复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica

第 37 卷 第 12 期 12 月 2020 年
Vol. 37 No. 12 Dec 2020

DOI：10.13801/j.cnki.fhclxb.20200414.001

不同边界条件下波纹夹芯板的自由振动特性

袁文昊，李凤莲*，吕梅
（北京信息科技大学 机电工程学院，北京 100192）

摘 要：波纹夹芯板作为一种特殊的复合材料结构，边界条件对其振动特性有重要影响。根据不同剪切方式下的剪切变形理论和基尔霍夫经典板理论 (CLPT)，利用 Hamilton 原理建立波纹夹芯板的动力学方程。其中，波纹芯层等效成各向异性均质体。根据四边简支、四边固支、对边简支和固支、一边固支三边简支的边界条件，推导出位移形式的偏微分动力学方程。求解得到波纹夹芯板在不同边界条件下自由振动的固有频率，与有限元仿真结果进行对比，验证了理论结果的正确性。在此基础上，基于指数剪切变形理论 (ESDT)，分析了不同边界条件下波纹夹芯板的基频随材料参数和结构几何参数的变化规律。结果表明，材料和几何参数对不同边界条件下波纹夹芯板的振动特性有重要影响。相关研究结果将对波纹夹芯板在工程应用中的减振设计及优化分析提供一定的理论依据。

关键词：波纹夹芯板；边界条件；剪切变形理论；自由振动；固有频率

中图分类号: TB383 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2020)12-3149-11

Free vibration characteristics of corrugated sandwich plates under different boundary conditions

YUAN Wenhao , LI Fenglian* , LV Mei
(College of Mechanical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract: As a special composite structure, the vibration characteristics of corrugated sandwich panel are greatly influenced by the boundary conditions. According to the shear deformation theory of different shear modes and Kirchhoff's classical plate theory(CLPT), the dynamic equation of corrugated sandwich plates was established by Hamilton principle. Among them, the corrugated core layer was equivalent to an anisotropic homogeneous body. According to the boundary conditions of four sides simply supported, four sides clamped, opposite sides simply supported and clamped, one side fixed and three edges clamped, the partial differential dynamic equation relative to the displacements was derived. By solving the equation, the natural frequencies of the corrugated sandwich plates under different boundary conditions were obtained. Compared with the finite element simulation results, the correctness of the theoretical results was verified. On this basis, based on the exponential shear deformation theory(ESDT), the variation of fundamental frequency of the corrugated sandwich plate with material parameters and structural geometric parameters under different boundary conditions was analyzed. The results show that the material and structural geometric parameters have an important influence on the vibration characteristics of the corrugated sandwich plates under different boundary conditions. Relevant research results will provide a theoretical basis for the vibration reduction design and optimization analysis of corrugated sandwich plates in engineering application.

Keywords: corrugated sandwich plates; boundary conditions; shear deformation theory; free vibration; natural frequency

近年来由于航空航天、高铁的飞速发展，航空航天器、高速列车等在高速运行时会产生剧烈的振动，该结构的减振设计将成为技术的关键。波纹夹芯结构作为一种新型的复合材料组合结构，具有高比强度、高比刚度、质量轻、吸能能力强、承载效率高等良好特性，在航空航天、高速列车、

收稿日期：2020-02-22; **录用日期**：2020-03-25 ; **网络首发时间**：2020-04-15 09:42:00
网络首发地址：https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20200414.001
基金项目：国家自然科学基金 (11872127; 11732005)
通信作者：李凤莲, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为复合材料力学及振动理论 E-mail: lifenglian@126.com

引用格式：袁文昊, 李凤莲, 吕梅. 不同边界条件下波纹夹芯板的自由振动特性 [J]. 复合材料学报, 2020, 37(12): 3149-3159.
YUAN Wenhao, LI Fenglian, LV Mei. Free vibration characteristics of corrugated sandwich plates under different boundary conditions[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2020, 37(12): 3149-3159(in Chinese).

