复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第 26 卷 第 3 期 6 月 2009 年
Vol. 26 No. 3 June 2009

文章编号：1000-3851(2009)03-0188-07

纤维束分布对复合材料有效性能的影响

谭祥军，杨庆生*
（北京工业大学 工程力学系，北京 100124）

摘 要： 针对纤维束增强相在基体材料中的分布方式不同，建立了由固体基体和纤维束增强相两相介质组成的复合材料细观力学模型。假设该模型的细观结构呈周期性均匀分布，纤维束内的纤维接触是光滑的。采用二尺度展开法计算了复合材料的有效性能，得出了不同微结构分布的复合材料的刚度系数、横向弹性模量、泊松比和剪切模量随纤维束体分比的变化曲线，并将数值结果与实验数据进行了比较。研究表明，数值结果与实验数据有较好的吻合，增强相的分布直接影响到复合材料的力学性能。

关键词： 复合材料；体分比；细观结构；有效性能
中图分类号： TB332 **文献标志码：** A

Influence of microstructure on effective properties of fiber bundle reinforced composites

TAN Xiangjun，YANG Qingsheng*
(Department of Engineering Mechanics，Beijing University of Technology，Beijing 100124，China)

Abstract： For different distributions of the fiber bundles in matrix materials，a micromechanical model was developed to investigate the effective properties of the composites. The composites consist of a solid matrix and fiber bundles. It is assumed that the composite has a periodic microstructure and the contact between fibers in the fiber bundle is smooth. The stiffness coefficients，transverse Young's modulus，shear modulus and Poisson ratio of the composites are calculated by the two - scale expansion method. The numerical results are compared with the experimental data. It is indicated that the distributions of the fiber bundle can directly affect the effective properties of the composites.

Keywords： composites；volume fraction；microstructure；effective properties

纤维增强树脂基复合材料(Fiber reinforce polymer，FRP)是由聚合物基体和纤维增强体组成的高分子复合材料。在外应力作用下，通过作为连续相的树脂基体将应力传递给纤维，这时纤维起增强材料的作用，是外应力的主要承担者[1]。影响 FRP 力学性能的主要因素有：增强相纤维的种类、增强相纤维的含量、增强相纤维的排列方向、纤维和基质的组合排列方式等[2]。在单向铺设的 FRP 复合材料的横截面内，多数学者都将复合材料结构看作是均匀性与周期性分布的细观结构。Peng[3] 研究了单根圆形纤维增强相为正方形分布方式的复合材料，得出了复合材料的有效弹性模量、有效泊松比和有效剪切模量等随应变的变化曲线。Yang[4-5] 利用细观力学模型和有限元法研究正方形分布下由 3 根和 4 根纤维组成的纤维束复合材料的横向弹塑性力学性能。数值研究表明：纤维的成束对复合材料的横向弹性刚度影响很小，而对复合材料的塑性变形和切线刚度有显著的影响。雷友峰等[6] 采用细观有限元法预测了增强相为正四边形排列和正六边形排列的复合材料的代表体元的有效弹性模量，并将预测值与实验数据进行了比较。谭祥军等[7] 采用直接平均法和二尺度展开法计算了单根纤维增强相在正三角形和正方形分布下，复合材料的有效力学性能。

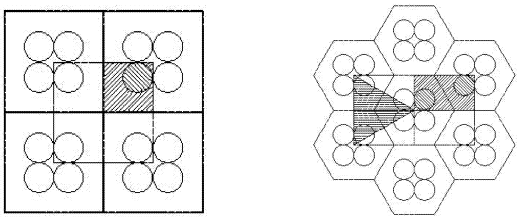
单向铺设的 FRP 材料具有热物理非线性和几何非线性的特点，当外力的方向与增强相的方向正交时，基体承担大部分受力，用线弹性理论分析没有很大的误差；但是当外力的方向与增强相的方向相同时，增强相承担大部分受力，这时用线弹性理

收稿日期： 2008-05-26；**收修改稿日期：** 2008-10-20
基金项目： 国家自然科学基金(10872011；30470439)
通讯作者： 杨庆生，博士，教授，从事复合材料细观力学研究 E-mail：qsyang@bjut.edu.cn

