复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica
第 27 卷 第 1 期 2 月 2010 年
Vol. 27 No. 1 February 2010

文章编号：1000-3851(2010)01-0167-06

含界面相的单向纤维增强复合材料三维应力场的二重双尺度方法

唐绍锋，梁 军*，杜善义
（哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所，哈尔滨 150080）

摘 要： 提出了计算含界面相的单向纤维增强复合材料三维应力的二重双尺度方法。在性能预报方面，首先对界面相和纤维进行均匀化得到均匀化夹杂，然后对均匀化夹杂和基体进行均匀化得到宏观均匀材料；在应力场描述方面，从宏观均匀场出发，利用双尺度渐近展开技术经过两次应力场传递，依次得到单胞和应力集中区域的应力场。与有限元方法相结合，计算了宏观轴向均匀拉伸载荷条件下含界面相的单向纤维增强复合材料的三维应力场分布。数值结果表明在此载荷条件下最大应力发生在每根纤维的中截面内，靠近纤维与界面相的交界处。讨论了界面相性能对应力场分布的影响，结果显示纤维、界面相与基体力学性能的等差过渡有利于缓解纤维在界面附近的应力集中。

关键词： 二重双尺度方法；三维应力场；界面相；单向纤维增强复合材料；宏观性能；有限元方法
中图分类号： TB33；O343.7 **文献标志码：** A

Dual two-scale method for 3D stress computation of unidirectional-fibre reinforced composites considering interphase

TANG Shaofeng, LIANG Jun*, DU Shanyi
(Centre for Composite Materials and Structures, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A dual two-scale method was presented for computing 3D stress fields of unidirectional-fibre reinforced composites considering the interphase. In the prediction of properties, the homogenized inclusion was obtained by homogenizing the fibre and the interphase, and the macroscopic homogenized material was obtained by homogenizing the homogenized inclusion and the matrix. In the characterization of 3D stress fields, by twice stress transmissions, the stress fields of the unit cell and the stress concentration area were obtained in turn by the two-scale asymptotic technique. Combining with the finite element method, the 3D stress fields of the proposed composites, which are under the macroscopic axial uniform tensile load, were computed by the dual two-scale method. The numerical results show that the maximum stress occurs within the region which is in the middle section of each fibre and close to the border between fibre and interphase. The influence of different interphases on the distributions of stress fields was also discussed. The results show that arithmetical transition of the properties of fibre, interphase and matrix is beneficial to releasing stress concentration.

Keywords: dual two-scale method; 3D stress fields; interphase; unidirectional-fibre reinforced composites; macroscopic properties; finite element method (FEM)

在预报复合材料结构的响应规律方面，有限元方法是一个有效的计算工具。对于由夹杂与基体组成的复合材料结构，在单胞(即代表性体积元)内，夹杂的几何尺寸虽然小于单胞的几何尺寸，但与之在同一数量级之内。在这种情况下，可以采用结合有限元方法的双尺度渐近分析方法对复合材料进行有效性能的预报和力学场的刻画。这种方法是 20 世纪 70 年代 Lions[1]，Kesavan[2-3]等人在均匀化理论的基础上提出的。其基本思想是：材料性能的计算和预测沿着从细观到宏观这一过程，采用双尺度

收稿日期： 2008-12-29；**收修改稿日期：** 2009-04-01
基金项目： 国家自然科学基金(10772060)；黑龙江省杰出青年基金(JC-2006-13)
通讯作者： 梁 军，教授，博士生导师，研究方向：三维编织复合材料性能预报与失效分析，防热复合材料性能表征与评价
E-mail: liangj@hit.edu.cn

均匀化方法，由细观尺度下的单胞计算宏观尺度下材料的均匀化性能参数；而结构物理、力学行为的计算与预测则是由宏观平均场方程出发，从宏观到细观，利用双尺度渐近展开技术，计算出细观尺度下物理、力学量的局部涨落。在过去的10年中，双尺度分析方法取得了很多成果。崔俊芝和曹礼群[4]给出了线弹性问题的双尺度渐近展开式并在数学上证明了双尺度渐近解是收敛于真实解的。Song 和 Youn[5]采用双尺度分析方法预报了玻璃纤维平面织物的渗透张量；汪海滨和张卫红等[6]计算了考虑孔隙和微裂纹缺陷的平纹编织 C/C－SiC 复合材料的等效模量。Alzina 和 Toussaint 等[7-8]采用双尺度分析方法对复合材料的传热问题和热弹行为进行了研究。与传统有限元方法相比，采用双尺度渐近分析方法计算复合材料结构在一定工况下的响应规律，在保证计算精度的同时，计算规模大大减小，计算效率大大提高[9]。

