复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第25卷 第5期 10月 2008年
Vol. 25 No. 5 October 2008

文章编号：1000-3851(2008)05-0169-06

基于傅里叶级数的缠绕复合材料刚度预测方法

李 俭，温卫东*，崔海涛
（南京航空航天大学 能源与动力学院，南京 210016）

摘 要： 采用傅里叶级数有关理论，根据缠绕复合材料内部细观结构的特点，建立了缠绕复合材料刚度预测模型。该模型将缠绕复合材料特征单元的刚度作为一个刚度场，利用二维傅里叶级数展开得到描述该刚度场的函数。算例的结果表明，本文中所建立的模型可以预测缠绕复合材料整体刚度特性，同时通过傅里叶级数各阶展开项的叠加可以反映材料内部细观结构对缠绕复合材料刚度特性的影响。

关键词： 缠绕；复合材料；刚度；预测模型；傅里叶级数
中图分类号： TB330.1 **文献标志码：** A

Predicting stiffness of filament-wound composite based on Fourier series

LI Jian, WEN Weidong*, CUI Haitao
(College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Based on the theory of Fourier series, a model for predicting the stiffness of filament-wound composite was provided according to the characteristic of micro-structure of filament-wound composite. In this model, the stiffness of representative volume element (RVE) was treated as a stiffness field; the function of this field was described by 2D Fourier series expansion and the expressions were deduced. The result of the example shows that the model can predict the macro-stiffness of filament-wound composite, also can reflect the effect of internal micro-structure of filament-wound composite on the stiffness characteristic of filament-wound composite.

Keywords: filament-wound; composite; stiffness; forecasting model; Fourier series

缠绕复合材料具有快速成型、材料表面光洁度好、材料气密性好等优点，在航空航天、压力容器等方面有着广泛的应用。对缠绕复合材料刚度特性的研究是其工程应用的重要理论基础。

Khalil 和 Soden[1]采用经典层合板理论推导了缠绕复合材料的弹性常数，层合板理论也是缠绕复合材料弹性常数预测与结构分析中最常用的一种方法。但缠绕复合材料特别是采用螺旋缠绕方式加工的缠绕复合材料并不是简单的层合结构，而是具有层合结构特征和编织结构特征。这些结构特征对缠绕复合材料的力学特性的影响不能忽视[2-3]。

对于编织复合材料的刚度特性预测方法，已经开展了很多研究，基本上可以分为有限元法[4]和均匀化方法[5]两种。有学者将这两种方法应用到缠绕复合材料刚度特性的研究中。姜云鹏[6]根据缠绕复合材料细观结构的特点，选择了特征单元并对其进行了有限元分析，得到了等效模量的计算方法；孙江[7]分析了缠绕复合材料的特征单元，对波动区域采用按体积平均的方法得到波动区域的等效刚度，结合层合板理论得到缠绕复合材料等效模量计算方法；Zhou Chuwei[8]对波动区域柔度矩阵采用体积平均的方法，然后根据波动区域在特征单元中所占比例，得到整体的柔度矩阵，通过柔度矩阵的逆矩阵得到等效刚度矩阵。上述方法都是得到材料整体刚度特性，未能反映细观结构对局部刚度的影响。

Moulinec 和 Suquet[9]采用快速傅里叶变换(FFT)和傅里叶空间中的 Green 算子求解复合材料周期性细观结构的局部应力-应变问题。采用实空间内的物理方程，但是在实空间内材料本构关系矩阵是空间位置的函数，这个函数往往不易获得。Kaβbohm[10]采用了类似的方法，并通过傅里叶级

收稿日期： 2007-11-13；**收修改稿日期：** 2008-02-26
通讯作者： 温卫东，教授，博士生导师，主要从事结构强度与振动、先进结构设计与分析方面的研究 E-mail: GSWWD@nuaa.edu.cn

