复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第 26 卷 第 6 期 12 月 2009 年
Vol. 26 No. 6 December 2009

文章编号： 1000-3851(2009)06-0194-07

纤维增强复合材料轴对称界面端的奇异应力场

王效贵*，翁 琳，高增梁
（浙江工业大学 机械制造及自动化省部共建教育部重点实验室，杭州 310032）

摘 要： 提出了一种分析横观各向同性纤维增强复合材料轴对称界面端的奇异应力场的特征值法。基于横观各向同性弹性材料空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设，利用分离变量形式的位移函数和无网格算法，导出了关于应力奇异性指数和应力角函数的奇异性特征方程。对于纤维/基体轴对称界面端模型，特征值法给出的应力奇异性指数、相应的位移和应力角函数，与通过有限元分析得到的结果非常吻合。利用有限元计算得到的奇异应力场，结合特征值法给出的应力奇异性指数和应力角函数，通过线性外插得到了相应的应力强度系数。特征值法结合有限元分析，可以完全确定横观各向同性纤维增强复合材料轴对称界面端的奇异应力场。

关键词： 横观各向同性；轴对称界面端；应力奇异性；特征值法
中图分类号： TB332；O346.1 **文献标志码：** A

Singular stress field at axisymmetric interface wedge of fiber reinforced composite

WANG Xiaogui*，WENG Lin，GAO Zengliang
(Key Laboratory of Mechanical Manufacture and Automation，Ministry of Education，
Zhejiang University of Technology，Hangzhou 310032，China)

Abstract： An eigenvalue method was proposed to study the singular stress field at the axisymmetric interface wedge of the fiber reinforced composites. Based on the fundamental equations of the spacial axisymmetric problem of the transversely isotropic materials and the first-order approximation assumption，a discrete characteristic equation was derived by using the displacement functions with separated variables and the meshless method. The eigenvalue was related to the order of stress singularity，and the associated eigenvector was with respect to the stress angular variations. The fiber/matrix axisymmetric interface wedge model was used to verify the validity of the proposed eigenvalue method. The order of stress singularity，the associated displacement and stress angular variations obtained by this eigenvalue method are in good agreement with those by the finite element method(FEM). Based on the order of stress singularity and the associated stress angular variations determined by the eigenvalue analysis，as well as the numerical results of singular stress fields by FEM，the stress intensity coefficient was also obtained in terms of the linear extropolation. The singular stress field around the axisymmetric interface wedge can be completely determined by the developed eigenvalue method coupling with the FEM analysis.

Keywords： transverse isotropy；axisymmetric interface wedge；stress singularity；eigenvalue method

纤维和基体材料性能的不匹配引起的界面端应力奇异性[1-2]，对纤维增强复合材料的破坏产生很大影响。文献[3－4]基于界面端应力奇异性分析，对拔出、压入、微珠和段裂试验方法作了评估。戴瑛和嵇醒通过对界面端应力奇异性和界面应力分布规律的研究，指出界面端的应力奇异行为是建立界面脱粘判据的先决条件[5]。通常采用单根纤维及周围基体构成的空间轴对称套筒模型，对纤维增强复合材料界面端的奇异应力场进行理论研究。基于纤维和基体都是各向同性材料的假设，戴瑛等[6]采用逐步渐近法，对轴对称圆柱界面裂纹的应力奇异性做了近似分析；刘一华等从空间轴对称问题的通解出发，研究了轴对称界面端[7]和轴对称界面裂纹尖端[8]的应力奇异性，给出了奇异性特征方程和奇异应力场的解析形式。纤维增强复合材料中的增强纤维有的为各向同性，如玻璃纤维；也有很多为横观

收稿日期： 2008-11-24；**收修改稿日期：** 2009-03-10
基金项目： 浙江省钱江人才计划资助项目(QJD0702010)
通讯作者： 王效贵，博士，副教授，研究方向为界面力学 E-mail：hpcwxg@zjut.edu.cn

各向同性，如石墨纤维和硼纤维。为此，傅丽娟等[9]运用渐近展开法，导出了横观各向同性材料轴对称界面端的应力奇异性特征方程，并给出了纤维拔出和压入 2 种模型的应力奇异性指数的数值结果。文献[6－9]中的理论分析，忽略了纤维径向尺寸对于界面端应力奇异行为的影响，因而只能给出基于准一阶近似的奇异应力场。

Wang[10]提出了一种分析平面变形情况下双材料界面端奇异应力场的特征值法，可以准确地得到各阶应力奇异性指数以及相应的应力角函数，但是没有给出应力强度系数的确定方法。本文中借鉴文献[10]的思路，基于弹性力学空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设，利用分离变量形式的位移函数和无网格算法，提出了一种分析横观各向同性材料轴对称界面端的奇异应力场的特征值法。该方法不但能够准确得到奇异应力场的各阶应力奇异性指数和相应的位移、应力角函数，还能通过结合有限元分析得到的奇异应力场的数值解，确定相应的应力强度系数。

