复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第 26 卷 第 4 期 8 月 2009 年
Vol. 26 No. 4 August 2009

文章编号：1000-3851(2009)04-0151-05

含非均匀界面相纤维增强复合材料热传导性能预测的递推公式

陈富利，蒋持平*

（北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100191）

摘　要： 研究了含非均匀界面相纤维增强复合材料的宏观等效传热性能。将热导率沿径向连续变化的界面相离散为多个热导率均匀的同心圆柱层，采用广义自洽法和复变函数理论，推导了复合材料宏观等效热导率的解析递推公式，并由递推公式给出了均匀界面相和理想零厚度界面的封闭公式。理想零厚度界面复合材料的热导率与已有理论结果一致。理想零厚度界面和非均匀界面相模型的计算结果与实验数据比较表明，当纤维体积分数较小时，2 种模型的预测结果与实验数据吻合均较好，当体积分数较大时，与实验数据相比，非均匀界面相模型的精度大大高于理想零厚度界面模型的精度。本文中给出的递推公式亦可用于计算多涂层纤维增强复合材料的热导率。

关键词： 复合材料；非均匀界面相；广义自洽法；复变函数；热导率

中图分类号： TB330.1；TK124　　**文献标志码：** A

A recurrence formula for the prediction of the effective thermal conductivity of fiber reinforced composites with an inhomogeneous interphase

CHEN Fuli, JIANG Chiping*

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The thermal conductivities of fiber reinforced composites with an inhomogeneous interphase are studied. The inhomogeneous interphase with continuously varied thermal conductivity can be modeled by a multi-layer concentric cylindrical homogeneous shell. The generalized self-consistent method and complex variable technology are applied to obtain an analytical recurrence formula of the effective conductivity. In the cases of the idealized zero thickness interface and homogeneous interphase, the closed form solutions are given by the recurrence formulae. The former has been given by previous researchers. When the volume fraction of fibers is small, the predictions by both models of the idealized zero thickness interface and inhomogeneous interphase and the experiment results are in good agreement, but when the volume fraction of fiber gets large, only the model of inhomogeneous interphase leads to good predictions. The present recurrence formula can also be used to analyze the thermal conductivity of a composite with multi-coating fibers.

Keywords: composite material; inhomogeneous interphase; generalized self-consistent model; complex variable; thermal conductivity

复合材料因其高比强度、高比模量及可设计性等诸多优势而广泛应用于航空航天领域。宏观等效热传导性能是复合材料的重要性能之一。基于各组分相间为理想界面的假设，预测该性能的方法包括：混合律法[1]、自洽法[2]、广义自洽法[3]、均匀化方法[4]等。

在纤维表面涂一层或多层既区别于纤维相又异于基体相的第三相(界面相)，以实现材料的强韧化或功能梯度化是近几年倍受人们关注的一种重要尝试[5]；另外，在复合材料的制造过程中，由于各组分的元素互相扩散、溶解并发生化学反应而最终在纤维与基体之间产生非均匀的界面相。其物理性能不同于基体和纤维，对复合材料的整体性能产生重要的影响。文献[6-7]考虑了均匀的界面相对复合

收稿日期： 2008-09-02；**收修改稿日期：** 2008-12-04
基金项目： 国家自然科学基金(90716002)
通讯作者： 蒋持平，教授，研究方向为复合材料力学、断裂与损伤力学　E-mail：jiangchiping@buaa.edu.cn

材料热传导性能的影响；文献[8－9]则研究了含界面热阻的非理想界面复合材料的热导率；文献[10]应用 Mori－Tanaka 平均场概念预测了含非均匀界面相碳纤维/碳复合材料的等效热传导性能。