但是当考虑含有界面相的单向纤维增强复合材料结构时，界面相的尺寸一般要比纤维尺寸小2个数量级，远远小于单胞尺寸，即使不考虑宏观结构而只在单胞内进行有限元计算，也会由于网格尺寸极为细小造成计算规模极度增大。因此，以现有的计算能力，要对在一定载荷条件下的含有界面相的单向纤维增强复合材料结构的响应进行三维数值模拟，即使采用双尺度渐近分析方法也是很难完成的。因此，本文作者基于双尺度渐近分析方法的基本思想，又考虑到界面相的小尺寸对计算规模的影响，提出了二重双尺度方法，用以计算一定载荷条件下含界面相的单向纤维增强复合材料的三维应力场分布。按照纤维＋界面相—均匀化夹杂—均匀化夹杂＋基体—宏观均匀化材料的过程，逐步预报材料有效性能；按照宏观均匀结构—单胞—应力集中区域的顺序，逐层分析力学场的分布状态，形成了一套完整的预报复合材料性能和刻画结构三维力学场分布的计算流程。在数值实验中，将二重双尺度方法与有限元方法相结合，计算了宏观轴向均匀拉伸载荷条件下单向纤维增强复合材料的三维应力场分布，并讨论了界面相性能对应力场分布的影响。

1　考虑复合材料界面相的二重双尺度方法

双尺度渐近分析方法包含1个均匀化过程和1个力学场传递过程(有关双尺度渐近分析方法基本理论的详细推导，参见文献[4])。均匀化过程中，均匀化刚度系数的表达式如下：

$$a_{ijhk}^{\mathrm{H}}=\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\left[a_{ijhk}^{\varepsilon}+a_{ija_1m}^{\varepsilon}\frac{\partial N_{hm}^{\alpha_1}(y)}{\partial y_k}\right]\mathrm{d}Y \tag{1}$$

力学场传递过程中，位移场的渐近展开形式如下：

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x)=\boldsymbol{u}(x,y)=\boldsymbol{u}^{0}(x)+\varepsilon\boldsymbol{N}^{\alpha_1}(y)\frac{\partial\boldsymbol{u}^{0}(x)}{\partial x_{\alpha_1}}+\varepsilon^{2}\boldsymbol{N}^{\alpha_1\alpha_2}(y)\frac{\partial^{2}\boldsymbol{u}^{0}(x)}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}}+\cdots \tag{2}$$

其中：x 是宏观尺度坐标，y 是细观尺度坐标，ε 是双尺度渐近分析方法中的摄动参数，有 $y=x/\varepsilon$；上标 H 表示均匀化(homogenization)；a_{ijhk}^{ε} 是组分材料的刚度系数；Y 表示细观单胞区域，$|Y|$ 是单胞体积；$\boldsymbol{u}$ 是位移矢量；$\boldsymbol{N}^{\alpha_1}(y)$ 是双尺度渐近分析方法中的一阶基函数，$\boldsymbol{N}^{\alpha_1\alpha_2}(y)$ 是二阶基函数，它们描述了复合材料细观单胞的结构和物理量的分布，与宏观结构形状和载荷无关。

相应地，应变 e_{ij}^{ε} 与应力 $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ 的表达式如下：

$$e_{ij}^{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(x)}{x_j}+\frac{\partial u_j^{\varepsilon}(x)}{x_i}\right),\ \sigma_{ij}^{\varepsilon}=a_{ijhk}^{\varepsilon}e_{hk}^{\varepsilon} \tag{3}$$