数将本构关系矩阵也变换到傅里叶空间中，从而建立了傅里叶空间中的迭代求解方法。采用傅里叶级数和傅里叶变换求解周期性结构的应力-应变，避免了有限元法中复杂的建模与分网，方法比较简单。上述方法应用于单向复合材料，在编织复合材料和缠绕复合材料方面的应用尚未见公开报道，同时这种方法对边界条件要求比较严格。

本文作者根据缠绕复合材料细观结构的一般特点，选取和分析了特征单元；根据特征单元在材料中分布特点和特征单元内部结构，利用傅里叶级数方法建立了缠绕复合材料刚度预测模型并推导了有关公式；最后进行了算例分析。

1　缠绕复合材料特征单元分析

缠绕复合材料一般用于制作薄壳或薄壁圆筒，而薄壁结构的变形和应力等在面内变化较大，在厚度方向变化较小。因此，面内应力-应变分析是薄壁结构分析的重点。针对这种情况，本文作者仅考虑缠绕复合材料结构面内刚度的建模与分析问题。图 1(a)是用螺旋缠绕方式加工的缠绕复合材料圆筒结构，纤维束在芯模表面相互交叉形成菱形图案。每个菱形块内部，纤维束分布差别不大，取其中一块作为特征单元（RVE：Representative Volume Element）。特征单元及特征单元的几个典型截面如图 1(b)所示。在图 1(b)中，ϕ 为缠绕角；坐标系 $x-y-z$ 中，x 沿圆筒的轴向，y 沿圆筒的周向，z 沿圆筒的径向。由图 1(b)可见，截面 $B-B'$ 和 $D-D'$ 中存在长度为 L_u 的纤维波动段；在波动段两侧纤维束表现为层合结构特征。特征单元是由相互交叉的两层纤维构成的，可以视为由两个子层构成。

假设沿两个子层的交界面将两个子层分开，分别为第一子层和第二子层，并沿图 1(b)中 $+\phi$ 和 $-\phi$ 方向，在圆筒表面建立一个局部的曲线坐标系 $\xi-\eta$。两个子层的纤维分布和局部坐标系 $\xi-\eta$ 如图 2 所示。由图 2 可见，两个子层的纤维分布可以分为两个部分，即沿 $+\phi$ 和 $-\phi$ 方向的纤维，这部分纤维束没有波动起伏；$+\phi$ 和 $-\phi$ 纤维束交叉部分，在这部分中存在纤维波动。由于两个子层被分开，每个纤维束上波动段长度为 $L_u/2$；两个子层纤维束铺设方向相反。整个特征单元可以看作这两个子层叠加而成，这两个子层不是简单的单向材料。

特征单元的有关参数，如边长 L_{sc}、包含的纤维束的数目等可以依据有关参数计算[8]。波动区域放大如图 3 所示。图 3 中坐标系 1-2-3 是材料主方向坐标系，$\bar{x}$ 为缠绕方向，$\bar{z}$ 沿厚度方向；t 为纤维束厚度；b 为纤维束宽度；θ 为纤维束与缠绕面之间的偏转角。一般假设纤维束截面形状保持不变，因此可以用纤维束轴线(图 3 中虚线)形状描述纤维束

