其中 D 是 6×6 阶对称材料参数矩阵。

由于应变很小，可安全地忽略虚拟旋转中翘曲与荷载的乘积项，得到式(5)约束下荷载 $\tau_i B_i$，$\beta_i B_i$，$\phi_i B_i$(分别作用在板的顶面、底面和厚度方向)虚拟位移产生的虚功：

$$W=-\tau^{\mathrm{T}} w\Big|_{x_3=h/2}-\beta^{\mathrm{T}} w\Big|_{x_3=-h/2}-\langle \phi^{\mathrm{T}} w\rangle \tag{12}$$

根据虚功原理，层合板的三维能量问题的完整表述为

$$\delta U-\delta W=0 \tag{13}$$

总能量的泛函为

$$\Pi=U+W \tag{14}$$

$$\delta\Pi=0 \tag{15}$$

在式(5)约束下的总能量中，仅翘曲是变化的。未知的翘曲函数可由对总能量最小化求得。

式(14)仅是原三维板弹性问题的另一表达形式。若直接进行求解，将会遇到与原三维板弹性问题相同的困难。若板由多层复合层构成，该计算过程将变得十分繁琐。本文中借助变分渐近法渐近计算三维翘曲函数，可使计算得到简化。为考虑任何横截面形状和各向异性材料，首先应用有限元方法将三维翘曲场离散为一维有限元单元形式：

$$w(x_1,x_2,x_3)=S(x_3)V(x_1,x_2) \tag{16}$$

其中：$S(x_3)$表示单元形函数；V 为横向法线方向翘曲场的节点位移。

将式(16)代入式(13)中，可得到离散形式的总能量为

$$\begin{aligned}2\Pi=&V^{\mathrm{T}}EV+2V^{\mathrm{T}}(D_{h\varepsilon}\varepsilon+D_{hl_1}V_{,1}+D_{hl_2}V_{,2})\\&+\varepsilon^{\mathrm{T}}D_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon+V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1l_1}V_{,1}+V_{,2}^{\mathrm{T}}D_{l_2l_2}V_{,2}\\&+2(V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1\varepsilon}\varepsilon+V_{,2}^{\mathrm{T}}D_{l_2\varepsilon}\varepsilon+V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1l_2}V_2)+2V^{\mathrm{T}}L\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $L=-S^{+\mathrm{T}}\tau-S^{-\mathrm{T}}\beta-\langle S^{\mathrm{T}}\phi\rangle$，为荷载相关项。

新引入的与几何形状和材料属性有关的变量包括：

$$\begin{aligned}&E=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_hS]\rangle,D_{h\varepsilon}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,\\&D_{hl_1}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_1}S]\rangle,D_{hl_2}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,\\&D_{\varepsilon\varepsilon}=\langle\Gamma_\varepsilon^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,D_{l_1l_1}=\langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_1}S]\rangle,\\&D_{l_1l_2}=\langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,D_{l_2l_2}=\langle[\Gamma_{l_2}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,\\&D_{l_1\varepsilon}=\langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,D_{l_2\varepsilon}=\langle[\Gamma_{l_2}S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle.\end{aligned} \tag{18}$$

式(5)的离散形式为

$$V^{\mathrm{T}}H\psi=0 \tag{19}$$

其中：$H=\langle S^{\mathrm{T}}S\rangle$；$\psi$ 是 E 的正交化核心矩阵，$\psi^{\mathrm{T}}H\psi=1$。三维翘曲函数的求解问题转化为在式(19)约束下式(17)最小化问题。

1.2　降维后的近似能量公式推导

众所周知，弹性体的形态完全由其能量所确定。VAM 是一种有效的数学工具，可用二维能量尽可能准确地再现三维能量。对复合层合板结构，可选择 h/L(h 为板厚，L 为板长)和广义二维应变的阶数 n 作为变分渐近计算所需的小参数。

应用 VAM，首先需根据泛函的不同阶数找到主导项。由于总能量中只有翘曲是变化的，只需找到仅含有翘曲的主导项或翘曲与其它量乘积项(如广义应变和荷载)的主导项。

对式(17) 零阶近似后泛函的主导项为

$$2\Pi_0^*=V^{\mathrm{T}}EV+2V^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}\varepsilon \tag{20}$$