本文中提出的二重双尺度方法的主要思想是：(1) 将纤维与界面相复合，利用双尺度均匀化方法将纤维和界面相进行一次均匀化，得到均匀化夹杂；(2) 将均匀化夹杂与基体组成单胞，利用双尺度均匀化方法对单胞进行二次均匀化，得到宏观均匀化材料；(3) 由得到的宏观均匀化材料计算宏观均匀化力学场；(4) 由宏观力学场和单胞信息，利用双尺度渐近展开技术进行一次力学场传递，计算单胞(由均匀化夹杂和基体组成)内的力学场；(5) 分析单胞内应力场，确定应力集中区域；(6) 由单胞应力场和应力集中区域的具体构造(一般含纤维、界面相和基体)，进行二次应力场传递，计算应力集中区域的应力场。其计算流程见图1，整个计算过程包含2个均匀化过程和2个力学场传递过程，所以称为二重双尺度方法。

2　数值模拟与分析

2.1　宏观有效力学性能的预报

采用二重双尺度方法预报含界面相的单向硼纤维增强铝基复合材料(硼纤维体积含量 $V_{\mathrm{f}}=46\%$)的有效力学性能参数。各组分材料的力学性能参数见表1，其中界面相的性能介于纤维性能与基体性能之间。

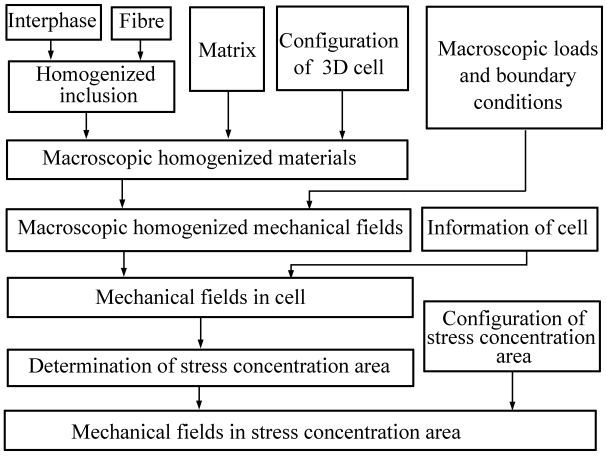


图 1　二重双尺度方法流程图

Fig. 1　Flowchart of dual two-scale method

表 1　单向硼纤维增强铝基复合材料的组分性能

Table 1　Properties of compositions of B/Al composite

	Matrix (Al)	Interphase	B fibre
Elastic modulus E/GPa	69	100	414
Poisson's ratio ν	0.33	0.26	0.20

首先将硼纤维与界面相复合，进行第 1 次均匀化，得到均匀化夹杂的有效刚度矩阵为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{I}}_{ijhk}=\begin{bmatrix}427.8 & 101.6 & 103.4 & 0 & 0 & 0\\ 101.6 & 427.8 & 103.4 & 0 & 0 & 0\\ 103.4 & 103.4 & 443.3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 160.0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 160.0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 163.1\end{bmatrix}\times 10^9 \tag{4}$$

将均匀化夹杂和基体复合，进行第 2 次均匀化，得到最终复合材料的宏观有效刚度矩阵为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}_{ijhk}=\begin{bmatrix}195.8 & 66.7 & 66.92 & 0 & 0 & 0\\ 66.7 & 195.8 & 66.92 & 0 & 0 & 0\\ 66.92 & 66.92 & 261.9 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 71.34 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 71.34 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61.76\end{bmatrix}\times 10^9 \tag{5}$$

由计算结果可见，宏观均匀材料为正交各向异性材料。对于正交各向异性材料，其柔度矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12}\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中各元素的下标 1、2、3 分别代表 2 个横向和 1 个纤维轴向。由式(6)和 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\cdot\boldsymbol{S}$，可以求得复合材料的各种宏观有效工程常数。将采用二重双尺度方法预报的复合材料的宏观有效力学性能参数与用细观力学有限元方法求得的参数[10]以及实验值[11]进行比较，见表 2。可见，二重双尺度方法求得的轴向弹性模量 E_3 和泊松比 ν_{31} 与实验值吻合较好。而横向弹性模量 E_1 与实验值有较大的差别，大于实验值。这是因为在二重双尺度计算时将硼纤维看作了各向同性材料(仅给了 2 个材料参数)，而实际上硼纤维的轴向模量要大于它的横向模量。

表 2　宏观力学性能参数的计算值与实验值

Table 2　Calculated and experimental values of macroscopic mechanical properties

	Dual two-scale method	Mesoscopic mechanical FEM[10]	Experimental values[11]
E_1/GPa	164.93	136	138
E_3/GPa	227.78	227	228
ν_{31}	0.2549	0.25	0.24