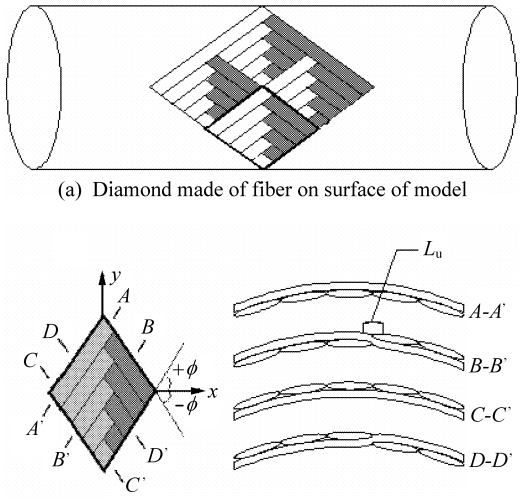


图 1　纤维束形成的菱形图案及特征单元和特征单元典型截面

Fig. 1　Diamond by fiber tow, RVE and typical crosses of the RVE

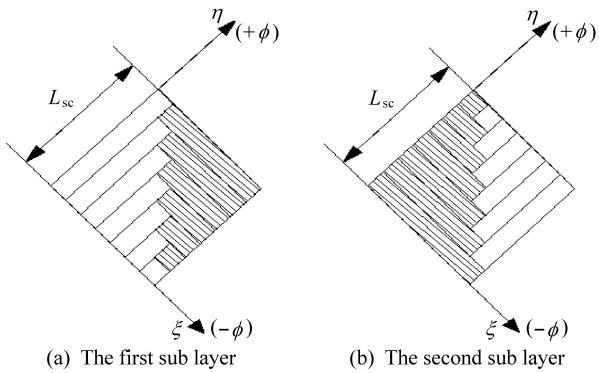


图 2　特征单元所包含子层的纤维分布及局部坐标系

Fig. 2　Fiber arrangement of two sub layers of RVE and local coordinate system

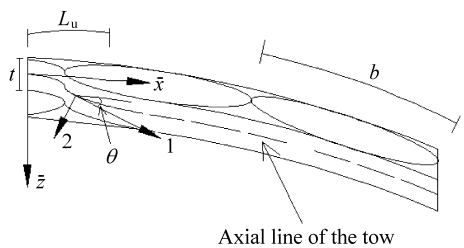


图 3　一条纤维束的波动区域放大图

Fig. 3　Undulation region of a tow

的几何特征。纤维束轴线可以采用正弦函数或余弦函数描述，波动区域内每一点偏转角 θ、树脂层厚度等可以依据几何关系计算[8]。

2　缠绕复合材料刚度预测模型

2.1　周期性函数的傅里叶级数展开

假设函数 $y=f(x)$ 在其定义域内是周期函数，周期为 T，并且满足狄利克雷(Dirichlet)条件，该函数的傅里叶级数为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n(f(x))\exp(\mathrm{i}n\omega x) \tag{1a}$$

$$F_n(f(x))=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\exp(-\mathrm{i}n\omega x)\mathrm{d}x \tag{1b}$$

其中：$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；$\omega=2\pi/T$；n 为整数。式(1)是一维函数傅里叶级数展开，可以将其推广到二维函数的情况。假设函数 $z=f(x,y)$ 在 x 方向周期为 T_1，在 y 方向周期为 T_2，并且分别满足狄利克雷条件，则这个二维函数的傅里叶级数为

$$f(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(f(x,y))\exp(\mathrm{i}n\omega_1 x+\mathrm{i}m\omega_2 y) \tag{2a}$$

$$F(f(x,y))=\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}f(x,y)\exp[-(\mathrm{i}n\omega_1 x+\mathrm{i}m\omega_2 y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2b}$$

其中：$\omega_1=2\pi/T_1$；$\omega_2=2\pi/T_2$；n、m 为整数。

2.2　缠绕复合材料刚度场函数

由于纤维走向交替、纤维波动等因素，在特征单元内部各点的刚度矩阵与点的位置有关。由图2，将特征单元内部的刚度矩阵作为(ξ,η)的函数

$$[\bar{Q}]=[\bar{Q}(\xi,\eta)]=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{12}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{16}(\xi,\eta)\\ \bar{Q}_{12}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{22}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{26}(\xi,\eta)\\ \bar{Q}_{16}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{26}(\xi,\eta) & \bar{Q}_{66}(\xi,\eta)\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中：(ξ,η)表示子层中某点的局部坐标。由于特征单元在缠绕方向上分布的周期性，$[\bar{Q}(\xi,\eta)]$各分量是周期函数，在 ξ 和 η 方向上的周期均为 L_{sc}。由式(2)，$[\bar{Q}(\xi,\eta)]$的傅里叶级数为

$$[\bar{Q}(\xi,\eta)]=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F([\bar{Q}(\xi,\eta)])\exp(\mathrm{i}p\omega\xi+\mathrm{i}q\omega\eta) \tag{4a}$$

$$F([\bar{Q}(\xi,\eta)])=\frac{1}{L_{sc}^2}\int_0^{L_{sc}}\int_0^{L_{sc}}[\bar{Q}(\xi,\eta)]\exp[-(\mathrm{i}p\omega\xi+\mathrm{i}q\omega\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4b}$$