1 轴对称界面端模型的基本方程

纤维增强复合材料轴对称界面端模型如图 1 所示，基体为各向同性材料，纤维为横观各向同性材料。圆柱坐标系(ρ,ψ,z)的径向、环向和轴向坐标分别为 ρ、ψ 和 z，纤维的半径为 d(应力奇异点到轴对称轴 z 的距离)。横观各向同性材料的弹性主轴(1，2，3)与全局圆柱坐标系(ρ,ψ,z)的坐标轴的对应关系为：$1\to\rho$，$2\to\psi$ 和 $3\to z$，材料的弹性对称轴沿着轴对称轴 z。为了研究轴对称奇异点 O'附近的位移场和奇异应力场，作如下坐标变换：

$$\rho=r(\delta+\sin\theta),\ z=r\cos\theta,\ \psi=\psi. \tag{1}$$

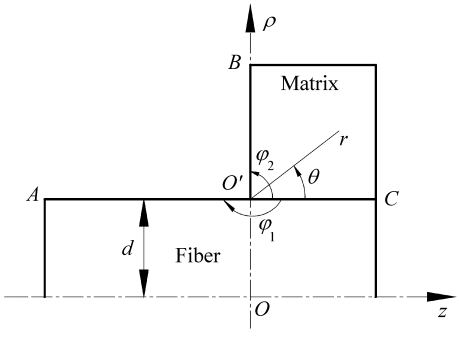

图 1 轴对称界面端

Fig. 1 Axisymmetric interface wedge

式中：$\delta=d/r$ 是一个无量纲参数，表示纤维半径与轴对称界面端的应力奇异性支配区域大小的相对比值。在新坐标系(r,ψ,θ)下，纤维占据的区域可用环向坐标 θ 表示为$-180°\leqslant\theta\leqslant0°$，基体占据的区域为 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$。

双材料界面 $O'C$ 上的位移和表面力的连续条件为

$$\begin{aligned}&u_{r,1}(r,\varphi_0)=u_{r,2}(r,\varphi_0),\\&u_{\theta,1}(r,\varphi_0)=u_{\theta,2}(r,\varphi_0),\\&\sigma_{\theta,1}(r,\varphi_0)=\sigma_{\theta,2}(r,\varphi_0),\\&\sigma_{r\theta,1}(r,\varphi_0)=\sigma_{r\theta,2}(r,\varphi_0).\end{aligned} \tag{2}$$

材料区域边界 $O'A$ 和$O'B$ 上的自由表面条件为

$$\begin{aligned}&\sigma_{\theta,1}(r,\varphi_1)=\sigma_{r\theta,1}(r,\varphi_1)=0,\\&\sigma_{\theta,2}(r,\varphi_2)=\sigma_{r\theta,2}(r,\varphi_2)=0.\end{aligned} \tag{3}$$

式中：下标中逗号后面的 1 和 2 分别表示纤维和基体；界面角为 $\varphi_0=0°$；纤维的结合角为 $\varphi_1=-180°$；基体的结合角为 $\varphi_2=90°$。

新坐标系(r,ψ,θ)下，横观各向同性材料的本构方程可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_\xi=&\left[a_\xi^r(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(b_\xi^r(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+c_\xi^r(\theta)\right)\right]u_r\\&+\left[a_\xi^\theta(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(b_\xi^\theta(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+c_\xi^\theta(\theta)\right)\right]u_\theta\\&(\xi=r,\theta,\psi,r\theta)\end{aligned} \tag{4}$$

式中：

$$a_r^r(\theta)=\lambda_{11}\sin^4\theta+\lambda_{33}\cos^4\theta+2\lambda_{13}\sin^2\theta\cos^2\theta+\lambda_{44}\sin^2 2\theta,$$

$$a_r^\theta(\theta)=b_r^r(\theta)=a_{r\theta}^r(\theta)=(\lambda_{11}-\lambda_{13})\sin^3\theta\cos\theta+(\lambda_{13}-\lambda_{33})\sin\theta\cos^3\theta+\lambda_{44}\sin2\theta\cos2\theta,$$

$$b_r^\theta(\theta)=a_\theta^r(\theta)=\lambda_{13}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+(\lambda_{11}+\lambda_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta-\lambda_{44}\sin^2 2\theta,$$

$$c_r^r(\theta)=b_r^\theta(\theta)+\lambda_{13}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}+\lambda_{12}\frac{\sin^3\theta}{\delta+\sin\theta},$$

$$c_r^\theta(\theta)=-a_r^\theta(\theta)+\lambda_{13}\frac{\cos^3\theta}{\delta+\sin\theta}+\lambda_{12}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$

$$a_\theta^\theta(\theta)=b_\theta^r(\theta)=b_{r\theta}^\theta(\theta)=(\lambda_{13}-\lambda_{33})\sin^3\theta\cos\theta+(\lambda_{11}-\lambda_{13})\sin\theta\cos^3\theta-\lambda_{44}\sin2\theta\cos2\theta,$$

$$b_\theta^\theta(\theta)=\lambda_{33}\sin^4\theta+\lambda_{11}\cos^4\theta+2\lambda_{13}\sin^2\theta\cos^2\theta+\lambda_{44}\sin^2 2\theta,$$

$$c_\theta^r(\theta)=b_\theta^\theta(\theta)+\lambda_{13}\frac{\sin^3\theta}{\delta+\sin\theta}+\lambda_{12}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta},$$

$$c_\theta^\theta=-a_\theta^\theta(\theta)+\lambda_{13}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta}+\lambda_{12}\frac{\cos^3\theta}{\delta+\sin\theta},$$

$$a_\psi^r(\theta)=\lambda_{12}\sin^2\theta+\lambda_{13}\cos^2\theta,$$

$$a_{\psi}^{\theta}(\theta)=b_{\psi}^{r}(\theta)=(\lambda_{12}-\lambda_{13})\sin\theta\cos\theta,$$
$$b_{\psi}^{\theta}(\theta)=\lambda_{13}\sin^2\theta+\lambda_{12}\cos^2\theta,$$
$$c_{\psi}^{r}(\theta)=b_{\psi}^{\theta}(\theta)+\lambda_{11}\frac{\sin\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$c_{\psi}^{\theta}(\theta)=-a_{\psi}^{\theta}(\theta)+\lambda_{11}\frac{\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$a_{r\theta}^{\theta}(\theta)=b_{r\theta}^{r}(\theta)=(\lambda_{33}+\lambda_{11}-2\lambda_{13})\sin^2\theta\cos^2\theta+\lambda_{44}\cos^2 2\theta,$$
$$c_{r\theta}^{r}(\theta)=b_{r\theta}^{\theta}(\theta)+(\lambda_{12}-\lambda_{13})\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$c_{r\theta}^{\theta}(\theta)=-a_{r\theta}^{\theta}(\theta)+(\lambda_{12}-\lambda_{13})\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}. \tag{5}$$