汽车、建筑、机械、船舶等领域有着广泛的应用[1-4]。与传统的复合结构材料相比，波纹夹芯板结构很好地克服了夹芯板不连续的问题，具有良好的承载性能。此外，波纹夹芯板芯层间隙具备一定的流通性能，在间隙中穿插泡沫、多孔纤维、玻璃纤维等材料还能起到一定的隔声和隔热作用。因此，对波纹夹芯板的研究具有重要的意义。

由于夹层板拥有广阔的应用前景，近年来国内外学者针对波纹夹芯板各方面特性展开了广泛的研究。Peng 等[5]提出一种无网格伽辽金法来研究非加筋和加筋波纹夹芯板的弹性弯曲问题，将波纹夹芯板视为在两个垂直方向上具有不同挠曲力的正交各项异性板，并推导了梯形、正弦型波纹夹芯板的等效参数。Semenyuk 等[6]研究了三种用于纵向波纹圆柱壳稳定性分析的设计方法。Briassoulis 等[7]基于正交各向异性壳的拉伸刚度和弯曲刚度的一组解析表达式，对波纹壳进行了数值模拟。Sohrab 等[8]提出一种新型的分层波纹复合芯，并通过实验进行了测试。Tian等[9]对波纹夹芯板进行了优化分析。Samanta等[10]首次提出了梯形波纹夹芯板的非线性几何分析，将波纹夹芯板等效成各向异性模型，对梯形波纹夹芯板进行了自由振动分析。Xia 等[11]提出了一种基于均质化的波纹夹芯板模型，该模型可用于任何波纹形状。Li 等[12]针对铝制波纹夹芯板开展了空中爆炸试验研究和有限元数值分析，验证了有限元分析技术的可行性。王红霞等[13]和王青伟等[14]推导了考虑波纹拉伸变形的三角形波纹夹芯板的等效弹性参数，后来进行了修正。吴建均等[15]推导了泡沫填充下的三角形波纹夹芯梁的等效弹性常数公式，并且对泡沫波纹夹芯梁的模态进行实验研究和数值计算。还有一些学者对波纹夹芯板的结构性能、力学性能和冲击性能进行了研究[16-18]。

在夹芯板或板结构的研究中，发展了不同的理论，如 Reissner 板理论、基尔霍夫经典板理论 (CLPT) 及后来发展的各种剪切变形理论[19-21]等。Talha 等[22]基于高阶剪切理论研究了梯度板的静态响应和自由振动。WU 等[23]提出了基于 RMVT 的三阶剪切变形理论 (TSDT)。THAI 等[24]用正弦剪切变形理论 (SSDT) 分析了功能梯度板的弯曲、屈曲和振动特性。曹源等[25]用 SSDT 和修正的欧应力理论研究了功能梯度三明治微梁的静态弯曲和自由振动。但是，用这些理论来研究波纹夹芯板性能的还比较少。

综上所述，波纹夹芯板具有很强的各向异性特性，目前多数文献研究四边简支边界条件下波纹夹芯板的动力学特性，但波纹夹芯板在实际应用中还有其它的边界条件，并且边界条件的影响较显著。鉴于此，本文将采用不同的夹层板理论研究波纹夹芯板在四边简支 (SSSS)、四边固支 (CCCC)、对边简支和固支 (CCSS)、一边固支三边简支 (CSSS) 四种边界条件下的自由振动，与 ABAQUS 有限元仿真结果进行对比，验证理论模型的正确性，分析边界条件对波纹夹芯板振动特性的影响。此外，基于指数剪切变形理论 (ESDT)，讨论波纹夹芯板的材料参数和结构几何参数对系统振动特性的影响。所得结果为轻质波纹夹芯结构的优化设计提供了必要的理论指导。