其中：$F([\bar{Q}(\xi,\eta)])$是各阶展开项系数矩阵；$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；$\omega=2\pi/L_{sc}$；p、q 为整数。利用欧拉公式，式(4)可以进一步整理为实函数形式

$$[\bar{Q}(\xi,\eta)]=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}(F[\bar{Q}(\xi,\eta)])\cos(p\omega\xi+q\omega\eta)+\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}(F[\bar{Q}(\xi,\eta)]\sin(p\omega\xi+q\omega\eta) \tag{5}$$

其中：

$$\mathrm{Re}(F[\bar{Q}(\xi,\eta)])=\frac{1}{L_{sc}^2}\int_0^{L_{sc}}\int_0^{L_{sc}}[\bar{Q}(\xi,\eta)]\cos(p\omega\xi+q\omega\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6a}$$

$$\mathrm{Im}(F[\bar{Q}(\xi,\eta)])=\frac{1}{L_{sc}^2}\int_0^{L_{sc}}\int_0^{L_{sc}}[\bar{Q}(\xi,\eta)]\sin(p\omega\xi+q\omega\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6b}$$

为了计算式(6)中的积分，需要已知子层中各点整体坐标系下的刚度矩阵。由图2，纤维束与整体坐标系夹角为缠绕角$+\phi$或$-\phi$；由图3，波动段纤维束还存在偏转角 θ。对纤维束层合区域，单向纤维束刚度矩阵可以根据纤维束的工程常数计算。材料主方向的刚度矩阵为

$$[Q]=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix} \tag{7}$$

进而将其转换为整体坐标系下的刚度矩阵

$$[\bar{Q}]=[T]^{-1}[Q][[T]^{-1}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

其中，$[T]$是坐标转换矩阵

$$[T]=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & 2mn\\ n^2 & m^2 & -2mn\\ -mn & mn & m^2-n^2\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中：$m=\cos\phi$，$n=\sin\phi$ 或者 $m=\cos(-\phi)$，$n=\sin(-\phi)$。在波动区域内不仅要考虑缠绕角$+\phi$或$-\phi$，还要考虑偏转角 θ 的影响。波动段内刚度矩阵计算方法参见文献[11]。

刚度矩阵傅里叶级数各阶展开项是特征单元子层各点刚度得加权平均值，是对体积平均法的扩展；傅里叶级数展开式是将各阶加权平均值按一定规则叠加，可以模拟刚度矩阵各分量随坐标变化的情况，因此傅里叶级数展开既可以从整体上反映材料的刚度特性，又可以反映出材料内部纤维束波动和纤维走向交替，同时采用连续函数描述刚度矩阵

各分量的变化，便于进一步的数学处理。

3　算例分析

采用文献[8]中所给出的算例为参考，已知条件为：芯模直径 78 mm；纤维束宽 3.04 mm；厚度为 0.3 mm；纤维、树脂及纤维束的材料属性如表 1 所示；纤维体积含量 63%。

表 1　纤维、树脂和纤维束的弹性常数

Table 1　Elastic constant of fiber, epoxy resin and soaked tow

	Modulus/GPa			Poisson ratio	
	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}	ν_{21}
Fiber	73	73	30.93	0.18	0.18
Resin	5	5	1.85	0.35	0.35
Tow	47.34	15.34	5.78	0.24	0.08

采用 Matlab 语言编写了数值计算程序，对图 3 所示两个子层分别可以计算出其刚度场函数傅里叶级数展开式的各阶展开项系数矩阵。通过调整有关参数，分别计算几种不同缠绕角和不同特征单元尺寸下的结果。