2.2　宏观轴向均匀拉伸载荷下的三维应力场计算

按照二重双尺度方法的计算流程，计算轴向均匀拉伸载荷下(见图 2，$f=100$ Pa)单向碳纤维增强树脂基复合材料结构的三维力学场分布，此算例中求得的数值结果是应力的二阶场。建模时，碳纤维直径 D 为 10 μm，界面层厚度 $t=0.1$ μm；单胞为 20 μm×20 μm×60 μm 的长方体，其中单胞在纤维轴向上的长度 $L=60$ μm，$t\ll L$；宏观复合材料结构是由 10×10×10 个单胞在空间周期性堆砌而成，碳纤维体积含量 $V_{\mathrm{f}}=20\%$。单向碳纤维增强树脂基复合材料各组分材料的性能参数见表 3。

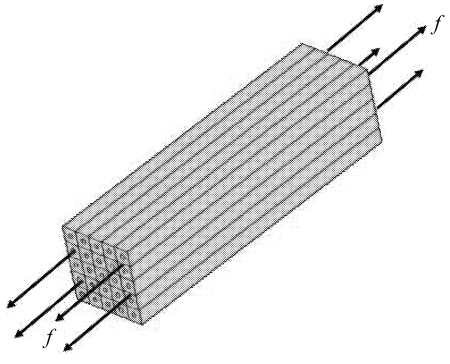


图 2　宏观轴向均匀拉伸载荷

Fig. 2　Macroscopic axial uniform tensile load

表 3　单向碳纤维增强树脂基复合材料各组分材料性能

Table 3　Properties of compositions of unidirectional C fibre reinforced composites

	Epoxy resin	Interphase	C fibre (T700)
Elastic modulus E/GPa	4	10	230
Poisson's ratio ν	0.35	0.30	0.26

首先将碳纤维与界面相复合，进行第 1 次均匀化，得到均匀化夹杂的有效刚度矩阵为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{I}}_{ijhk}=\begin{bmatrix}188.2 & 63.98 & 65.84 & 0 & 0 & 0\\ 63.98 & 188.2 & 65.84 & 0 & 0 & 0\\ 65.84 & 65.84 & 255.8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 64.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64.25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62.14\end{bmatrix}\times 10^9 \tag{7}$$

将均匀化夹杂和基体复合，进行第 2 次均匀化，得到的最终的宏观均匀材料的等效刚度矩阵为

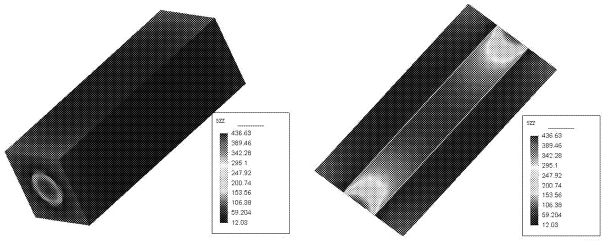
$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}_{ijhk}=\begin{bmatrix}10.71 & 4.619 & 4.862 & 0 & 0 & 0\\ 4.619 & 10.71 & 4.862 & 0 & 0 & 0\\ 4.862 & 4.862 & 52.22 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3.600 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.600 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.975\end{bmatrix}\times 10^9 \tag{8}$$

由计算结果可见，宏观均匀材料为正交各向异性，经过换算，其等效轴向模量为 49.1 GPa。

将宏观等效刚度代入宏观力学平衡方程，在轴向均匀拉伸载荷条件下，由有限元方法计算复合材料结构的宏观均匀力学场。在宏观轴向均匀拉伸载荷条件下，结构内各点除了轴向正应力外，其余各应力分量的值均相对较小。所以，轴向正应力是这种载荷条件下的主要应力形式。

然后将宏观均匀力学场和单胞信息(在第 2 次均匀化过程中确定)按照双尺度渐近展开思想合成单胞(由基体与均匀化夹杂组成)内力学场；并对单胞内力学场进行分析，确定发生最大应力的应力集中区域；最后，由单胞内力学场和对应的基函数信息(在第 1 次均匀化过程中确定)，利用双尺度渐近展开技术得到应力集中区域的力学场。单胞和应力集中区域的应力场分布结果见图 3 和图 4。