广义自洽模型是复合材料的精细的细观力学模型，在预测复合材料的力学性能方面得到了较好的发展[11-12]。

本文中为研究含非均匀界面相纤维增强复合材料的热传导性能，将热导率沿径向连续变化的界面相离散为多个热导率均匀的同心圆柱层，采用广义自洽模型和复变函数理论，推导了复合材料宏观等效热导率的解析递推公式。并由递推公式给出了均匀界面相和理想零厚度界面的封闭公式。理想零厚度界面复合材料的热导率与已有理论结果一致[13]。数值算例给出了理想零厚度界面和非均匀界面相对复合材料热导率的影响规律，并与实验数据进行了比较。

1　模型与基本方程

图 1 为广义自洽模型的示意图。纤维/界面相/基体构成的代表性单元位于无限大均匀化的复合材料中，直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 的 ox_3 轴沿纤维轴线方向，ox_2 轴垂直于纸面向里。图中区域 1、$n+2$ 和 $n+3$ 分别代表纤维、基体和均匀化的复合材料，将热导率沿径向连续变化的非均匀界面相离散为 n 个均匀的同心圆柱层(图 1 中 2～$n+1$ 区域)，其中第 s 层的热导率取为该层两表面处的平均值，即

$$k_s = \frac{1}{2}(k[R_{s-1}] + k[R_s]) \tag{1}$$

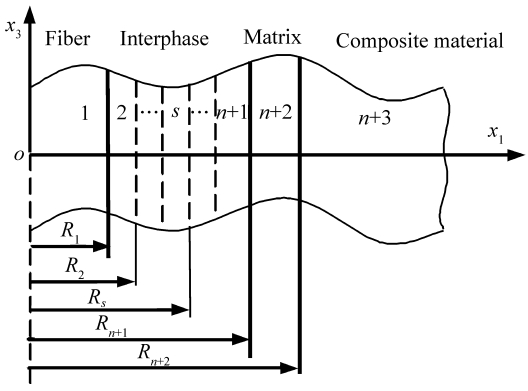

图 1　纤维/界面相/基体的广义自洽模型

Fig. 1　A generalized self-consistent model of fiber/interphase/matrix

对于横观各向同性材料，面内热传导方程为

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{KH} \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{q} = \{q_1, q_2\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{H} = \left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}\right\}^{\mathrm{T}}$ 分别为材料的热流密度、热导率和温度梯度。

考虑面内无热源、稳态问题，温度 T 满足二维的 Laplace 方程

$$\partial^2 T/\partial x_1^2 + \partial^2 T/\partial x_2^2 = 0 \tag{3}$$

根据复变函数理论，T 可以用解析函数 $\Psi(z)$ 表示

$$T = \mathrm{Re}\Psi(z) \tag{4}$$

Re 表示取实部，$z = x_1 + \mathrm{i}x_2$。由方程(2)和(4)得 x_1 和 x_2 2 个方向的热流密度分别为

$$q_1 = -k\mathrm{Re}\Psi'(z), \quad q_2 = k\mathrm{Im}\Psi'(z) \tag{5}$$

由此获得复热流密度组合

$$q_1 - \mathrm{i}q_2 = -k\Psi'(z) \tag{6}$$

引入通过曲线 C 的热流量

$$Q = \int_C (q_1 \mathrm{d}x_2 - q_2 \mathrm{d}x_1) = k\mathrm{Im}[\Psi(z)]_B^A \tag{7}$$

式中 A、B 为曲线 C 的端点。

在半径 R_s 处圆柱壳面的界面连续条件为

$$T_s = T_{s+1},\ Q_s = Q_{s+1} \quad \text{on } R_s \quad s \in [1, n+2] \tag{8}$$

2　复变函数求解

为不失一般性，令远场热流密度

$$q_1^{\infty} = 0,\ q_2^{\infty} = q^0 \tag{9}$$

分析表明，在各域内解析函数取为下述形式即可得到问题的精确解：

$$\begin{cases} \Psi_1 = \mathrm{i}B_1 z & \text{in } \Omega_1 \\ \Psi_s = \mathrm{i}(A_s/z + B_s z) & \text{in } \Omega_s \end{cases} \tag{10}$$