借助拉格朗日乘子 Λ 通过对变量的常规计算可得到式(19)约束下式(20)的欧拉-拉格朗日方程为

$$EV+D_{h\varepsilon}\varepsilon=H\psi\Lambda \tag{21}$$

考虑内核矩阵 ψ 的属性，拉格朗日乘子 Λ 为

$$\Lambda=\psi^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}\varepsilon \tag{22}$$

将式(22)代回式(21)，可得

$$EV=(H\psi\psi^{\mathrm{T}}-I)D_{h\varepsilon}\varepsilon \tag{23}$$

由于式(23)等式右边与 V 的零空间 E 正交，存在唯一解与零空间 E 线性独立，可选择任何约束以方便求解：

$$V=V^*+\psi\lambda \tag{24}$$

其中：V^* 为线性体系解；λ 可由式(19)确定

$$\lambda=-\psi^{\mathrm{T}}HV^* \tag{25}$$

式(25)代入式(24)，则式(19)约束下式(17)的最小化解为

$$V=(I-\psi\psi^{\mathrm{T}}H)V^*=\hat{V}_0\varepsilon=V_0 \tag{26}$$

将式(26)代入式(20)得到渐近修正到零阶近似的总能量泛函为

$$2\Pi_0=\varepsilon^{\mathrm{T}}(\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}+D_{\varepsilon\varepsilon})\varepsilon \tag{27}$$

这一近似能量与古典分层板理论得出的结果相吻合，但并未建立在 Kirchhoff 动力学假设基础上，且尽管能量相同，但推导出的横向法线方向应变并不为零。注意到零阶近似得到的翘曲是 n 阶，根据 VAM，为接受零阶近似结果，必须检查下一阶近似是否比这还要高。为得到一阶近似翘曲，对零阶近似翘曲进行如下摄动：

$$V=V_0+V_1 \tag{28}$$

将式(28)代入式(7)及式(17)，可得到总能量泛函一阶近似的主导项为

$$2\Pi_1^*=V_1^{\mathrm{T}}EV_1+2V_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha\varepsilon_{,\alpha}+2V_1^{\mathrm{T}}L \tag{29}$$

其中：$D_\alpha=(D_{hl_\alpha}-D_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})\hat{V}_0-D_{l_\alpha\varepsilon}$；$L$ 为荷载相关项。

同零阶近似一样，可求解一阶翘曲场

$$V_1=V_{1\alpha}\varepsilon_{,\alpha}+V_{1L} \tag{30}$$

代入式(29)，可得到渐近修正到二阶的总能量泛函为

$$2\Pi_1^*=\varepsilon^{\mathrm{T}}A\varepsilon+\varepsilon_{,1}^{\mathrm{T}}B_0\varepsilon_{,1}+2\varepsilon_{,1}^{\mathrm{T}}C\varepsilon_{,2}+\varepsilon_{,2}^{\mathrm{T}}D_0\varepsilon_{,2}+2\varepsilon^{\mathrm{T}}F+P \tag{31}$$

其中：

$$A=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}+D_{\varepsilon\varepsilon},\quad B_0=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_1}\hat{V}_0+V_{11}^{\mathrm{T}}D_1,$$
$$C=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_2}\hat{V}_0+1/2(V_{11}^{\mathrm{T}}D_2+D_1^{\mathrm{T}}V_{12}),$$
$$D_0=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_2l_2}\hat{V}_0+V_{12}^{\mathrm{T}}D_2$$
$$F=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}L-1/2(D_1^{\mathrm{T}}V_{1L,1}+V_{11}^{\mathrm{T}}L_{,1}+D_2^{\mathrm{T}}V_{1L,2}+V_{12}^{\mathrm{T}}L_{,2}),$$
$$P=V_{1L}^{\mathrm{T}}L. \tag{32}$$