系数 $a_{\xi}^{t}(\theta)$、$b_{\xi}^{t}(\theta)$ 和 $c_{\xi}^{t}(\theta)$ 只与弹性材料常数 λ_{ij} 和角坐标 θ 有关，其中上标 $t=r,\theta$。径向 ρ 和轴向 z 的平衡方程为

$$\begin{aligned}&\Big[d_{\zeta}^{r}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\Big(e_{\zeta}^{r}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+f_{\zeta}^{r}(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\Big)\\&+\frac{1}{r^2}\Big(g_{\zeta}^{r}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_{\zeta}^{r}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+l_{\zeta}^{r}(\theta)\Big)\Big]u_r\\&+\Big[d_{\zeta}^{\theta}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\Big(e_{\zeta}^{\theta}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+f_{\zeta}^{\theta}(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\Big)\\&+\frac{1}{r^2}\Big(g_{\zeta}^{\theta}(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_{\zeta}^{\theta}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+l_{\zeta}^{\theta}(\theta)\Big)\Big]u_{\theta}=0\\&\qquad(\zeta=\rho,z)\end{aligned} \tag{6}$$

其中：

$$d_{\rho}^{r}(\theta)=\lambda_{11}\sin^3\theta+(2\lambda_{44}+\lambda_{13})\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$d_{\rho}^{\theta}(\theta)=(\lambda_{11}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+\lambda_{44}\cos^3\theta,$$
$$e_{\rho}^{r}(\theta)=(2\lambda_{11}-3\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+(\lambda_{13}+\lambda_{44})\cos^3\theta,$$
$$e_{\rho}^{\theta}(\theta)=(\lambda_{13}+\lambda_{44})\sin^3\theta+(2\lambda_{11}-3\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$f_{\rho}^{r}(\theta)=(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\sin^3\theta+(3\lambda_{11}-4\lambda_{44}-2\lambda_{13})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\lambda_{11}\frac{\sin^2\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$f_{\rho}^{\theta}(\theta)=(2\lambda_{13}+5\lambda_{44}-2\lambda_{11})\sin^2\theta\cos\theta+(\lambda_{11}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\cos^3\theta+\lambda_{11}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$g_{\rho}^{r}(\theta)=\lambda_{44}\sin^3\theta+(\lambda_{11}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$g_{\rho}^{\theta}(\theta)=(2\lambda_{44}+\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+\lambda_{11}\cos^3\theta,$$
$$h_{\rho}^{r}(\theta)=(3\lambda_{13}+7\lambda_{44}-2\lambda_{11})\sin^2\theta\cos\theta+(2\lambda_{11}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\cos^3\theta+\lambda_{11}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$h_{\rho}^{\theta}(\theta)=-(\lambda_{13}+3\lambda_{44})\sin^3\theta-(4\lambda_{11}-5\lambda_{44}-3\lambda_{13})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\lambda_{11}\frac{\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$l_{\rho}^{r}(\theta)=-(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\sin^3\theta-(3\lambda_{11}-4\lambda_{44}-2\lambda_{13})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\lambda_{11}\Big(\frac{\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{(\delta+\sin\theta)^2}\Big),$$
$$l_{\rho}^{\theta}(\theta)=(2\lambda_{11}-2\lambda_{13}-5\lambda_{44})\sin^2\theta\cos\theta+(\lambda_{44}+\lambda_{13}-\lambda_{11})\cos^3\theta-\lambda_{11}\Big(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{(\delta+\sin\theta)^2}\Big),$$
$$d_{z}^{r}(\theta)=(2\lambda_{44}+c_{13})\sin^2\theta\cos\theta+c_{33}\cos^3\theta,$$
$$d_{z}^{\theta}(\theta)=-\lambda_{44}\sin^3\theta+(\lambda_{44}+\lambda_{13}-\lambda_{33})\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$e_{z}^{r}(\theta)=-(\lambda_{13}+\lambda_{44})\sin^3\theta+(3\lambda_{44}+\lambda_{13}-2\lambda_{33})\cdot\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$e_{z}^{\theta}(\theta)=(2\lambda_{33}-3\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+(\lambda_{13}+\lambda_{44})\cos^3\theta,$$
$$f_{z}^{r}(\theta)=(3\lambda_{33}-4\lambda_{44}-2\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\cdot\cos^3\theta+(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$f_{z}^{\theta}(\theta)=(\lambda_{13}+\lambda_{44}-\lambda_{33})\sin^3\theta+(2\lambda_{33}-5\lambda_{44}-2\lambda_{13})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\frac{\lambda_{44}\cos2\theta+\lambda_{13}\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$g_{z}^{r}(\theta)=(\lambda_{33}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin^2\theta\cos\theta+\lambda_{44}\cos^3\theta,$$
$$g_{z}^{\theta}(\theta)=-\lambda_{33}\sin^3\theta-(2\lambda_{44}+\lambda_{13})\sin\theta\cos^2\theta,$$
$$h_{z}^{r}(\theta)=(\lambda_{13}+\lambda_{44}-2\lambda_{33})\sin^3\theta+(2\lambda_{33}-7\lambda_{44}-3\lambda_{13})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\frac{\lambda_{44}\cos2\theta-\lambda_{13}\sin^2\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$h_{z}^{\theta}(\theta)=(5\lambda_{44}+3\lambda_{13}-4\lambda_{33})\sin^2\theta\cos\theta-(\lambda_{13}+3\lambda_{44})\cdot\cos^3\theta-(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$l_{z}^{r}(\theta)=(4\lambda_{44}+2\lambda_{13}-3\lambda_{33})\sin^2\theta\cos\theta-(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\cdot\cos^3\theta-(\lambda_{13}+2\lambda_{44})\frac{\sin\theta\cos\theta}{\delta+\sin\theta},$$
$$l_{z}^{\theta}(\theta)=(\lambda_{33}-\lambda_{44}-\lambda_{13})\sin^3\theta+(5\lambda_{44}+2\lambda_{13}-2\lambda_{33})\cdot\sin\theta\cos^2\theta+\frac{\lambda_{13}\sin^2\theta-\lambda_{44}\cos2\theta}{\delta+\sin\theta}. \tag{7}$$