其中 B_1、A_s、B_s($s \in [2, n+3]$)为待定实常数。

由方程(6)、(9)和(10)可知

$$B_{n+3} = q^0/k_{n+3} = q^0/k_{\mathrm{e}} \tag{11}$$

式中，记第 $n+3$ 相即均匀化复合材料的等效热导率为 k_{e}，将式(10)代入界面连续条件(8)可以得到

$$\begin{cases} -B_1 = A_2/R_1^2 - B_2 \\ k_1 B_1/k_2 = A_2/R_1^2 + B_2 \end{cases} \quad \text{on } R_1 \tag{12}$$

$$\begin{cases} A_s/R_s^2 - B_s = A_{s+1}/R_s^2 - B_{s+1} \\ k_s(A_s/R_s^2 + B_s)/k_{s+1} = A_{s+1}/R_s^2 + B_{s+1} \end{cases} \quad \text{on } R_s \quad s \in [2, n+2] \tag{13}$$

观察方程(11)～(13)可知，待定实常数与方程组的数目皆为 $2(n+2)+1$，由此可以用唯一未知量 k_{e} 表示出各待定系数。

由方程(6)和(10)可知纤维、基体和各圆柱层内的热流密度为

$$q_{1,1}=0,\ q_{2,1}=k_1B_1 \quad \text{in } \Omega_1 \tag{14}$$

$$\begin{cases} q_{1,s}=k_sA_s\sin 2\theta/r^2 \\ q_{2,s}=k_s(B_s-A_s\cos 2\theta/r^2) \end{cases} \quad \text{in } \Omega_s \tag{15}$$

其中：$q_{i,j}$表示区域j（$j\in[1,n+2]$）内x_i（$i=1,2$）方向的热流密度；$z=re^{i\theta}$），$s\in[2,n+2]$。则各域内的平均热流密度为

$$\langle q_1\rangle_s=0,\ \langle q_2\rangle_s=k_sB_s \quad s\in[1,n+2] \tag{16}$$

式中$\langle\cdot\rangle_s$表示在区域s上的平均。由平均场理论及热传导方程(2)获得代表性单元内平均热流密度$\langle q\rangle^{\mathrm{RVE}}$和平均温度梯度$\langle H\rangle^{\mathrm{RVE}}$：

$$\begin{cases} \langle q\rangle^{\mathrm{RVE}}=\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_s\langle q_2\rangle_s=\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sk_sB_s \\ \langle H\rangle^{\mathrm{RVE}}=\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_s\langle H\rangle_s=-\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sB_s \end{cases} \tag{17}$$

其中λ_s（$s\in[1,n+2]$）表示第s相的体积分数，且

$$\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_s=1 \tag{18}$$

根据热导率的定义和代表性单元的性质，复合材料的等效热导率可表达为

$$k_{\mathrm{e}}=-\langle q\rangle^{\mathrm{RVE}}/\langle H\rangle^{\mathrm{RVE}}=\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sk_sB_s\Big/\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sB_s \tag{19}$$

为讨论方便，引入

$$S_{i,j}^{-1}=\frac{1}{2}(k_i/k_j-1),\ S_{i,j}^{1}=\frac{1}{2}(k_i/k_j+1) \tag{20}$$

则式(12)可以化简为

$$A_2=S_{1,2}^{-1}R_1^2B_1,\ B_2=S_{1,2}^{1}B_1 \tag{21}$$

同样，化简式(13)可以获得递推公式

$$\begin{cases} A_{s+1}=S_{s,s+1}^{1}A_s+S_{s,s+1}^{-1}R_s^2B_s \\ B_{s+1}=S_{s,s+1}^{-1}A_s/R_s^2+S_{s,s+1}^{1}B_s \end{cases} \quad s\in[2,n+1] \tag{22}$$

从式(21)和(22)可看出，B_s（$s\in[2,n+2]$）与非零乘子B_1成正比关系，也就是说，基体和各圆柱层内的温度梯度与纤维内的温度梯度成正比关系。再进一步观察方程(19)可知，只要知道了基体和各圆柱层与纤维内的温度梯度的比例系数，即可求得复合材料的等效热导率：

$$k_{\mathrm{e}}=\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sk_sB_s^1\Big/\sum_{s=1}^{n+2}\lambda_sB_s^1 \tag{23}$$