图 3 表示单胞内轴向正应力的分布。可看到单胞内，在均匀化夹杂区域(由碳纤维与界面相组成)，最大的轴向正应力发生在沿轴向的中截面内，



(a) 3D stress distribution in entire cell　　(b) Stress distribution on diagonal cross section of cell

图 3　单胞内轴向正应力分布

Fig. 3　Distributions of axial normal stress in cell

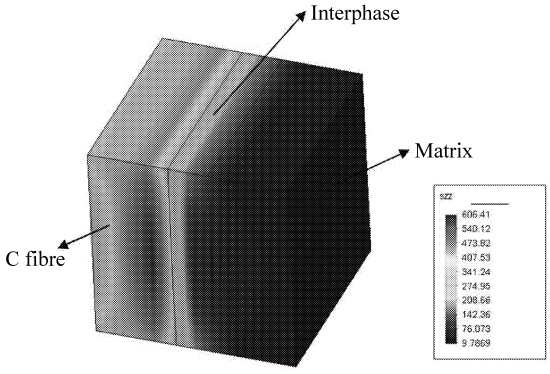


图 4　应力集中区域内轴向正应力分布

Fig. 4　Distribution of axial normal stress in stress concentration area

具体位置靠近均匀化夹杂与基体的交界处，其最大值为 436.63 Pa，有明显的应力集中；在基体区域，最大的轴向正应力发生在基体内靠近均匀化夹杂与基体的交界处，其最大值为 114 Pa，有少许的应力集中；因此取单胞内轴向的中截面靠近均匀化夹杂与基体的交界处的区域为应力集中区域。

图 4 表示了应力集中区域内轴向正应力的分布。在应力集中区域内，碳纤维内最大的轴向正应力为 606.41 Pa；界面相内最大的轴向正应力为 177 Pa；基体中最大的轴向正应力为 117 Pa。可见，碳纤维是主要的承载组分。在宏观轴向均匀拉伸载荷条件下，最大应力发生在每根纤维的中截面内，靠近纤维与界面的交界处。

二重双尺度方法可以实现含界面相在内的单向纤维增强复合材料结构在一定工况下的三维应力响应计算，确定各组分材料内的最大应力值及其所在位置。

2.3　界面相性能对应力场分布的影响

固定界面相的泊松比，令其弹性模量值在碳纤维的模量和树脂基体的模量之间变动，取表 4 中的

5 种情况；并分别对 5 种情况在相同宏观载荷条件下进行二重双尺度三维应力计算。

表 4 不同界面相的力学性能参数

Table 4 Mechanical properties of different interphases

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
Elastic modulus E/GPa	10	60	120	200	230
Poisson's ratio ν	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

图 5 显示了在相同载荷下具有不同弹性模量界面相的复合材料结构中 5 个特征点的应力值。其中对特征点做如下约定：碳纤维内最大应力值点记为 A 点，碳纤维与界面相交界处最大应力值点记为 B 点，界面相内最大应力值点记为 C 点，界面相与基体交界处最大应力值点记为 D 点，基体内最大应力值点记为 E 点。

由图 5 可见，只有碳纤维内最大应力值点 A 点和界面相内最大应力值点 C 点的应力值随着界面相弹性模量变化有比较明显的变化，其余特征点应力值的变化并不明显。需要说明的是，每条曲线的第 5 个数据对应于界面相性能与碳纤维性能相同的极端情况，这时相当于不含界面相而碳纤维体积含量增加的两相复合材料，所以这个数据有一个较大的跳跃。C 点的轴向正应力随着界面相弹性模量的增大而增大。A 点的轴向正应力随着界面相弹性模量的增大呈现先减小后增大的趋势：当界面相的弹性模量等于碳纤维与树脂基体弹性模量的算术平均值时，A 点的轴向正应力值最小，即应力集中程度相对较小。由此可以得出：碳纤维—界面相—树脂基体力学性能的等差过渡有利于缓解碳纤维在界面附近的应力集中。

3 结 论

(1) 提出了考虑界面相在内的单向纤维增强复合材料性能预报与力学场分析的二重双尺度方法，按照从低尺度到高尺度的顺序经过 2 个均匀化过程，逐步预报材料有效性能；按照从高尺度到低尺度的顺序经过 2 个力学场传递过程，逐层分析力学场的分布状态，形成了一套完备的预报复合材料性能和刻画结构三维力学场分布的计算流程。