论计算，与实验值相比，会有很大的误差[8]。因此本文中根据 FRP 材料的特点，建立了研究纤维束在正三角形与正方形分布方式下，复合材料有效性能的细观力学模型。该模型由基体材料和纤维束增强相两相介质组成，并假设细观结构呈周期性均匀分布，纤维束内的纤维接触是光滑的。采用二尺度展开法计算了不同纤维束体分比下复合材料的有效性能，得出了横向弹性模量、泊松比和剪切模量随纤维束体分比的变化曲线。

1 细观力学模型

对于在三维空间为单向铺设的连续纤维束复合材料，由于纤维轴向长度与其直径比值远大于 10，故三维空间问题可简化为二维平面问题。典型的复合材料单胞形状为正方形与正六边形，如图 1 所示。从图 1(a)中可以看出，4 个相邻的正方形增强相(由 4 根纤维组成的纤维束)单胞中心组成 1 个正四边形，且边长为正方形单胞的长度；3 个相邻的正六边形单胞增强相中心组成 1 个正三边形，如图 1(b)中的三角形阴影区域所示，且边长为正六边形边长的$\sqrt{3}$倍。因而横截面为正方形的周期性结构所对应的增强相为正方形分布；横截面为正六边形的周期性结构所对应的增强相为正三角形分布。



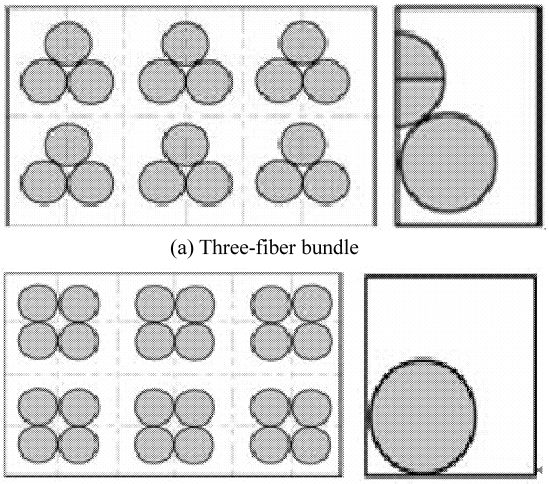
(a) Quadrangle distribution (b) Triangle distribution

图 1 细观结构分布及其代表体元

Fig. 1 Distribution of microstructure and RVE

对于这种具有均匀性和周期性分布的细观结构，可以取出一个单胞或部分单胞作为代表体元(Representative volume element，RVE)。根据细观结构是呈均匀性和周期性分布的特点，可以通过分析其中一个细观代表体元的性能，进而评价整个材料的宏观有效性能。在此，对正方形分布的结构取包含纤维束的正方形单胞作为代表体元；而对正三角形分布的结构，取如图 1(b)所示的矩形框区域(包括 2 个正六边形单胞：1 个完整正六边形与 4 个 1/4 六边形)作为代表体元。其中图 1 中的矩形阴影部分都为代表体元的 1/4 用来作为计算区域。这样选取的 1/4 的代表体元与选取整个代表体元计算出来的结果(包括变形)是完全相同的[9]。

在数值计算中考虑的纤维增强相分为由 3 根纤维和 4 根纤维组成的纤维束，且纤维与纤维之间假设接触是光滑的，而纤维束的分布方式又有正三角形与正方形 2 种分布。在此主要考虑 4 种结构的纤维束增强复合材料，如图 2 和图 3 所示。实际上，由于纤维束可以由任意根纤维组成，其分布方式也可以是任意的。因此，实际的纤维束大小和形状有相当多的组合，文中所研究的 3 根和 4 根纤维组成的纤维束与正三角形和正方形分布方式可认为是最简单和最典型的情况。其中图 2(a)中所取的计算区域为代表体元的 1/2，而其他 3 种结构的计算区域都取代表体元的 1/4，但图 2(a)的边界条件与其他 3 种结构的边界条件相同。



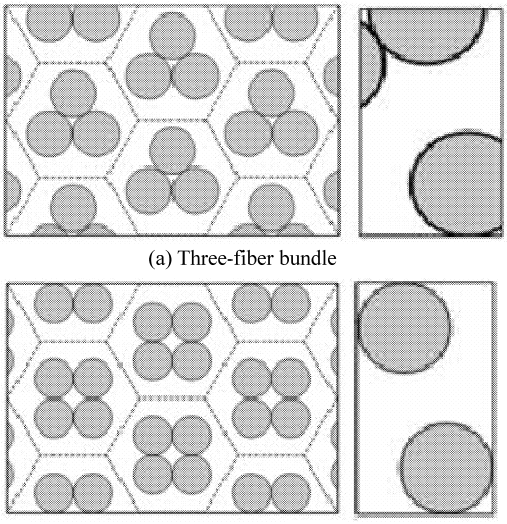
(a) Three-fiber bundle

(b) Four-fiber bundle

图 2 正方形分布的纤维束增强相复合材料的细观结构及其计算区域

Fig. 2 Microstructure and calculating region of composites with quadrangle distribution