其中$B_s^1=B_s/B_1$。

3 关于解的讨论与数值算例

3.1 理想零厚度界面

纤维和基体之间为理想零厚度界面时，式(23)退化为

$$k_{\mathrm{e}}=\frac{k_{\mathrm{f}}+k_{\mathrm{m}}+\lambda_{\mathrm{f}}(k_{\mathrm{f}}-k_{\mathrm{m}})}{k_{\mathrm{f}}+k_{\mathrm{m}}-\lambda_{\mathrm{f}}(k_{\mathrm{f}}-k_{\mathrm{m}})}k_{\mathrm{m}} \tag{24}$$

式中：λ和k分别表示体积分数和热导率；下标f和m分别指代纤维和基体。这与已有理论结果[13]完全相同。

3.2 含均匀界面相

界面相热导率均匀时，式(23)化简为

$$k_{\mathrm{e}}=\frac{\lambda_{\mathrm{f}}k_{\mathrm{f}}+\lambda_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{f,c}}^{1}+\lambda_{\mathrm{m}}k_{\mathrm{m}}\left(S_{\mathrm{f,c}}^{1}S_{\mathrm{c,m}}^{1}+\frac{\lambda_{\mathrm{f}}}{\lambda_{\mathrm{f}}+\lambda_{\mathrm{c}}}S_{\mathrm{f,c}}^{-1}S_{\mathrm{c,m}}^{-1}\right)}{\lambda_{\mathrm{f}}+\lambda_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{f,c}}^{1}+\lambda_{\mathrm{m}}\left(S_{\mathrm{f,c}}^{1}S_{\mathrm{c,m}}^{1}+\frac{\lambda_{\mathrm{f}}}{\lambda_{\mathrm{f}}+\lambda_{\mathrm{c}}}S_{\mathrm{f,c}}^{-1}S_{\mathrm{c,m}}^{-1}\right)} \tag{25}$$

式中，下标c代表热导率均匀的界面相涂层。

一般情况下，涂层的厚度相对于纤维较薄，本算例中，取为纤维半径的1/10，即$\delta=0.1R_1$，相对应的体积分数之间有$\lambda_{\mathrm{c}}=0.21\lambda_{\mathrm{f}}$。当纤维与基体的热导率比值大于1（取$k_{\mathrm{f}}/k_{\mathrm{m}}=10$）或小于1（取$k_{\mathrm{f}}/k_{\mathrm{m}}=0.1$）时，复合材料等效热导率随纤维和涂层体积分数之和的变化规律如图2所示。

由图2可以看出，随着体积分数的增大，涂层与基体热导率的比值越悬殊，对复合材料宏观等效热导率的影响就越大。也就是说，界面相的存在，部分屏蔽了纤维对复合材料的贡献。

3.3 含非均匀界面相

考虑非均匀界面相的热导率从纤维线性变化到基体的情形，界面相的厚度取$\delta=(\beta-1)R_1$，非均匀界面相的热导率定义为

$$\begin{cases} k[R]=(k_{\mathrm{m}}-k_{\mathrm{f}})R/\beta R_1+k_{\mathrm{f}}-k_{\mathrm{m}}-k_{\mathrm{f}}/\beta \\ \qquad R\in[R_1,\beta R_1] \\ k_s=\frac{1}{2}\{k[R_1+(s-2)t]+k[R_1+(s-1)t]\} \end{cases} \tag{26}$$