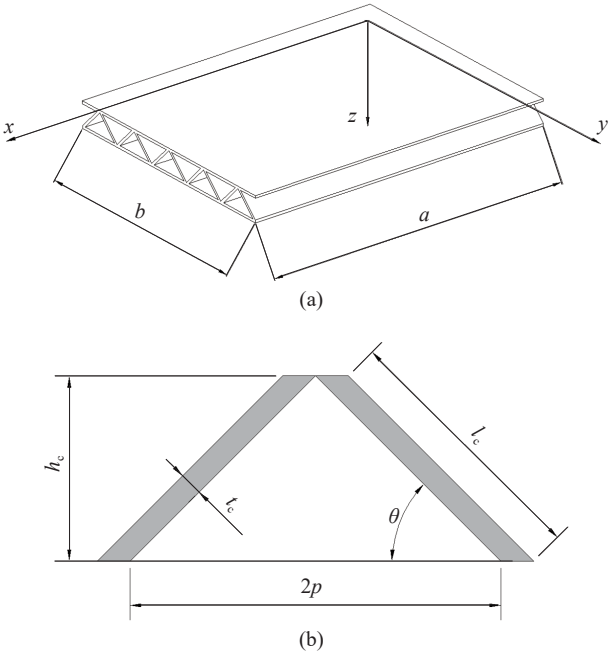
1 波纹夹芯板模型

波纹夹芯板的模型如图 1(a) 所示，由上、下面板及中间的波纹芯层组成。在板中面建立 x-y 坐标系，z轴垂直于 x-y 面，$z>0$的一侧称为下表面，$z<0$的一侧称为上表面。波纹夹芯板的长度为 a，宽度为 b，高度为 h，上、下板厚为h_{f}。图 1(b) 为波纹芯层的胞元，单胞的底边长为 $2p$，波纹壁厚为t_{c}，波纹与面板的夹角为 θ，斜边长$l_{\mathrm{c}}=p/\cos\theta$ 芯层厚度$h_{\mathrm{c}}=p\tan\theta$。

在波纹夹芯板中，上、下面板采用各向同性均质体，中间波纹芯层等效为各向异性均质体，等效示意图如图 2 所示。仿照文献 [13-15]，考虑波纹夹芯板的伸缩变形，波纹芯层的等效参数表达式为

$$
\begin{aligned}
E_1^{(2)} &= \frac{E_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}}{p\sin\theta}\\
E_2^{(2)} &= \frac{E_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}^3\cos\theta}{h_{\mathrm{c}}^3\left[1+\left(\frac{t_{\mathrm{c}}}{h_{\mathrm{c}}}\right)^2\cos^2\theta\right]}\\
G_{12}^{(2)} &= \frac{G_{\mathrm{s}}pt_{\mathrm{c}}\sin\theta}{h_{\mathrm{c}}^2}\\
G_{13}^{(2)} &= \frac{G_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}\sin\theta}{p}\\
G_{23}^{(2)} &= \frac{E_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}\sin^2\theta\cos\theta}{h_{\mathrm{c}}}\\
v_{12}^{(2)} &= \frac{v_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}^2\cos^2\theta}{(h_{\mathrm{c}}^2+t_{\mathrm{c}}^2\cos^2\theta)}\\
v_{21}^{(2)} &= v_{\mathrm{s}}\\
\rho^{(2)} &= \frac{2\rho_{\mathrm{s}}t_{\mathrm{c}}}{l_{\mathrm{c}}\sin 2\theta}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中：$E_1^{(2)}$、$E_2^{(2)}$、$G_{12}^{(2)}$、$G_{13}^{(2)}$、$G_{23}^{(2)}$、$\nu_{12}^{(2)}$、$\nu_{21}^{(2)}$、$\rho^{(2)}$分别表示波纹芯层在各方向上的等效弹性模量、剪切模量、泊松比和密度；E_s、G_s 和 ρ_s 分别为基体材料的弹性模量、剪切模量和密度。



a—Length of corrugated sandwich panel; b—Width of corrugated sandwich panel; l_c—Length of the hypotenuse; h_c—Height of core layer; t_c—Wall thickness; θ—Corrugation angle; p—Length of bottom side