基于一阶近似假设，轴对称奇异点 O' 附近的位移场可表示为如下变量分离的级数形式：

$$u_r(r,\theta)=r^s\Lambda_r(\theta),$$
$$u_{\theta}(r,\theta)=r^s\Lambda_{\theta}(\theta). \tag{8}$$

式中：s 是奇异特征值；$\Lambda_r(\theta)$ 和 $\Lambda_{\theta}(\theta)$ 分别表示 r 向和 θ 向的位移角函数。将式(8)代入本构方程式(4)，应力分量则可写成如下变量分离的形式：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r(\theta)\\\sigma_{\theta}(\theta)\\\sigma_{\psi}(\theta)\\\sigma_{r\theta}(\theta)\end{Bmatrix}=r^{s-1}\begin{Bmatrix}\Sigma_r(\theta)\\\Sigma_{\theta}(\theta)\\\Sigma_{\psi}(\theta)\\\Sigma_{r\theta}(\theta)\end{Bmatrix} \tag{9}$$

其中，应力角函数为

$$\begin{Bmatrix}\Sigma_r(\theta)\\ \Sigma_\theta(\theta)\\ \Sigma_\psi(\theta)\\ \Sigma_{r\theta}(\theta)\end{Bmatrix}=\left(s\begin{bmatrix}a_r^r(\theta) & a_r^\theta(\theta)\\ a_\theta^r(\theta) & a_\theta^\theta(\theta)\\ a_\psi^r(\theta) & a_\psi^\theta(\theta)\\ a_{r\theta}^r(\theta) & a_{r\theta}^\theta(\theta)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_r^r(\theta) & b_r^\theta(\theta)\\ b_\theta^r(\theta) & b_\theta^\theta(\theta)\\ b_\psi^r(\theta) & b_\psi^\theta(\theta)\\ b_{r\theta}^r(\theta) & b_{r\theta}^\theta(\theta)\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}c_r^r(\theta) & c_r^\theta(\theta)\\ c_\theta^r(\theta) & c_\theta^\theta(\theta)\\ c_\psi^r(\theta) & c_\psi^\theta(\theta)\\ c_{r\theta}^r(\theta) & c_{r\theta}^\theta(\theta)\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Lambda_r(\theta)\\ \Lambda_\theta(\theta)\end{Bmatrix} \tag{10}$$

联立式(2)、式(3)、式(8)和式(9)，可以得到用位移以及应力角函数表示的界面连续条件

$$\Lambda_{r,1}(\varphi_0)=\Lambda_{r,2}(\varphi_0),$$
$$\Lambda_{\theta,1}(\varphi_0)=\Lambda_{\theta,2}(\varphi_0),$$
$$\Sigma_{\theta,1}(\varphi_0)=\Sigma_{\theta,2}(\varphi_0),$$
$$\Sigma_{r\theta,1}(\varphi_0)=\Sigma_{r\theta,2}(\varphi_0). \tag{11}$$

和自由表面边界条件

$$\Sigma_{\theta,1}(\varphi_1)=\Sigma_{r\theta,1}(\varphi_1)=0,$$
$$\Sigma_{\theta,2}(\varphi_2)=\Sigma_{r\theta,2}(\varphi_2)=0. \tag{12}$$

将分离变量形式的位移函数(8)代入平衡方程(6)，并消除公因子 r^{s-2}，可得

$$\left(s^2\begin{bmatrix}d_\rho^r(\theta) & d_\rho^\theta(\theta)\\ d_z^r(\theta) & d_z^\theta(\theta)\end{bmatrix}+\right.$$

$$s\begin{bmatrix}f_\rho^r(\theta)-d_\rho^r(\theta)+e_\rho^r(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} & f_\rho^\theta(\theta)-d_\rho^\theta(\theta)+e_\rho^\theta(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ f_z^r(\theta)-d_z^r(\theta)+e_z^r(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} & f_z^\theta(\theta)-d_z^\theta(\theta)+e_z^\theta(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

$$\left.+\begin{bmatrix}g_\rho^r(\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_\rho^r(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}+l_\rho^r(\theta) & g_\rho^\theta(\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_\rho^\theta(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}+l_\rho^\theta(\theta)\\ g_z^r(\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_z^r(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}+l_z^r(\theta) & g_z^\theta(\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+h_z^\theta(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}+l_z^\theta(\theta)\end{bmatrix}\right)$$

$$\cdot\begin{Bmatrix}\Lambda_r(\theta)\\ \Lambda_\theta(\theta)\end{Bmatrix}=0 \tag{13}$$