1.3 将近似能量转换为 Reissner 模型形式

尽管总能量经二次渐近修正，但因包含广义应变量的导数，涉及到更加复杂的边界条件。为得到实用的能量方程，可将这种近似能量转换为 Reissner 模型形式。

在 Reissner 模型中有 2 个增加的横向剪切应变自由度 $\boldsymbol{\gamma}=[2\gamma_{13}\quad 2\gamma_{23}]^{\mathrm{T}}$，将其纳入横向法线方向的旋转变量中。古典应变量的 Reissner 形式可表示为

$$\varepsilon=R-D_\alpha\gamma_{,\alpha} \tag{33}$$

其中：

$$D_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad D_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$R=[\varepsilon_{11}^*\quad 2\varepsilon_{12}^*\quad \varepsilon_{22}^*\quad K_{11}^*\quad K_{12}^*+K_{21}^*\quad K_{22}^*]^{\mathrm{T}}. \tag{34}$$

将式(33)代入式(31)，可得到 Reissner 应变形式表示的修正到第二阶的总能量泛函，具体形式为

$$2\Pi_R=R^{\mathrm{T}}AR-2R^{\mathrm{T}}AD_\alpha\gamma_{,\alpha}+R_{,1}^{\mathrm{T}}B_0R_{,1}+2R_{,1}^{\mathrm{T}}CR_{,2}+R_{,2}^{\mathrm{T}}D_0R_{,2}+2R^{\mathrm{T}}F+P \tag{35}$$

1.4 三维场重构关系推导

经渐近修正的 Reissner 模型形式的近似能量尽可能接近总能。但这还远不足以准确重现复合层合板的三维位移场，还需提供重构关系以完善降维模型。本文中通过得到二维变形和翘曲函数准确重构复合层合板三维场。

对经二阶渐近修正的应变能，可基于渐近修正的严格定义，由式(1)、式(3)、式(4)得到一阶渐近修正的三维变形

$$U_{3\mathrm{d}}=u_{2\mathrm{d}}+x_3\begin{bmatrix}C_{31}\\C_{32}\\C_{33}-1\end{bmatrix}+SV_0+S\bar{V}_1 \tag{36}$$

其中：$U_{3\mathrm{d}}$是三维变形的列阵，$u_{2\mathrm{d}}$是板的二维变形；C_{ij}是由式(3)得到的全局旋转张量分量。

由式(7)得到一阶渐近修正的三维应变场为

$$\Gamma=\Gamma_hS(V_0+\bar{V}_1)+\Gamma_\varepsilon\varepsilon+\Gamma_{l_1}SV_{0,1}+\Gamma_{l_2}SV_{0,2} \tag{37}$$

然后，可使用材料本构关系得到三维应力 σ_{ij}。

2 算 例

基于前述理论和重构关系开发了变分渐近法板/壳计算机分析程序(VAPAS)对一具有 20 层对称复合层合板([30°−30°/30°/−30°]$_5$，从底部到顶部编号)柱形弯曲问题进行分析，计算结果与三维精确解和一阶剪切变形理论解(FOSDT)、古典层合理论解(CLT)进行比较以验证该理论和程序的有效性、准确性。

2.1 模型参数

复合材料工程弹性常数列于表 1 中。

表 1 复合材料工程弹性常数

Table 1 Composite material engineering properties

E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	G_{22}/GPa	ν_{12}	ν_{22}
172.4	6.9	3.45	1.38	0.25	0.25

复合材料层合板构型如图 2 所示：板长 $L=10$ cm，板厚 $h=2.5$ cm，长厚比 $L/h=4$；x_1 为纤维方向，x_2 为层合板面内垂直纤维方向的方向，x_3 为层合板铺层叠加的厚度方向。板两端简支，承受正弦变化荷载为

$$\tau_3=\beta_3=\frac{p_0}{2}\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right);\quad \tau_\alpha=\beta_\alpha=0 \tag{38}$$

2.2 数值分析与讨论

沿厚度方向分布的三维应力场所有 6 个分量数值计算结果绘于图 3。应变的精确性与应力结果相

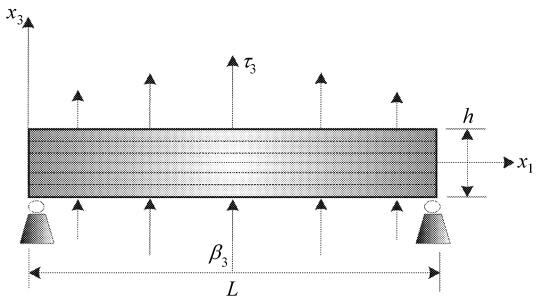

图 2　复合材料层合板柱形弯曲问题模型(20 层)