这种结构可以按平面应变模型或广义平面应变(考虑轴向位移)模型计算，而且要满足变形后的代表体元边界仍为直线或平面的协调要求[10]。根据结构的几何对称性，对于 2 种分布的细观结构，采用图 1 中所示的矩形阴影部分作为计算区域。而结构的周期性边界条件可以用通常的约束条件代替[11]。例如，考虑代表体元的法向变形时，其周期性和对称性使上下两边和左右两边的法向位移为零，可以得到如图 4(a)所示的约束形式。考虑代表体元的纯剪切变形时，其周期性和反对称变形模式使边界上的切向位移为零，如图 4(b)所示。其他的几种结构采用相同的边界条件进行计算。



3　正三角形分布的纤维束增强相复合材料的细观结构及其计算区域

Fig. 3　Microstructure and calculating region of composites with triangle distribution

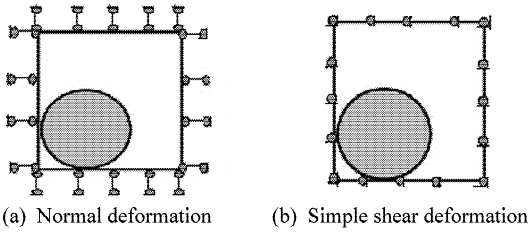


图 4　计算区域的边界条件

Fig. 4　Boundary conditions of calculating region

2　材料的有效性能

在二尺度展开法中[12]，存在 2 个坐标系：宏观尺度坐标 x 和细观尺度坐标 y，2 个坐标之间的关系为 $y=x/\varepsilon$。ε 是一个非常小的正数，表示一个单胞与整个结构体的大小之比。位移场可以渐进展开成

$$u_i = u_i^{\varepsilon}(x) = u_i^0(x,y) + \varepsilon u_i^1(x,y) + \varepsilon^2 u_i^2(x,y) + \cdots \tag{1}$$

由小变形状态的应变-位移关系可以求出应变 ε_{ij}。弹性系数 D_{ijkl} 是关于 x 和 ε 的函数。对于平均应力，其表达形式如下：

$$\sigma_{ij}^0 = D_{ijkl}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right) \tag{2}$$

其中：右边的第 1 项代表平均应变；第 2 项代表扰动应变。为了求解细观均匀性能，引进函数 $\psi_i^{kl}(x,y)$，因此平均位移场 u_i^0 和扰动位移场 u_i^1 的关系可通过 $\psi_i^{kl}(x,y)$ 表示为

$$u_i^1 = -\psi_i^{kl}(x,y)\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \tag{3}$$

只要求出函数 $\psi(x,y)$，就可以确定平均应力。将式(3)代入平均应力方程，得

$$\sigma_{ij}^0 = \left[D_{ijkl} - D_{ijmn}\frac{\partial \psi_m^{kl}}{\partial y_n}\right]\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \tag{4}$$

然后在整个代表体元上进行积分，得到宏观弹性刚度

$$\overline{D}_{ijkl} = \frac{1}{V}\int_Y \left[D_{ijkl} - D_{ijmn}\frac{\partial \psi_m^{kl}}{\partial y_n}\right]\mathrm{d}Y \tag{5}$$

$\overline{D}_{ijkl}$ 是宏观弹性系数。一般来说，可以用有限元方法计算出函数 $\psi_i^{kl}(x,y)$。将 $\psi_i^{kl}(x,y)$ 写成有限元形式的插值可表示为

$$\psi_i^{kl} = (N_\alpha \psi_\alpha)_i^{kl} = (\boldsymbol{N}\boldsymbol{\psi})_i^{kl}, \quad \alpha = 1,\cdots,M \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{N}$ 是形函数；$\boldsymbol{\psi}$ 是节点的广义坐标；M 表示 FE 系统中的自由度总数。那么将 $\psi_i^{kl}(x,y)$ 的标准有限元形式表示为