降阶后的界面连续条件(11)、边界条件(12)和平衡方程(13)，构成了一个与角变量 θ 以及奇异特征值 s 有关的一维边值问题。

2 特征值法

上述一维边值问题，可以采用无网格法进行数值求解[11]。无网格法离散双材料轴对称界面端模型时，每种材料占据的区域具有各自独立的离散节点分布。位于双材料界面上的坐标相同的节点对，由于分属于不同的离散节点分布，因而插值函数不同。位移角函数及其导数的无网格近似形式为[10]

$$\Lambda_{t,k}(\theta_i)=\sum_{j=1}^{n_k}N_{j,k}(\theta_i)\cdot\Lambda_{t,k}^j,$$
$$\left.\frac{\partial\Lambda_{t,k}(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_i}=\sum_{j=1}^{n_k}N'_{j,k}(\theta_i)\cdot\Lambda_{t,k}^j,$$
$$\left.\frac{\partial^2\Lambda_{t,k}(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_i}=\sum_{j=1}^{n_k}N''_{j,k}(\theta_i)\cdot\Lambda_{t,k}^j,$$
$$i=1,2,\cdots,n_k. \tag{14}$$

式中：n_k 表示材料所属区域 k 内的离散节点个数；$\Lambda_{t,k}^j$ 表示区域 k 的第 j 个离散节点的未知节点位移角函数；$N_{j,k}(\theta_i)$ 表示核函数的中心固定于 θ_i 且相应于区域 k 的第 j 个离散节点的插值函数，$N'_{j,k}(\theta_i)$ 和 $N''_{j,k}(\theta_i)$ 分别表示插值函数的一阶和二阶导数。

将式(14)应用于降阶形式的平衡微分方程(13)，可得

$$\left(s^2\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}_{\rho,1}^r & \boldsymbol{A}_{\rho,1}^\theta & 0 & 0\\ \boldsymbol{A}_{z,1}^r & \boldsymbol{A}_{z,1}^\theta & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{\rho,2}^r & \boldsymbol{A}_{\rho,2}^\theta\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{z,2}^r & \boldsymbol{A}_{z,2}^\theta\end{array}\right]+s\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{B}_{\rho,1}^r & \boldsymbol{B}_{\rho,1}^\theta & 0 & 0\\ \boldsymbol{B}_{z,1}^r & \boldsymbol{B}_{z,1}^\theta & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \boldsymbol{B}_{\rho,2}^r & \boldsymbol{B}_{\rho,2}^\theta\\ 0 & 0 & \boldsymbol{B}_{z,2}^r & \boldsymbol{B}_{z,2}^\theta\end{array}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{C}_{\rho,1}^r & \boldsymbol{C}_{\rho,1}^\theta & 0 & 0\\ \boldsymbol{C}_{z,1}^r & \boldsymbol{C}_{z,1}^\theta & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \boldsymbol{C}_{\rho,2}^r & \boldsymbol{C}_{\rho,2}^\theta\\ 0 & 0 & \boldsymbol{C}_{z,2}^r & \boldsymbol{C}_{z,2}^\theta\end{array}\right]\right)\cdot\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{r,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{r,2}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2}\end{Bmatrix}=0 \tag{15}$$

其中：

$$[\boldsymbol{A}_{\zeta,k}^t]_{ij}=d_\zeta^t(\theta_i)N_{j,k}(\theta_i),$$
$$[\boldsymbol{B}_{\zeta,k}^t]_{ij}=[f_\zeta^t(\theta_i)-d_\zeta^t(\theta_i)]N_{j,k}(\theta_i)+e_\zeta^t(\theta_i)N'_{j,k}(\theta_i),$$
$$[\boldsymbol{C}_{\zeta,k}^t]_{ij}=g_\zeta^t(\theta_i)N''_{j,k}(\theta_i)+h_\zeta^t(\theta_i)N'_{j,k}(\theta_i)+l_\zeta^t(\theta_i)N_{j,k}(\theta_i). \tag{16}$$

符号 $\boldsymbol{\Lambda}_{t,k}$ 表示 n_k 阶未知的节点位移角函数列向量。同样，可得无网格近似的界面连续条件

$$s\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline \boldsymbol{\eta}_{\theta,1}^r(\varphi_0) & \boldsymbol{\eta}_{\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\boldsymbol{\eta}_{\theta,2}^r(\varphi_0) & -\boldsymbol{\eta}_{\theta,2}^\theta(\varphi_0)\\ \boldsymbol{\eta}_{r\theta,1}^r(\varphi_0) & \boldsymbol{\eta}_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\boldsymbol{\eta}_{r\theta,2}^r(\varphi_0) & -\boldsymbol{\eta}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0)\end{array}\right]\cdot\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{r,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{r,2}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2}\end{Bmatrix}$$

$$+\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{N}_{,1}(\varphi_0) & 0 & -\boldsymbol{N}_{,2}(\varphi_0) & 0\\ 0 & \boldsymbol{N}_{,1}(\varphi_0) & 0 & -\boldsymbol{N}_{,2}(\varphi_0)\\ \hdashline \boldsymbol{\chi}_{\theta,1}^r(\varphi_0) & \boldsymbol{\chi}_{\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\boldsymbol{\chi}_{\theta,2}^r(\varphi_0) & -\boldsymbol{\chi}_{\theta,2}^\theta(\varphi_0)\\ \boldsymbol{\chi}_{r\theta,1}^r(\varphi_0) & \boldsymbol{\chi}_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\boldsymbol{\chi}_{r\theta,2}^r(\varphi_0) & -\boldsymbol{\chi}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0)\end{array}\right]\cdot\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{r,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{r,2}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2}\end{Bmatrix}=0 \tag{17}$$

和自由表面条件

$$s\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{r}_{\theta,1}(\varphi_1) & \boldsymbol{\eta}^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\eta}^{r}_{r\theta,1}(\varphi_1) & \boldsymbol{\eta}^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\eta}^{r}_{\theta,2}(\varphi_2) & \boldsymbol{\eta}^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\eta}^{r}_{r\theta,2}(\varphi_2) & \boldsymbol{\eta}^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_2) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{r,1} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{r,2} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2} \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}^{r}_{\theta,1}(\varphi_1) & \boldsymbol{\chi}^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\chi}^{r}_{r\theta,1}(\varphi_1) & \boldsymbol{\chi}^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\chi}^{r}_{\theta,2}(\varphi_2) & \boldsymbol{\chi}^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\chi}^{r}_{r\theta,2}(\varphi_2) & \boldsymbol{\chi}^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_2) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{r,1} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{r,2} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2} \end{Bmatrix}=0 \tag{18}$$