(2) 通过数值实验讨论了界面相的力学性能对应力场分布的影响。当改变界面相模量时，最大应力值随着界面相弹性模量的增大呈现先减小后增大

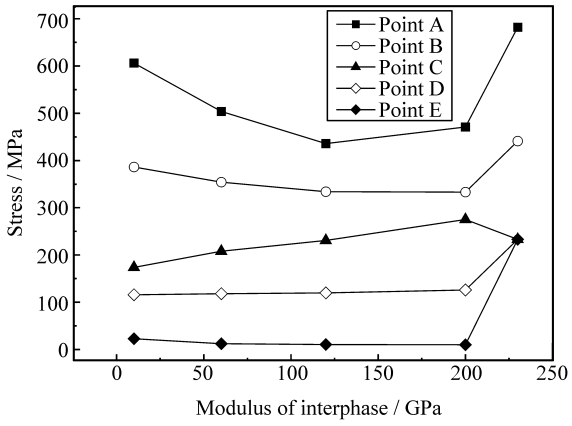


图 5 不同界面相模量的复合材料结构内 5 个特征点的轴向正应力

Fig. 5 Axial normal stress of 5 characteristic points in composite structures with different moduli of interphase

的趋势：当界面相的弹性模量等于纤维与基体弹性模量的算术平均值时，应力集中程度相对最小，即纤维—界面相—基体力学性能的等差过渡有利于缓解纤维在界面附近的应力集中。

(3) 将二重双尺度方法与有限元方法相结合，可以实现细观构型复杂(比如含界面相)的复合材料结构在一定工况下的三维应力计算。而一个全面(考虑到界面相)准确的应力场描述是进行材料破坏失效分析的基础。在此基础上，再对各组分材料分别选取合适的判断准则，就可以实现复合材料结构的破坏失效分析。

参考文献：

[1] Lions J L. Some methods in the mathematical analysis of systems and their control [M]. Beijing: Science Press, 1981.

[2] Kesavan S. Homogenization of elliptic eigenvalue problems Ⅰ [J]. Applied Mathematics and Optimization, 1979, 5(1): 153-167.

[3] Kesavan S. Homogenization of elliptic eigenvalue problems Ⅱ [J]. Applied Mathematics and Optimization, 1979, 5(1): 197-216.

[4] 崔俊芝，曹礼群. 基于双尺度渐近分析的有限元算法[J]. 计算数学，1998，20(1)：89-102.
Cui Junzhi, Cao Liqun. Finite element method based on two-scale asymptotic analysis [J]. Mathematica Numerica Sinica, 1998, 20(1): 89-102.

[5] Song Y S, Youn J R. Asymptotic expansion homogenization of permeability tensor for plain woven fabrics [J]. Composites Part A, 2006, 37(11): 2080-2087.

[6] 汪海滨，张卫红，杨军刚，等. 考虑孔隙和微裂纹缺陷的C/C-SiC编织复合材料等效模量计算[J]. 复合材料学报，2008，25(3)：182-189.
Wang Haibin, Zhang Weihong, Yang Jungang, et al. Numerical computing of effective modulus of woven C/C-SiC composites including porosities and micro-cracks [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(3): 182-189.

[7] Alzina A, Toussaint E, Beakou A, Skoczen B. Multiscale modeling of thermal conductivity in composite materials for cryogenic structures [J]. Composite Structures, 2006, 74(2): 175-185.

[8] Alzina A, Toussaint E, Beakou A. Multiscale modeling of the thermoelastic behavior of braided fabric composites for cryogenic structures [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(21): 6842-6859.

[9] Tang Shaofeng, Huang Fuhua, Liang Jun, Du Shanyi. Multi-scale analysis for thermo-elasticity properties of composite materials with small periodic configuration [J]. Key Engineering Materials, 2007, 334/335: 25-28.

[10] 雷有锋，魏德明，高德平. 细观力学有限元法预测复合材料宏观有效弹性模量[J]. 燃气涡轮试验与研究，2003，16(3)：11-15.
Lei Youfeng, Wei Deming, Gao Deping. Predicting macroscopic effective elastic moduli of composites by micro-mechanics FEM [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2003, 16(3): 11-15.

[11] Nakamura T, Suresh S. Effects of thermal residual stresses and fiber packing on deformation of metal matrix composites [J]. Acta Metallurgica Materialia, 1993, 41(6): 1665-1681.