$$\left(\int_Y \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}Y\right)\boldsymbol{\psi}^{kl} = \int_Y \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{kl}\,\mathrm{d}Y \tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{D}$ 为应力应变矩阵；$\boldsymbol{B}$ 是和单元形函数相关的离散位移-应变矩阵；$\boldsymbol{D}^{kl}$ 是应力应变阵 $\boldsymbol{D}$ 中的 kl 向量(对于平面问题，$kl=11$，22，12)；$\boldsymbol{\psi}^{kl}$ 是与 kl 有关的特征位移向量。对不同的平面应变状态需要解 3 个类似于式(7)的方程，式(5)定义的宏观弹性系数可以表示为

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{V}\int_Y \boldsymbol{D}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}Y \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\psi}^{11},\boldsymbol{\psi}^{22},\boldsymbol{\psi}^{12})$。

3　数值计算

假设纤维增强相和树脂基都具有相同的几何参数和材料参数，纤维增强相均匀分布在树脂基中，材料参数在变形过程中不发生改变，并且纤维增强相彼此之间的接触认为是光滑接触，除了接触点外，纤维增强相与基体材料之间的界面条件假设是完好的，即在界面上位移条件是连续的。取树脂基体材料弹性模量 $E_{\mathrm{m}}=3.45$ GPa，泊松比 $\nu_{\mathrm{m}}=0.35$；玻璃纤维增强相的弹性模量 $E_{\mathrm{f}}=73.1$ GPa，泊松比 $\nu_{\mathrm{f}}=0.22$[3]。假设在每一个正方形单胞与正六边形单胞的横截面具有相同的面积，而纤维束具有相同的体分比。而当纤维束体分比的值为 0.6 时，正方形分布方式下的纤维束的半径已大于 0.25，致使纤维越出了单胞(面积都为 1)的边界，故在此只考虑体分比到 0.5 的情形，取纤维束的体分比为 0.1、

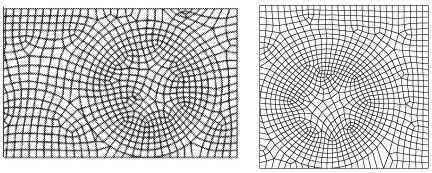
0.2、0.3、0.4、0.5。由于玻璃纤维在轴向无限长，因而将其简化为平面应变问题。对于圆形玻璃纤维增强相，用二尺度展开法可以直接求出有效刚度系数 $\overline{\boldsymbol{D}}$。假设代表体元是近似各向同性的，有效弹性模量、泊松比和剪切模量用如下公式计算：

$$\nu = \frac{\overline{D}_{12}}{\overline{D}_{11} + \overline{D}_{12}},\ E = \frac{\overline{D}_{11}(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)},\ G = \overline{D}_{66} \tag{9}$$

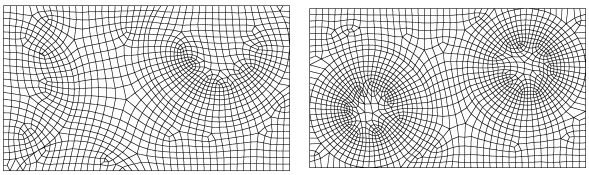
用于估算复合材料横向弹性模量 E 和剪切模量 G 下限的表达式为[13]

$$\frac{1}{E} = \frac{\nu_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{f}}} + \frac{\nu_{\mathrm{m}}}{E_{\mathrm{m}}};\ \frac{1}{G} = \frac{\nu_{\mathrm{f}}}{G_{\mathrm{f}}} + \frac{\nu_{\mathrm{m}}}{G_{\mathrm{m}}} \tag{10}$$

采用四边形常应变单元，4 种结构 4 个典型的有限元网格，如图 5 所示。不同网格划分方式(单元数目不同)对复合材料有效性能的影响很小，因而可以不考虑网格划分方式对复合材料有效性能的影响。