Fig. 2　Cylindrical bending of composite laminated plate (20 layers)

一致，未在此列出。值得注意的是，因二维变量是 x_1 的正弦和余弦函数，应力分量 σ_{23} 绘于 $x_1=0$ 或 $x_1=L$ 处，而其余应力分量 $x_1=L/2$ 处。

可看出，所有模型沿厚度方向的平面应力分量 σ_{11}、σ_{12}、σ_{22} 均与精确解吻合较好；对于横向应力分量 σ_{13}、σ_{23}，VAPAS 解可获得比 CLT 和 FOSDT 解更精确的结果；对于横向法线方向应力 σ_{33}，CLT 和 FOSDT 皆无法获得满意的数值计算结果，而 VAPAS 与精确解一致，且 VAPAS 计算可在一般台式机上 1 s 内完成。

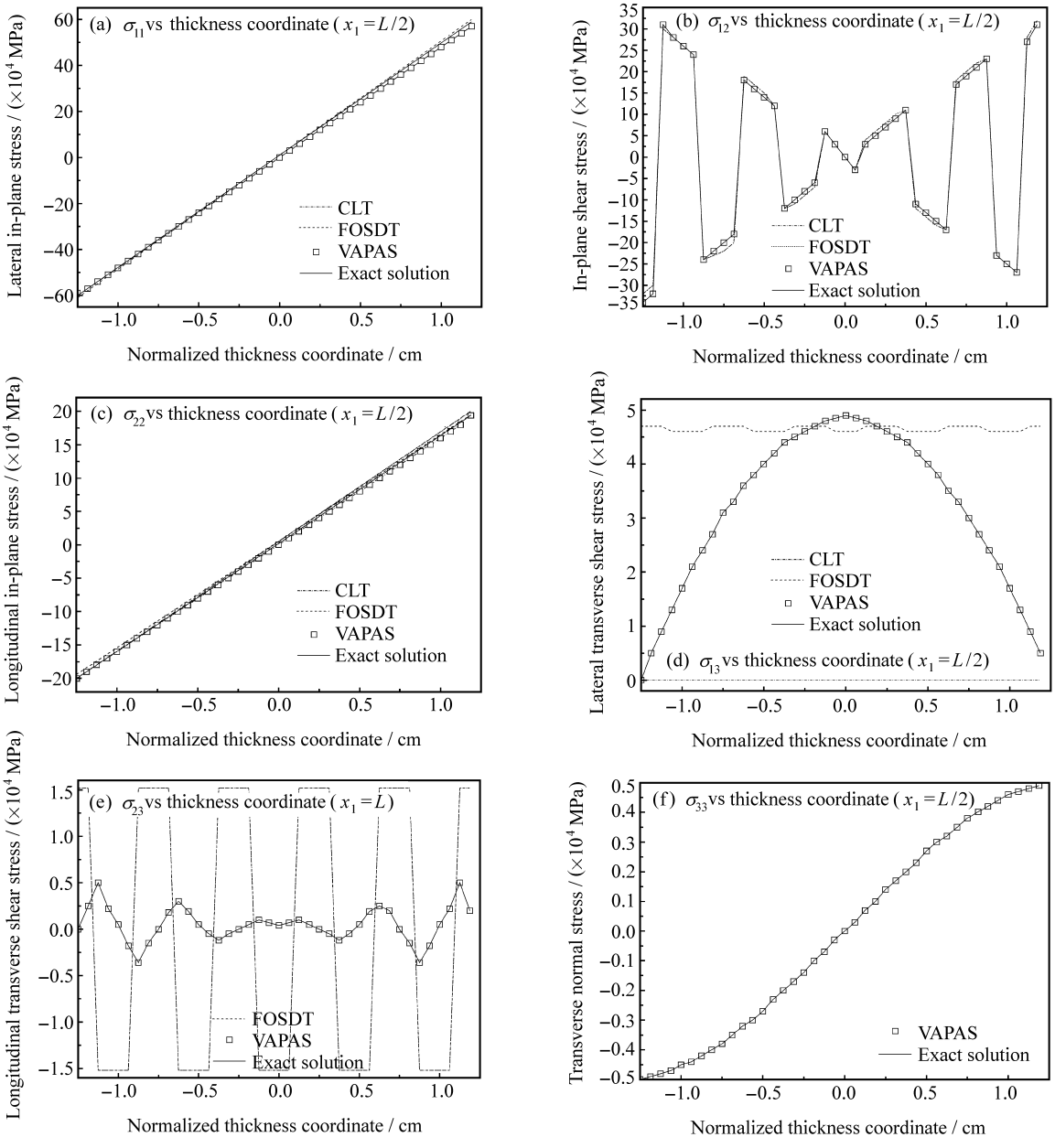

图 3　沿厚度方向分布的三维应力场 6 个分量数值分析结果

Fig. 3　Numerical results of six components of three-dimensional stress field along the thickness direction

3 结 论

（1）基于变分渐近方法，建立了单斜对称材料构成的复合层合板完整的渐近修正理论和重构关系，并转换为工程常用的 Reissner 形式，该方法和理论可进一步扩展到壳结构中去。

（2）使用变分渐近法和最低总势能原则求解未知的二维翘曲函数，不需任何动力学假设，也不同于传统的板理论假设翘曲场的一般形式，用高阶翘曲作参数来求解假设函数中的未知参数的方法。整个过程便于迭代应用。

（3）通过对 20 层不同铺层方向的层合板算例验证，重构的三维应力场较一阶剪切变形理论和古典层合理论的计算结果精度更高，可与三维有限元计算结果相媲美，说明了变分渐近法用于层合板三维场重构的有效性。

（4）基于该理论和重构关系研发的渐近变分板分析程序 VAPAS 计算量小（与三维有限元相比，可节省 2～3 阶计算量），运行速度快，便于工程应用。

参考文献：

[1] Noor A K, Burton S W. Assessment of computational models for multilayered composite shells [J]. Applied Mechanics Review, 1990, 43(10): 47-54.

[2] Noor A K, Burton W S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates [J]. Applied Mechanics Review, 1989, 41(5): 1-13.

[3] Noor A K, Malik M. An assessment of five modeling approaches for thermo-mechanical stress analysis of laminated composite panels [J]. Computational Mechanics, 2000, 25(7): 43-58.

[4] Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(11): 745-752.

[5] Touratier M. An efficient standard plate theory [J]. International Journal of Engineering Science, 1991, 29(4): 901-916.