表 2 给出了缠绕复合材料刚度场函数的 0 阶展开项计算出等效模量和泊松比，为了便于比较，表 2 中还给出了文献[8]中相应的计算结果。

由表 2 可以看出，本文计算值与文献值比较接近；等效弹性模量随着特征单元逐渐变小、逐渐下降，这是由于波动区域在特征单元中所占比例相对变大所造成的；对缠绕角较大的情况，特征单元大小对 E_y 的影响较大，如 A 所表示的缠绕角为 75° 的情况，E_y 约下降 22.5%，而 E_x 仅下降了 4.5%；对缠绕角较小的情况，特征单元大小对 E_x 的影响较大，如 C 所表示的缠绕角为 25°的情况，E_x 下降了 14.4%，而 E_y 仅下降了 4.9%，这些结论与文献[8]中的结论也是基本一致的。由此可见，刚度场函数的傅里叶级数展开式的 0 阶展开项可以反映材料宏观刚度特性以及细观结构对宏观刚度特性的影响。

傅里叶级数可以对材料的刚度场函数进行模拟从而反映出材料内部纤维分布的空间特征。以表 2 中 B.2 为例，缠绕角为 45°，根据有关参数计算可得特征单元边长 $L_{sc}=21.28$ mm，第一子层包含 $+\phi$ 方向(局部坐标 η 方向)纤维束 7 条，$-\phi$ 方向纤维束 6 条；第二子层与第一子层情况相反。展开至 10 阶的情况下，第一子层的刚度矩阵分量——$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$ 与 $\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$ 随坐标变化的曲面，如图 4 所示。由图 4(a)可见，$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$ 的曲面被“锯齿”带分成两块近似的“三角形”区域；在两块“三角形”区域内部，$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$ 符号相同，且基本为均匀分布；在“锯齿”带内 $\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$ 减小。由图 4(b)可见，$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$ 的

表 2　根据 0 阶展开项计算的弹性常数与文献[8]结果对比

Table 2　Elastic constant according 0-rank and the result of reference [8]

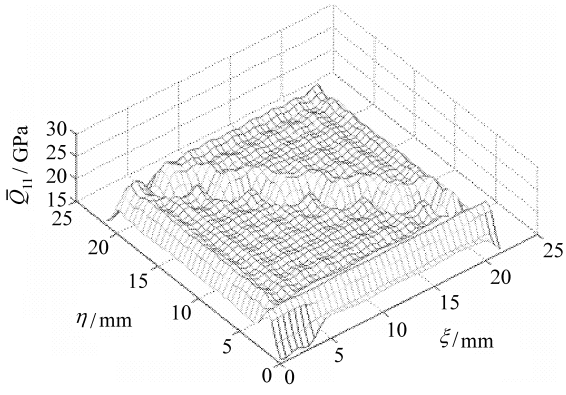
No.	E_x/GPa		E_y/GPa		G_{xy}/GPa		ν_{xy}	
	Pred	Ref	Pred	Ref	Pred	Ref	Pred	Ref
A.1	14.90	14.97	41.49	42.21	7.82	7.89	0.369	0.375
A.2	14.66	14.97	39.84	41.84	7.57	7.86	0.367	0.371
A.3	14.22	14.97	32.15	40.26	6.17	7.79	0.340	0.361
B.1	17.40	17.49	17.40	17.49	14.00	14.13	0.509	0.512
B.2	16.90	17.36	16.90	17.36	13.42	13.76	0.505	0.502
B.3	15.77	17.26	15.77	17.26	11.57	13.47	0.469	0.492
C.1	33.00	33.18	14.55	14.60	10.61	10.68	0.230	0.231
C.2	31.64	32.16	14.28	14.60	10.21	10.44	0.230	0.228
C.3	28.24	31.08	13.84	14.60	9.10	10.30	0.230	0.227

Note: Pred—Predicted, Ref—Reference.