其中$t=\delta/n$，$s\in[2,n+1]$。

根据文献[14]，取基体为DX210/$BF_3$400，增强相为高强度的碳纤维。在270 K时，实验测得不同体积分数下复合材料的热导率。分别利用式(24)和(26)结合基体热导率的实验值反推其中第2个实验数据，得到纤维的热导率后，再分别计算式(24)和(26)得到的复合材料热导率随纤维体积分数的变化曲线并与实验结果比较见图3，图中Exp、GSCM和Present分别指代文献[14]的实验数据、公式(24)和(26)的计算结果。计算式(26)时，取$n=100$，$\beta=0.01$。

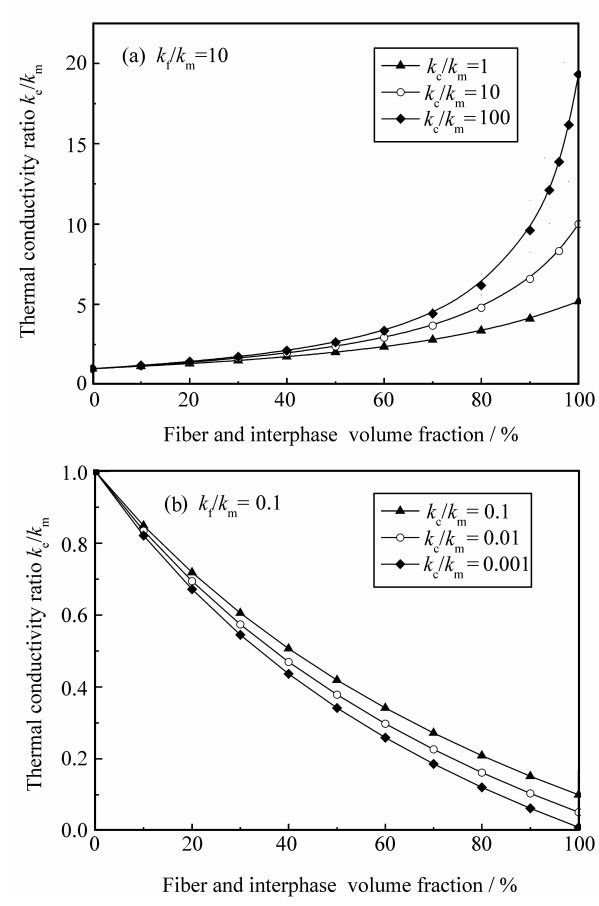

图 2　当 $\delta/R_1=0.1$ 时，含均匀界面相复合材料等效热导率随纤维和界面相的体积分数的变化曲线

Fig. 2　Variations of the effective conductivities of composite materials with homogeneous interphase with fiber and interphase volume fraction for $\delta/R_1=0.1$

由图 3 可以清楚地看出，当纤维体积分数较小时，理想零厚度界面模型和含非均匀界面相模型的预测结果与实验数据均吻合较好，当体积分数较大时，非均匀界面相模型的精度大大高于已有传统理想零厚度界面模型的精度。

4　结　论

（1）将热导率沿径向连续变化的界面相离散为多个热导率均匀的同心圆柱层，采用广义自洽模型和复变函数理论，得到了复合材料宏观等效热导率的解析递推公式，并由递推公式给出了均匀界面相和理想零厚度界面的封闭公式。理想零厚度界面的热导率与已有理论结果一致。

（2）与实验数值比较说明，非均匀界面相模型的精度高于已有理想零厚度界面模型的精度。

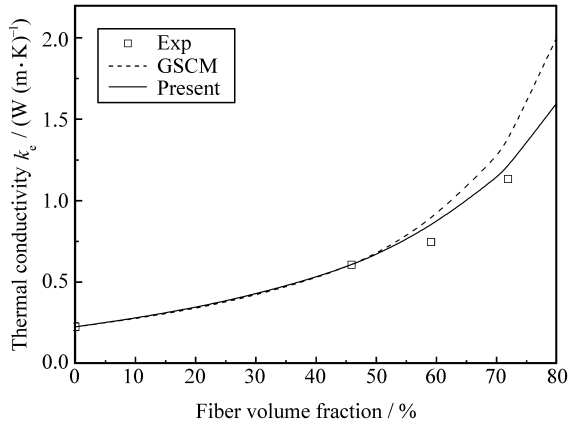

图 3　理想零厚度界面与含非均匀界面相复合材料热导率的计算结果与实验值比较

Fig. 3　Computational and experimental thermal conductivity of the idealized zero thickness interface and inhomogeneous interphase