其中：

$$[\boldsymbol{N}_{,k}(\varphi_0)]_j=N_{j,k}(\varphi_0),$$
$$[\boldsymbol{\eta}^{t}_{\zeta,k}(\varphi_i)]_j=a^{t}_{\zeta,k}(\varphi_i)N_{j,k}(\varphi_i),$$
$$[\boldsymbol{\chi}^{t}_{\zeta,k}(\varphi_i)]_j=b^{t}_{\zeta,k}(\varphi_i)N'_{j,k}(\varphi_i)+c^{t}_{\zeta,k}(\varphi_i)N_{j,k}(\varphi_i). \tag{19}$$

式(16)和式(19)中：下标 ζ 对应于 ρ 和 z 向的平衡方程；下标 ξ 对应于 θ 和 $r\theta$ 向的应力角函数；上标 t 对应于 r 和 θ 向的位移角函数；下标 k 对应于材料 1 和 2。

位于双材料界面 $O'C$ 上的离散节点，需要同时满足位移和表面力的连续条件(17)；坐落于自由表面 $O'A$ 和 $O'B$ 上的离散节点，需要满足自由边界条件(18)；其余的所有离散节点，则需满足平衡方程(15)。用边界条件(17)和(18)依次替换方程(15)中的对应行，原始矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 相应地改写为 $\hat{\boldsymbol{A}}$、$\hat{\boldsymbol{B}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 可得关于奇异特征值 s 的非线性特征方程

$$(\hat{\boldsymbol{A}}s^2+\hat{\boldsymbol{B}}s+\hat{\boldsymbol{C}})\cdot\boldsymbol{x}=0 \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{x}=\{(\boldsymbol{\Lambda}_{r,1})^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\Lambda}_{\theta,1})^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\Lambda}_{r,2})^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\Lambda}_{\theta,2})^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$。转化为关于 $\omega=s^{-1}$ 的标准特征方程

$$\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\hat{\boldsymbol{C}}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}} & -\hat{\boldsymbol{C}}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \omega\boldsymbol{x} \end{Bmatrix}=\omega\cdot\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \omega\boldsymbol{x} \end{Bmatrix} \tag{21}$$

数值求解奇异性特征方程(21)，可以得到应力奇异性指数$(1-s)$以及相应的位移角函数，进而通过式(10)可得到应力角函数。

3　算　例

基于一阶近似的轴对称界面端的奇异应力场可写为[12]

$$\sigma_\xi(r,\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}r^{s_\nu-1}\cdot K_\nu\cdot\Sigma^{\nu}_{\xi}(\theta) \tag{22}$$

其中：n 表示应力奇异性的总个数；$(1-s_\nu)$表示应力奇异性指数；K_ν 和 $\Sigma^{\nu}_{\xi}(\theta)$ 分别表示相应于 s_ν 的应力强度系数和应力角函数。若上述各个参量已知，奇异应力场就可以完全确定。

采用特征值法，分析图 2 所示的纤维拔出模型轴对称界面端 O' 的奇异应力场。各向同性环氧树脂基体的材料常数为[9]：$\lambda_{11}=\lambda_{33}=3.0$ GPa，$\lambda_{12}=\lambda_{13}=1.8$ GPa，$\lambda_{44}=0.6$ GPa；横观各向同性碳纤维的材料常数为[9]：$\lambda_{11}=21.5$ GPa，$\lambda_{12}=5.5$ GPa，$\lambda_{13}=5.4$ GPa，$\lambda_{33}=202.2$ GPa，$\lambda_{44}=30.0$ GPa。轴对称界面端模型的无网格节点分布(如图 3 所示)，由分别隶属于基体(实点)和纤维(空心圆)的 2 个各自独立的节点分布组成，离散节点在 2 个区域内都是均匀分布的。纤维区域内共划分 97 个离散节点，基体区域有 49 个离散节点。特征值法的计算结果表明：轴对称界面端的奇异应力场只有单个实数应力奇异性，大小为 $1-s=0.349$。由与奇异性特征值相应的特征向量，得到了归一化的位移和应力角函数，分别如图 4 和图 5 所示。图中，FEM 表示有限元结果，Eigenvalue 表示由特征值法得到的结果。