图 1　波纹夹芯板的模型 (a) 和波纹单胞示意图 (b)

Fig. 1　Model diagrams of corrugated sandwich panel (a) and corrugated cell (b)

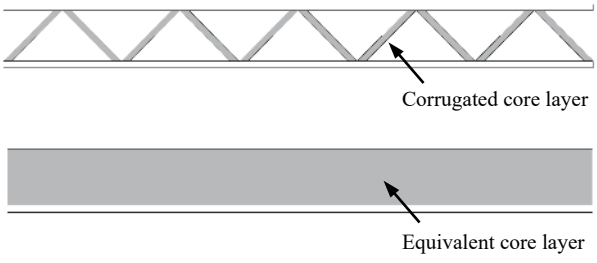


图 2　波纹夹芯板等效示意图

Fig. 2　Equivalent models of corrugated sandwich panel

2　波纹夹芯板振动理论模型

考虑到波纹夹芯板的横向剪切变形效应，位移场可表示为如下形式：

$$u(x,y,z;t)=u_0-z\frac{\partial w_0}{\partial x}+f(z)\phi_x$$
$$v(x,y,z;t)=v_0-z\frac{\partial w_0}{\partial y}+f(z)\phi_y$$
$$w(x,y,z;t)=w_0 \tag{2}$$

其中：u_0、v_0、w_0分别为波纹夹芯板中面上任意一点的位移；ϕ_x和ϕ_y分别为波纹夹芯板的直法线沿 x 轴和 y 轴的转角；$f(z)$是决定横向剪切应力和应变沿厚度分布的形状函数。表 1 为几种不同剪切形状函数[19, 23-26]。CLPT 不考虑横向剪切变形，低估了挠度，高估了固有频率和屈曲载荷，只适用于薄板，而一阶剪切变形理论 (FSDT) 在此基础上考虑了横向剪切变形，但是在上下表面处不满足面力自由的条件，需要剪切修正因子；ESDT、SSDT 和 TSDT 都考虑了横向剪切变形，且在夹层板的上下表面处满足面力自由的条件，在计算中不需要横向剪切修正因子，很好地克服了 CLPT 和 FSDT 的局限性，三者的横向剪切应力和应变沿厚度的形状分别为指数函数型、正弦函数型和曲线型。

表 1　不同板理论对应的剪切形状函数

Table 1　Shear shape functions corresponding to different plate theories

Shear theory	Function $f(z)$
CLPT	$f(z)=0$
FSDT	$f(z)=z$
SSDT	$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
TSDT	$f(z)=z\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$
ESDT	$f(z)=z\mathrm{e}^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

Notes: CLPT—Classical plate theory; FSDT—First-order shear plate theory; SSDT—Sinusoidal shear deformation theory; TSDT—Third-order shear deformation theory; ESDT—Exponential shear deformation theory.

根据小变形假设，位移-应变关系有：

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3}$$

将式 (2) 代入式 (3) 得到应变分量为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{yy}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix}+f\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(3)}\\ \varepsilon_{yy}^{(3)}\\ \gamma_{xy}^{(3)}\end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=f'\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{(2)}\\ \gamma_{xz}^{(2)}\end{Bmatrix},\varepsilon_{zz}=0 \tag{4}$$

其中，各应变分量的具体表达式为

$$\varepsilon_{xx}{}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial x},\ \varepsilon_{xx}{}^{(1)}=-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},\ \varepsilon_{xx}{}^{(3)}=\frac{\partial \phi_x}{\partial x},$$
$$\varepsilon_{yy}{}^{(0)}=\frac{\partial v_0}{\partial y},\ \varepsilon_{yy}{}^{(1)}=-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2},\ \varepsilon_{yy}{}^{(3)}=\frac{\partial \phi_y}{\partial y},$$
$$\gamma_{xy}{}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x},\ \gamma_{xy}{}^{(1)}=-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y},$$
$$\gamma_{xy}{}^{(3)}=\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x},\gamma_{yz}{}^{(2)}=\phi_y,\gamma_{xz}{}^{(2)}=\phi_x \tag{5}$$