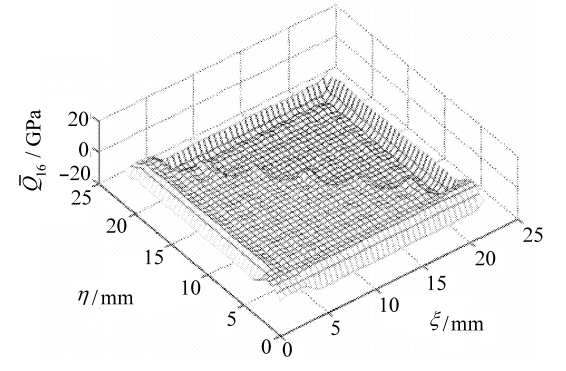
A—filament angle is 75°, B—filament angle is 45°, C—filament angle is 25°.

1—size of RVE is largest, 3—size of RVE is smallest, 2—size of RVE is between 1 and 3.

曲面也同样被分成两块“三角形”区域；在两块“三角形”区域内，$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$的符号刚好相反，也为均匀分布。在$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$和$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$两个刚度矩阵分量的曲面内，两块“三角形”区域对应着纤维层合区，$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$和$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$为均匀分布；由于两块层合区域纤维走向相反，此$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$在两块“三角形”区域内的符号相反。其它几个刚度分量$\bar{Q}_{22}(\xi,\eta)$、$\bar{Q}_{66}(\xi,\eta)$、$\bar{Q}_{12}(\xi,\eta)$随坐标变化的情况与$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$类似，而$\bar{Q}_{26}(\xi,\eta)$随坐标变化的情况与$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$类似。



(a) $\bar{Q}_{11}(\eta,\xi)$

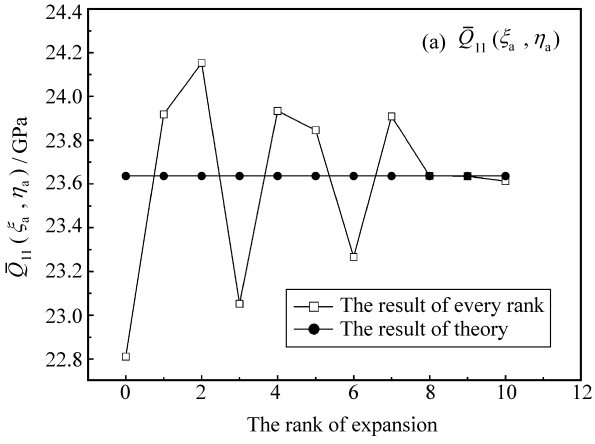


(b) $\bar{Q}_{16}(\eta,\xi)$

图 4　$\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$与$\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$随坐标变化的曲面

Fig. 4　The surface of $\bar{Q}_{11}(\xi,\eta)$ and $\bar{Q}_{16}(\xi,\eta)$

取$\xi_a=L_{sc}/3$，$\eta_a=L_{sc}/3$，刚度矩阵分量$\bar{Q}_{11}(\xi_a,\eta_a)$、$\bar{Q}_{16}(\xi_a,\eta_a)$随展开阶数的变化，如图 5 所示。图 5 中的理论值是根据该点所在位置，通过坐标转换计算得到的偏轴刚度分量。可以看出，$\bar{Q}_{11}(\xi_a,\eta_a)$和$\bar{Q}_{16}(\xi_a,\eta_a)$的计算值随展开阶数的增加逐渐振荡收敛于理论计算值。对其它刚度分量和其它位置的刚度矩阵做相同的分析也可以得到相同的结论，说明了展开阶数增加时，傅里叶级数的计算值逐渐趋于真实的刚度场。