(a) Quadrangle distribution



(b) Triangle distribution

图 5　纤维束复合材料的有限元网格

Fig. 5　Finite element mesh of fiber bundle composites

为了更清晰地反映出玻璃纤维束正三角形与正方形分布方式对复合材料有效性能影响的差异，图 6 出给了 2 种分布方式下的细观结构刚度系数 $\overline{D}_{11}$、$\overline{D}_{22}$、$\overline{D}_{12}$ 和 $\overline{D}_{66}$ 随纤维束体分比的变化曲线。从图 6 中可以看出 2 种分布方式下的刚度系数 $\overline{D}_{11}$、$\overline{D}_{22}$、$\overline{D}_{12}$ 和 $\overline{D}_{66}$ 随着纤维束体分比的增大而增大，这也说明随着纤维束体分比的增大，其增强效果越明显。当纤维束呈正方形分布方式时，由 3 根纤维组成的纤维束结构的刚度系数 $\overline{D}_{11}$ 的值大于相同体分比下 4 根纤维组成的纤维束结构的刚度系数；而当纤维束呈正三角形分布时，却与之相反。正三角形分布方式下的 3 根纤维组成的纤维束结构的刚度系数 $\overline{D}_{11}$ 的值是最小的(见图 6(a))。从图 6(b)中可以看出，对于相同体分比下的纤维束，正方形分布方式下的纤维束与正三角形分布方式下的 3 根纤维组成的纤维束结构的刚度系数 $\overline{D}_{22}$，三者相差不大，但均大于相同体分比下的正三角形分布的 4 根纤维所组成的纤维束结构。在图 6(c)和图 6(d)中，正三角形分布方式结构的刚度系数 $\overline{D}_{12}$ 和 $\overline{D}_{66}$ 大于相同体分比下正方形分布方式下结构的刚度系数，这种纤维束结构刚度系数随分布方式的变化特点与单根纤维结构相同，见文献[7]；而在正方形分布方式下，由 3 根纤维组成的纤维束的刚度系数 $\overline{D}_{12}$ 和 $\overline{D}_{66}$ 大于相同体分比下由 4 根纤维组成的纤维束结构的刚度系数。

由式(9)计算出材料的横向有效弹性模量、泊松比和剪切模量，并由式(10)估算出其下限值。图 7(a)～7(c)给出了 2 种分布方式下的横向弹性模量、泊松比和剪切模量随纤维束体分比的变化曲线图，并与相同体分比下的单根纤维结构的数值结果进行了比较。

图 7(a)为 2 种分布方式下结构的横向弹性模量随纤维束体分比变化曲线图，并与单根纤维的数值结果进行了比较。从图中可以看出：纤维体分比越大，结构的弹性模量越大；单根纤维结构的横向弹性模量小于相同体分比、相同分布方式下的纤维束结构；对于同一纤维束体分比，相同纤维根数下，纤维为正方形分布下结构的弹性模量比正三角形分布下结构的要大，且都大于式(10)计算出的结果，因而证明了式(10)计算出来的结果为估算复合材料有效弹性模量的下限。当纤维体分比较大时，正方形分布方式下的 3 根纤维组成的纤维束模型的横向弹性模量增幅明显，此时其值越过正方形分布的 4 根纤维模型的横向弹性模量，为 6 种结构下横向弹性模量最大值。随着纤维体分比的增大，增强相材料越多，基体材料越少，因而不管是哪种分布方式，其结构的弹性模量都是随着纤维体分比的增大而变大，抵抗变形的能力增强。

图 7(b)给出了正三角形分布与正方形分布方式下单根纤维与 3 根和 4 根纤维所组成纤维束复合材料模型的横向泊松比随纤维体分比的变化曲线。从图中可以看出，随着纤维体分比的增大，6 种结