[6] DiSciuva M. Development of anisotropic multilayered shear deformable rectangular plate element [J]. Computers and Structures, 1985, 21(15): 789-796.

[7] Cho Y B, Averill R C. First-order zig-zag sublaminate plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels [J]. Composite Structures, 2000, 50(8): 1-15.

[8] 王跃全，童明波，朱书华. 三维复合材料层合板渐进损伤非线性分析模型 [J]. 复合材料学报，2009，26(5)：160-168.
Wang Yuequan, Tong Mingbo, Zhu Shuhua. 3D nonlinear progressive damage analysis model for composite laminates [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2009, 26(5): 160-168.

[9] Apalak Z G, Apalak M K, Genc M S. Progressive damage modeling of an adhesively bonded unidirectional composite single-lap joint in tension at the mesoscale level [J]. Journal of Thermoplastic Composite Materials, 2006, 19(6): 671-702.

[10] Danielson D A. Finite rotation with small strain in beams and plates [C]// Proceedings of the 2nd Pan American Congress of Applied Mechanics. Valparaiso, Chile: The American Academy of Mechanics(AAM) 1991: 156-164.

[11] Danielson D A, Hodges D H, Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor [J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(2), 258-262.

[12] Bar-Yoseph Pinhas, Avrashi Jacov. New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1986, 37(3): 305-321.

[13] Lee Chang-Yong, Hodges Dewey H. Dynamic variational asymptotic procedure for laminated composite shells Ⅰ: Low-frequency vibration analysis [J]. Journal of Applied Mechanics, 2009, 76(1): 011002-1-011002-7.