波纹夹芯板的本构关系可表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^{(k)}\\ \sigma_{yy}^{(k)}\\ \tau_{yz}^{(k)}\\ \tau_{xz}^{(k)}\\ \tau_{xy}^{(k)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0\\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

其中，$\sigma_{xx}^{(k)}$、$\sigma_{yy}^{(k)}$和$\tau_{yz}^{(k)}$、$\tau_{xz}^{(k)}$、$\tau_{xy}^{(k)}$为波纹夹芯板的应力和剪应力。

各刚度系数可以表示为

$$Q_{11}^{(k)}=\frac{E_1^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}},Q_{12}^{(k)}=\frac{E_1^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}{1-\nu_{12\,21}^{(k)(k)}},Q_{22}^{(k)}=\frac{E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}},$$
$$Q_{66}=G_{12},Q_{44}=G_{23},Q_{55}=G_{13},Q_{21}=Q_{12} \tag{7}$$

其中：k=1、2、3 分别代表波纹夹芯板的上、中、下层；$E_1{}^{(k)}$、$E_2{}^{(k)}$、$G_{12}{}^{(k)}$、$G_{13}{}^{(k)}$、$G_{23}{}^{(k)}$、$\nu_{12}{}^{(k)}$、$\nu_{21}{}^{(k)}$分别表示上、下面板和芯层的弹性模量、剪切模量和泊松比。

波纹夹芯板系统的势能、动能及外力势可以表示为

$$\delta U=\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8}$$

$$\delta K=\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(\dot{u}\delta\dot{u}+\dot{v}\delta\dot{v}+\dot{w}\delta\dot{w})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{9}$$

$$\delta V=\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}q\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{10}$$

其中：$\dot{u}$、$\dot{v}$、$\dot{w}$为波纹夹芯板在x、y、z方向的运动速度；q 为外载荷。

根据哈密顿变分原理[27]，得到波纹夹芯板系统的动力学方程为

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\ddot{u}_0-I_1\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}+J_1\ddot{\phi}_x$$
$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\ddot{v}_0-I_1\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}+J_1\ddot{\phi}_y$$
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+q=I_0\ddot{w}_0+I_1\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}-I_2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+K_2\frac{\partial\ddot{\phi}_x}{\partial x}+I_1\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}-I_2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}+K_2\frac{\partial\ddot{\phi}_y}{\partial y}$$
$$\frac{\partial H_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial H_{xy}}{\partial y}-Q_x=J_1\ddot{u}_0-K_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}+J_2\ddot{\phi}_x$$
$$\frac{\partial H_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial H_{xy}}{\partial x}-Q_y=J_1\ddot{v}_0-K_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}+J_2\ddot{\phi}_y \tag{11}$$

其中：

$$\begin{bmatrix}N_{\xi\eta}\\ M_{\xi\eta}\\ H_{\xi\eta}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\xi\eta}\begin{bmatrix}1\\ z\\ f\end{bmatrix}\mathrm{d}z,Q_\xi=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\xi z}f'\mathrm{d}z$$
$$[I_0,I_1,I_2,J_1,J_2,K_2]=\sum_{k=1}^{3}\int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\rho^{(k)}[1,z,z^2,f,f^2,zf]\mathrm{d}z \tag{12}$$

其中，ξ、η可以用x或y表示。

将式 (4)~(6)、式 (12) 代入式 (11) 得到位移形式的运动控制方程为

$$E_{i1}u_0+E_{i2}v_0+E_{i3}w_0+E_{i4}\phi_x+E_{i5}\phi_y=0,\ i=1\sim5 \tag{13}$$