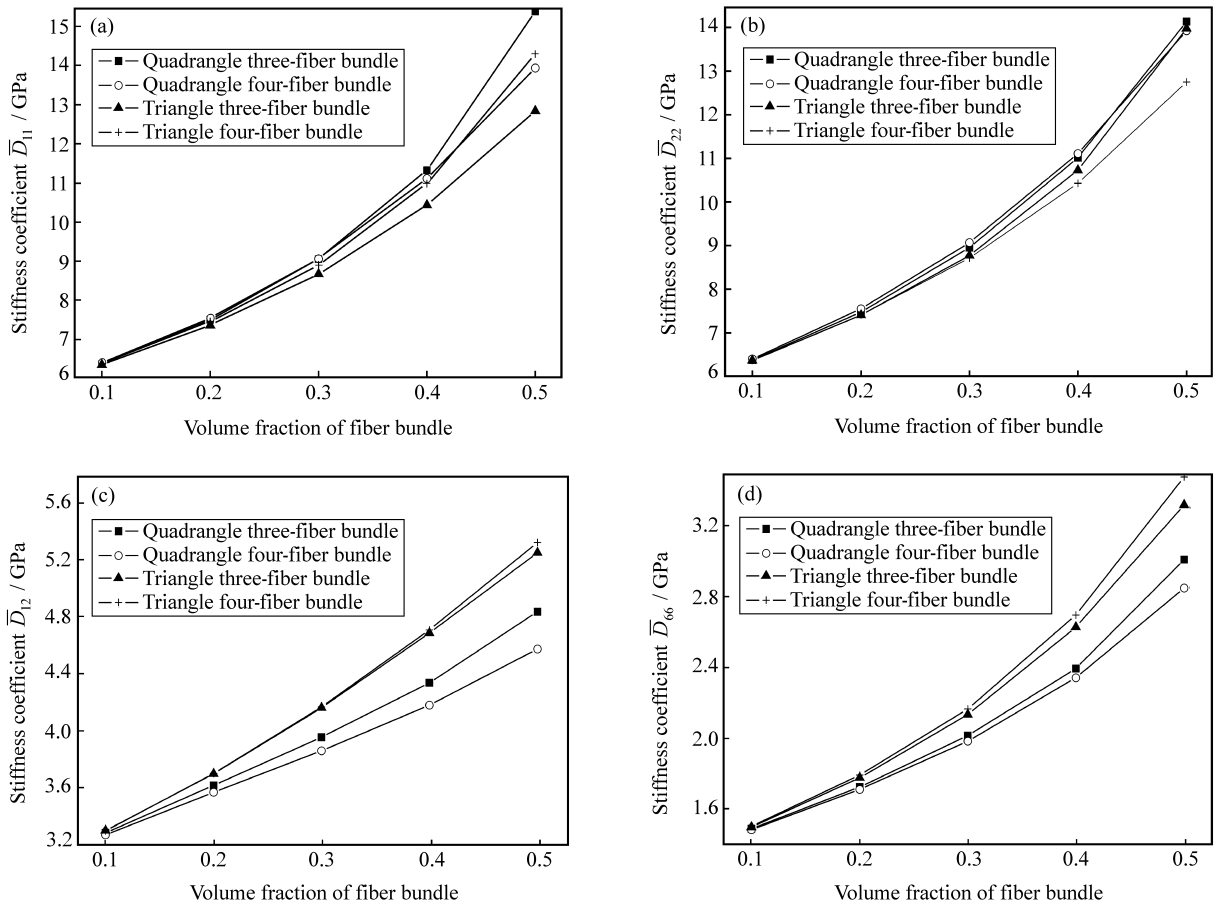


图 6　有效刚度系数随纤维束体分比变化曲线

Fig. 6　Effective stiffness coefficients vs fiber bundle volume fraction

构下的横向泊松比都变小。单根纤维结构的横向泊松比大于相同体分比、相同分布方式下的纤维束结构。正方形分布方式下的纤维(或纤维束)模型的横向泊松比明显小于正三角形分布方式下、相同纤维根数的横向泊松比。计算结果表明 2 种分布方式下结构的横向泊松比都随着纤维体分比的增大而逐渐变小。

图 7(c)给出了正三角形分布与正方形分布方式下单根纤维与 3 根和 4 根纤维所组成纤维束复合材料模型的横向剪切模量随纤维体分比的变化曲线。从图中可以看出，单根纤维结构的横向剪切模量小于相同体分比、相同分布方式下的纤维束结构。正三角形分布方式下的纤维模型的横向剪切模量同样明显大于正方形分布方式下的横向剪切模量。6 种结构模型下的横向剪切模量都大于由式(10)计算出来的下限结果。并且其变化规律与图 6(d)中的有效刚度系数 $\overline{D}_{66}$ 变化相同，因为从式(9)可知，两者在数值上是相等的。剪切模量随着纤维体分比的增大而增大也说明增强相材料的增加大大增强了复合材料的整体性能。

图 7(d)中给出了正方形分布方式下单根纤维的横向弹性模量的数值结果与实验数据[3]的比较。从图中也可以看出，由二尺度展开法计算出来的弹性模量与实验结果有较好的吻合，从实验上了验证了该分析理论的正确性。

4　结　论

(1) 根据具有代表性的纤维束增强型树脂基复合材料细观结构特点，假设纤维束的大小相同、分布均匀，并以正方形或正三角形方式分布在基体材料中，建立了细观力学模型。分析了结构在初应变作用下，复合材料的有效刚度系数、横向弹性模量、泊松比和剪切模量随纤维束体分比的变化规律。