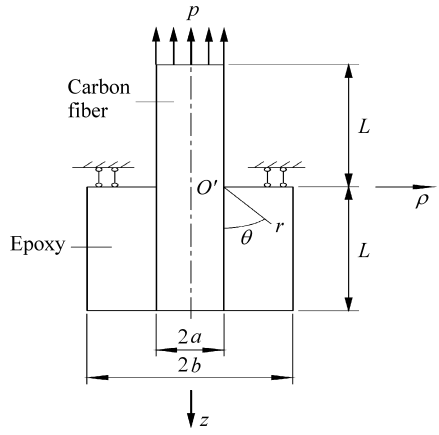

图 2　纤维拔出模型

Fig. 2　Analytical model of fiber pull-out

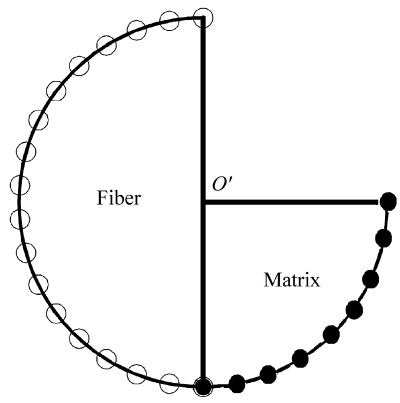

图 3　无网格节点分布示意图

Fig. 3　Distribution of the meshless scattered points

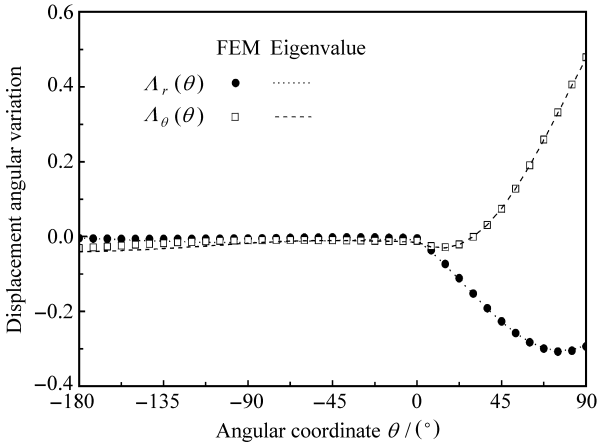

图 4　归一化的位移角函数分布图

Fig. 4　Normalized displacement angular variations

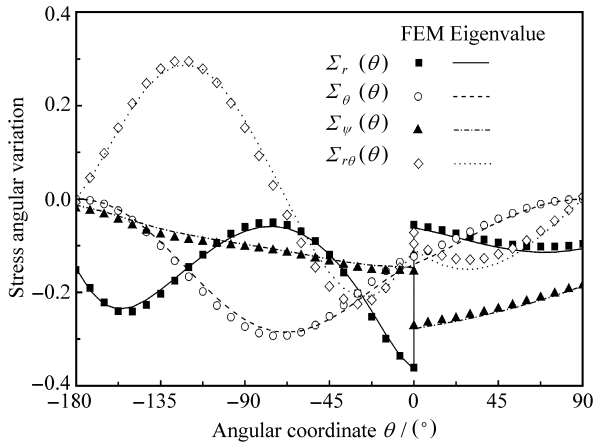

图 5　归一化的应力角函数分布

Fig. 5　Normalized stress angular variations

对图 2 所示的纤维拔出模型($L=5$ mm，$a=1$ mm，$b=3$ mm)进行有限元分析，验证特征值法的有效性。纤维端部施加大小为 $p=1.0$ MPa 的轴向均布拉力，位移约束如图所示。模型界面端附近划分 1404 个四节点轴对称单元，界面端附近的最小单元尺寸约为 $1\times10^{-4}a$，有限元网格如图 6 所示。界面端 O' 附近沿 $\theta=22.5°$ 方向的双对数应力分布如图 7 所示。4 个应力分量的双对数曲线都有非常好的线性并且近似平行，表明界面端 O' 只存在一个实应力奇异性指数。用最小二乘法对每条双对数应力分布曲线进行线性拟和，即可确定出应力奇异性指数。4 个应力分量 σ_r、σ_θ、σ_ψ 和 $\sigma_{r\theta}$ 确定的应力奇异性指数 $1-s$ 分别为 0.355、0.355、0.358 和 0.354，与由特征值法得到的结果非常吻合，最大相对误差仅为 2.6%。

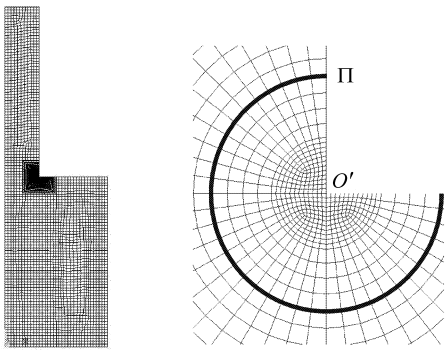

图 6　有限元网格

Fig. 6　Finite element mesh

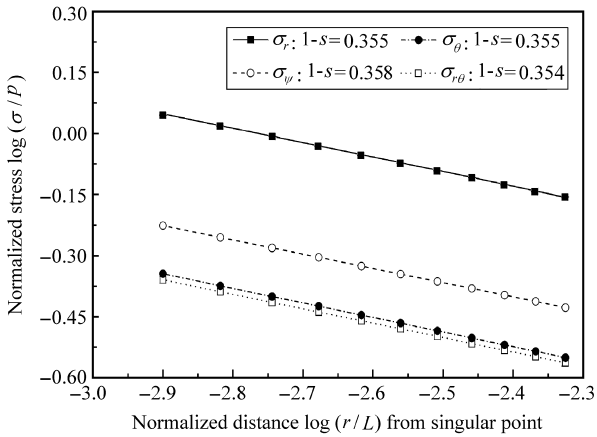

图 7　$\log(\sigma/p)$随 $\log(r/L)$的变化

Fig. 7　Variations of $\log(\sigma/p)$ versus $\log(r/L)$

在界面端 O' 附近的应力奇异性支配区域内，选取与奇异点 O' 等距离的任一条环线 Π，如图 6 所示，取出其上所有单元节点的角坐标、位移分量和应力分量。选取的所有单元节点，具有相同的径向坐标 r_0，环向坐标在区间[−180°,90°]。由式(22)可知，位于环线 Π 上各单元节点的位移和应力角函数可表示为

$$\tilde{\Lambda}_t(\theta)=r_0^{-s}\cdot u_t(r_0,\theta)/K,$$

$$\tilde{\Sigma}_\xi(\theta)=r_0^{1-s}\cdot\sigma_\xi(r_0,\theta)/K. \tag{23}$$

其中：K 是应力强度系数；$u_t(r_0,\theta)$和 $\sigma_\xi(r_0,\theta)$分别是有限元分析得到的位移分量和应力分量。对式(23)做归一化处理，即可得到图 4 和图 5 所示的位移和应力角函数曲线。可见，有限元计算得到的数值结果与特征值法给出的结果非常吻合。