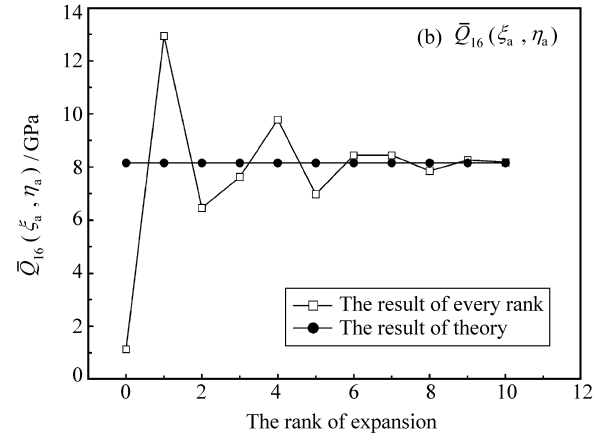


图 5　$\bar{Q}_{11}(\xi_a,\eta_a)$和$\bar{Q}_{16}(\xi_a,\eta_a)$随展开阶数变化曲线

Fig. 5　The variety of $\bar{Q}_{11}(\xi_a,\eta_a)$ and $\bar{Q}_{16}(\xi_a,\eta_a)$ with the rank of expansion

4　结　论

（1）根据对缠绕复合材料内部细观结构的分析，将缠绕复合材料刚度特性作为场量处理，采用傅里叶级数展开的方法模拟缠绕复合材料刚度场，推导了刚度特性计算的有关公式。

（2）对文献提供的算例进行分析，结果表明：傅里叶级数展开法可以有效模拟缠绕复合材料刚度场的特性。该方法不仅可以在整体上反映材料的刚度特性，而且可以进一步描述细观结构对缠绕复合材料刚度特性的影响。

（3）采用该方法进行缠绕复合材料刚度特性分析时，不需要复杂的建模工作。该方法易于实现，便于应用。

参考文献：

[1] Al-Khalil M F S, Soden P D. Theoretical through-thickness elastic constants for filament wound tubes [J]. Internal Journal Mechanical Science, 1994, 36(1): 49-62.

[2] Rousseau J, Perreux D, Verdière D. The influence of winding patterns on the damage behaviour of filament-wound pipes [J]. Composite Science and Technology, 1999, 59(9): 1439-1449.

[3] Morozov E V. The effect of filament-winding mosaic patterns on the strength of thin-walled composite shells [J]. Composite Structure, 2006, 76(1/2): 123-129.

[4] 徐　焜，许希武. 三维编织复合材料弹性性能数值预测及细观应力分析 [J]. 复合材料学报，2007，24(3)：178-185.
Xun Kun, Xu Xiwu. Prediction of elastic constant and simulation of stress field of 3D braided composite based on finite element method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2007, 24(3): 178-185.

[5] Lua James. Thermal-mechanical cell model for unbalanced plain weave woven fabric composites [J]. Composite Part A, 2007, 38(3): 1019-1037.

[6] 姜云鹏，岳珠峰，卢文书. 计入纤维交叉影响的缠绕复合材料等效模量计算方法 [J]. 燃气涡轮试验与研究，2005，18(3)：33-37.
Jiang Yunpeng, Yue Zhufeng, Lu Wenshu. Effect of fiber undulation zone on macro elastic modulus of fiber winding composite [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2005, 18(3): 33-37.

[7] 孙　江，肖　琪. 纤维缠绕复合材料纤维束形态的细观分析及弹性模量预测 [J]. 复合材料学报，2006，23(6)：192-199.
Sun Jiang, Xiao Qi. Elastic modulus prediction of filament winding composite based on meso-scale filament undulation property analysis [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2006, 23(6): 192-199.

[8] Zhou Chuwei, Xia Zihui, Yong Xiaoling. Micro mechanical model of filament wound composite pipe with damage analysis [C]// Proceedings of 2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2006: 1-8.

[9] Moulinec H, Suquet P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 157(1/2): 69-94.

[10] Kaβbohm Sven, Müller Wolfgan H, Feβler Robert. Fourier series for computing the response of periodic structure with arbitrary stiffness distribution [J]. Computational Materials Science, 2005, 32(1/2): 387-391.

[11] Naik N K, Ganesh V K. A analytical method for plain weave fabric composite [J]. Composite, 1995, 26(4): 281-289.