(2) 数值结果表明，纤维束为正方形分布方式结构的有效刚度系数 $\overline{D}_{11}$ 和 $\overline{D}_{22}$ 大于相同体分比下的正三角形分布方式结构的。正三角形分布方式结

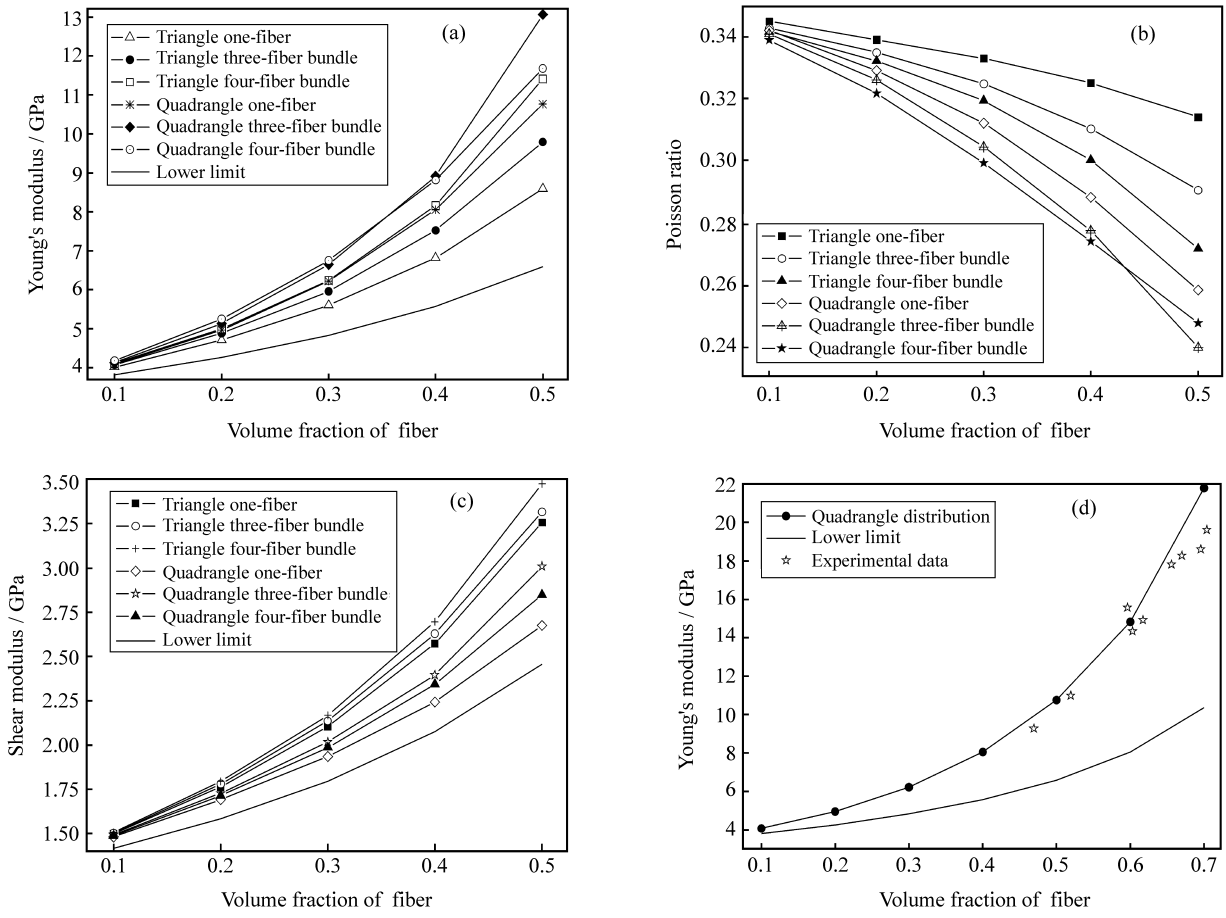


图 7　横向有效弹性系数随纤维体分比变化曲线

Fig. 7　Transverse effective elastic coefficients vs fiber volume fraction

构的刚度系数 $\overline{D}_{12}$ 和 $\overline{D}_{66}$ 大于相同体分比下正方形分布方式下结构的刚度系数。

（3）纤维为正方形分布的复合材料的横向弹性模量大于相同体分比、相同纤维根数下正三角形分布的；而对于横向泊松比和横向剪切模量，正方形分布方式的小于正三角形分布方式。并且单根纤维结构的横向弹性模量和横向剪切模量小于相同体分比、相同分布方式下的纤维束结构，而横向泊松比却与之相反。

参考文献：

[1] 曾汉民. 高分子复合材料的进展 [J]. 材料工程，1989(1)：1-29.
Zeng Hanming. The progress in polymeric composites and their structure - property relationships [J]. Journal of Materials Engineering，1989(1)：1-29.