选取从界面端 O' 出发的一条径向线($\theta=22.5°$)，在应力奇异性的支配区域内，取出其上所有单元节点的径向坐标 r_k 和应力分量 $\sigma_\xi(r_k)$。将

特征值法得到的应力奇异性指数和归一化的应力角函数，以及有限元计算得到的应力分量 $\sigma_\xi(r_k)$ 和径向坐标 r_k，代入指数形式的奇异应力场表达式(22)，即可确定相应的应力强度系数，所得结果如图 8 所示。对由 4 个应力分量确定的 $r-K$ 曲线做线性外插，可以得到对应的应力强度系数。各应力强度系数的大小为：$K_{\sigma_r}=1.839$ MPa·m$^{0.349}$，$K_{\sigma_\theta}=1.873$ MPa·m$^{0.349}$，$K_{\sigma_{r\theta}}=1.861$ MPa·m$^{0.349}$ 和 $K_{\sigma_\psi}=1.860$ MPa·m$^{0.349}$。

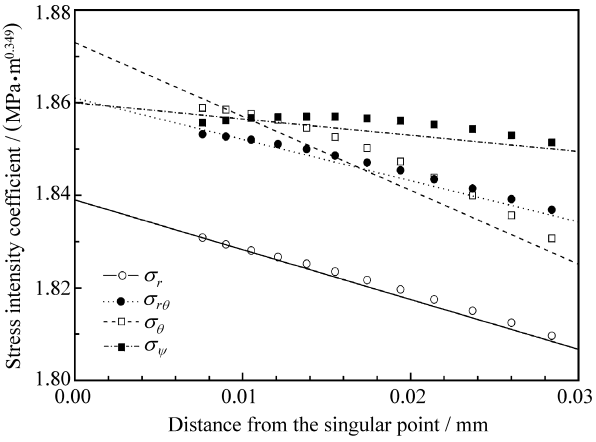

图 8　应力强度系数

Fig. 8　Stress intensity coefficient

4　结　论

(1) 基于一阶近似的特征值法，可以确定横观各向同性双材料轴对称界面端的各阶应力奇异性指数、相应的位移角函数和应力角函数。有限元分析结果验证了特征值法的正确性。

(2) 特征值法给出的应力奇异性指数$(1-s_\nu)$和应力角函数 $\Sigma_\xi^\nu(\theta)$，结合有限元分析得到的奇异应力场的数值解，通过线性外插法，可以确定与$(1-s_\nu)$相应的应力强度系数 K_ν。

(3) 有限元分析与本文中提出的特征值法相结合，可以完全确定横观各向同性双材料轴对称界面端的奇异应力场。

参考文献：

[1] 康国政，高　庆. 短纤维增强金属基复合材料基体中的应力分布及其变形特征 [J]. 复合材料学报，2000，17(2)：20-24.
Kang Guozheng，Gao Qing. Stress distribution and deformation characteristics of matrix in short fiber reinforced metal matrix composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2000，17(2)：20-24.

[2] 贾普荣，矫桂琼. 纤维/基体界面应力分析及界面失效 [J]. 复合材料学报，1999，16(3)：93-97.
Jia Purong，Jiao Guiqiong. Stress analyses of fiber - matrix interface and interface failure [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，1999，16(3)：93-97.

[3] Ji X，Dai Y，Zheng B L，Ye L，Mai Y W. Interface theory and re - evaluation in interfacial strength test methods [J]. Composite Interfaces，2003，10(6)：567-580.

[4] Dai Y，Ji X，Ye L，Mai Y W. Re-evaluation of fragmentation test based on the stress singularity of interface end [J]. Composite Interfaces，2006，13(1)：90-95.

[5] 戴　瑛，嵇　醒. 界面端应力奇异性及界面应力分布规律研究 [J]. 中国科学 G，2007，37(4)：535-543.
Dai Ying，Ji Xing. Study on the stress singularity and stress distributions of interface end [J]. Science in China：Series G，2007，37(4)：535-543.

[6] 戴　瑛，嵇　醒，石川晴雄. 轴对称圆柱界面裂纹的应力奇异性 [J]. 上海力学，1994，15(3)：29-39.
Dai Ying，Ji Xing，Haruo Isikawa. The stress singularity of axisymmetric cylindrical interface crack [J]. Shanghai Journal of Mechanics，1994，15(3)：29-39.

[7] 刘一华，许金泉，丁皓江. 轴对称圆柱界面端的应力奇异性 [J]. 浙江大学学报：自然科学版，1998，32(3)：307-314.
Liu Yihua，Xu Jinquan，Ding Haojiang. Stress singularity in axisymmetric cylindrical interface wedge [J]. Journal of Zhejiang University：Natural Science，1998，32(3)：307-314.

[8] 刘一华，许金泉，丁皓江. 纤维端部的界面裂纹分析 [J]. 力学学报，1999，31(3)：285-291.
Liu Yihua，Xu Jinquan，Ding Haojiang. Analysis of interface cracks at a fiber end [J]. Acta Mechanica Sinica，1999，31(3)：285-291.

[9] 傅丽娟，姜国栋，戴　瑛. 横观各向同性轴对称界面端奇异性研究 [J]. 力学季刊，2007，28(4)：604-611.
Fu Lijuan，Jiang Guodong，Dai Ying. Singularity study of transversely isotropic axisymmetric interface end [J]. Chinese Quarterly of Mechanics，2007，28(4)：604-611.

[10] Wang X G. A boundary value method for the singular behavior of bimaterial systems under inplane loading [J]. International Journal of Solids and Structures，2005，42(20)：5513-5535.

[11] Aluru N R，Li G. Finite cloud method：A true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2001，50：2373-2410.

[12] Xu J Q，Liu Y H，Wang X G. Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients [J]. Engineering Fracture Mechanics，1999，63：755-790.