（3）本文中给出的递推公式亦可用于计算多涂层纤维增强复合材料的热导率。

参考文献：

[1]　Carson J K，Lovatt S J，Tanner D J，Cleland A C. An analysis of the influence of material structure on the effective thermal conductivity of theoretical porous material using finite element simulations [J]. International Journal of Refrigeration，2003，26(8)：873-880.

[2]　Tzou D Y. A universal model for the overall thermal conductivity of porous media [J]. Journal of Composite Materials，1991，25(8)：1064-1084.

[3]　Miloh T，Benveniste Y. A generalized self-consistent method for the effective conductivity of composites with ellipsoidal inclusions and cracked bodies [J]. Journal of Applied Physics，1988，63(3)：789-796.

[4]　程耿东，刘书田. 单向纤维复合材料导热性预测 [J]. 复合材料学报，1996，13(1)：78-85.
Cheng Gengdong，Liu Shutian. Prediction of thermal conductivity of unidirectional fiber reinforced composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，1996，13(1)：78-85.

[5]　戴兰宏，黄筑平，王　仁. N-层涂层夹杂体复合材料有效模量显式表达 [J]. 高分子材料科学与工程，2000，16(3)：17-19.
Dai Lanhong，Huang Zhuping，Wang Ren. Explicit expression of the effective moduli of N-layered inclusion based composites [J]. Polymer Materials Science and Engineering，2000，16(3)：17-19.

[6]　Mercier S，Molinari A，El Mouden M. Thermal conductivity of composite material with coated inclusions：Applications to tetragonal array of spheroids [J]. Journal of Applied Physics，2000，87(7)：3511-3519.

[7] Lu Shih - Yuan，Song Jiann - Long. Effective conductivity of composites with spherical inclusions：Effect of coating and detachment [J]. Journal of Applied Physics，1996，79(2)：609-618.

[8] Lee Yung - Ming，Yang Ruey - Bin，Gau Song - Sheun. A generalized self - consistent method for calculation of effective thermal conductivity of composites with interfacial contact conductance [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer，2006，33(2)：142-150.

[9] Bohm H J，Nogales S. Mori - Tanaka models for the thermal conductivity of composites with interfacial resistance and particle size distributions [J]. Composites Science and Technology，2008，68(5)：1181-1187.

[10] 何陵辉，成振强，刘人怀. 含非均匀界面相碳/碳纤维复合材料等效热传导性质的研究 [J]. 应用数学和力学，1997，18(3)：193-201.
He Linghui，Cheng Zhenqiang，Liu Renhuai. Investigation on the effective conductivities of carbon/carbon fiber composites with inhomogeneous interpase [J]. Applied Mathematics and Mechanics，1997，18(3)：193-201.

[11] Jiang C P，Cheung Y K. An exact solution for the three-phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its applications to piezoelectric composites [J]. International Journal of Solids and Structures，2001，38(28/29)：4777-4796.

[12] 戴兰宏，黄筑平，王 仁. 广义自洽 Mori - Tanaka 模型及涂层夹杂体复合材料的有效模量 [J]. 固体力学学报，1999，20(3)：187-194.
Dai Lanhong，Huang Zhuping，Wang Ren. A generalized self-consistent Mori - Tanaka model for predicting the effective moduli of coated inclusion based composites [J]. Acta Mechanica Solida Sinica，1999，20(3)：187-194.

[13] Hasselman D P H，Johnson L F. Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance [J]. Journal of Composite Materials，1987，21(6)：508-515.

[14] Pilling M W，Yates B，Black M A. Thermal conductivity of carbon fibre- reinforced composites [J]. Journal of Materials Science，1979，14(6)：1326-1338.