[2] 王国庆，程祥荣. 纤维增强复合树脂的基础研究现状 [J]. 口腔颌面修复学杂志，2003，4(1)：64-66.
Wang Guoqing，Cheng Xiangrong. The basic research progress in fibers reinforced composites [J]. Chinese Journal of Prosthodontics，2003，4(1)：64-66.

[3] Peng Xiaoqi，Cao Jian. A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites [J]. Composites Part B，2002；33：45-56.

[4] Yang Qingsheng，Qin Qinghua. Modeling the effective elasto-plastic properties of unidirectional composites reinforced by fiber bundles under transverse tension and shear loading [J]. Materials Science and Engineering，2003，A344：140-145.

[5] 杨庆生，郑代华. 纤维束增强复合材料的横向弹塑性性能研究 [J]. 复合材料学报，2000，17(1)：122-125.
Yang Qingsheng，Zheng Daihua. Study on transverse elastoplastic properties of fiber bundle reinforced composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2000，17(1)：122-125.

[6] 雷友峰，魏德明，高德平. 细观力学有限元法预测复合材料宏观有效性能模量 [J]. 燃气涡轮试验与研究，2003，16(3)：11-15.
Lei Youfeng，Wei Deming，Gao Deping. Predicting macroscopic effective elastic moduli of composites by micro-mechanics FEM [J]. Gas Turbine Experiment and Research，2003，16(3)：11-15.

[7] 谭祥军，杨庆生. 增强相分布方式对复合材料有效力学性能的影响[J]. 宇航材料工艺，2008，38(1)：23-27.
Tan Xiangjun，Yang Qingsheng. Influence of microstructure on effective mechanical properties of composites material [J]. Aerospace Material & Technology，2008，38(1)：23-27.

[8] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学[M]. 北京：机械工业出版社，1991：1-22.

[9] Hassani B，Hinton E. A review of homogenization and topology optimization Ⅰ：Homogenization theory for media with periodic structure [J]. Computers and Structures，1998，69：707-717.

[10] Yang Qingsheng，Becker W. Numerical investigation for stress，strain and energy homogenization of orthotropic composite with periodic microstructure and non-symmetric inclusions [J]. Computational Materials Science，2004，31：169-180.

[11] Hassani B，Hinton E. A review of homogenization and topology optimization Ⅱ：Analytical and numerical solution of homogenization equations [J]. Computers and Structures，1998，69：719-738.

[12] Yang Q S，Becker W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences，2004，6(4)：319-332.

[13] Kaw A K. Mechanics of composite materials [M]. New York：CRC Press，1997：1-352.

（上接 23 页）

KEYWORDS FOR COMPOSITES

C：ANALYSIS

analytical modelling
computational modelling
damage mechanics
finite element analysis(FEA)
laminate mechanics
micro-mechanics
numerical analysis
statistical properties/methods

D：TESTING

acoustic emission
chemical analysis
electron microscopy
fractography
mechanical testing
non-destructive testing
optical microscopy
physical methods of analysis
process monitoring
radiography
surface analysis
thermal analysis
ultrasonics

E：MANUFACTURING/PROCESSING

assembly
autoclave
automation
braiding
casting
chemical vapour deposition (CVD)
compression moulding
consolidation
cure
cutting
extrusion
fibre conversion processes
filament winding
forging
forming
heat treatment
injection moulding
isostatic processing
joints/joining
knitting
lay-up (manual/automated)
liquid metal infiltration
machining
melt-spinning
moulding compounds
powder processing
preform
prepreg
pultrusion
recycling
resin film infiltration (RFI)
resin flow
resin transfer moulding (RTM)
sintering
slip casting
stitching
surface treatments
tape
thermal analysis
thermoplastic resin
thermosetting resin
tooling
tow
weaving

(from *Composites Part A*)