其中：

$$E_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{14}$$

$$E_{22}=A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{15}$$

$$E_{12}=E_{21}=(A_{21}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \tag{16}$$

$$E_{33}=-G_{11}\frac{\partial^4}{x^4}-(G_{12}+G_{21}+4G_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}-G_{22}\frac{\partial^4}{y^4}+I_2\nabla^2(\frac{\partial^2}{\partial t^2})-I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{17}$$

$$E_{44}=R_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+R_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V_{55}-J_2\frac{\partial^2}{t^2} \tag{18}$$

$$E_{55}=R_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+R_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V_{44}-J_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{19}$$

$$E_{13}=E_{31}=B_{11}\frac{\partial^3}{x^3}+(B_{21}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-I_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2} \tag{20}$$

$$E_{14}=E_{41}=D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-J_1\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21}$$

$$E_{15}=E_{51}=E_{24}=E_{42}=(D_{21}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \tag{22}$$

$$E_{23}=E_{32}=-B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}-(B_{21}+2B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y}+I_1\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2} \tag{23}$$

$$E_{25}=E_{52}=D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-J_1\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{24}$$

$$E_{34}=E_{43}=L_{11}\frac{\partial^3}{x^3}+(L_{21}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-K_2\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2} \tag{25}$$

$$E_{35}=E_{53}=(L_{12}+2L_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{22}\frac{\partial^3}{y^3}-K_2\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2} \tag{26}$$

$$E_{45}=E_{54}=(R_{11}+R_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \tag{27}$$

$$[A_{ij},B_{ij},D_{ij},G_{ij},L_{ij},R_{ij},V_{ij}]=\sum_{k=1}^{3}\int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}Q^{(k)}{}_{ij}[1,z,f,z^2,zf,f^2,(f')^2)]\mathrm{d}z \tag{28}$$

假设位移分量为双三角函数，则u_0、v_0、w_0、ϕ_x、ϕ_y可表示为

$$\{u_0,\phi_x\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{U_{mn},\Phi_{xmn}\}\frac{\partial X_m(x)}{\partial x}Y_n(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\{v_0,\phi_y\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{V_{mn},\Phi_{ymn}\}X_m(x)\frac{\partial Y_n(y)}{\partial y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\{w_0\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{W_{0mn}\}X_m(x)Y_n(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{29}$$

其中：$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；ω为波纹夹芯板系统自由振动下的固有频率。满足波纹夹芯板在 4 种边界条件下的位移分量形式可以用表 2 的函数表示。

表 2　不同边界条件下的函数 $X_m(x)$ 和 $Y_n(y)$
Table 2　Functions $X_m(x)$ and $Y_n(y)$ for different boundary conditions

Boundary conditions	Function $X_m(x)$	Function $Y_n(y)$
SSSS	$\sin\alpha x$	$\sin\beta x$
CCCC	$1-\cos 2\alpha x$	$1-\cos 2\beta x$
CCSS	$1-\cos 2\alpha x$	$\sin\beta x$
CSSS	$\sin\alpha x(\cos\alpha x-1)$	$\sin\beta x$

Notes: SSSS—Four sides simply supported; CCCC—Four sides clamped; CCSS—Opposite sides simply supported and clamped; CSSS—One side fixed and three edges clamped; $\alpha=m\pi/a$; $\beta=n\pi/b$; m, n—Half-wave numbers in two orthogonal coordinate directions respectively.

将式 (14) 代入式 (13) 可得系统的特征方程，简写为

$$\left\{\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right\}\{\boldsymbol{\delta}\}=0 \tag{30}$$

其中：$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{K}$分别为波纹夹芯板系统的质量矩阵和刚度矩阵；$\{\delta\}^{\mathbf{T}}=\left\{U_{mn},V_{mn},\Phi_{xmn},\Phi_{y_{mn}},W_{0mn}\right\}$为系统的振动幅值。由于它们的取值是任意性的，因此令该特征方程的系数行列式为 0，求解该代数方程，即可得到波纹夹芯板自由振动时的固有频率。

3　数值算例及讨论

根据以上理论模型，编写程序计算波纹夹芯板在不同板理论下的固有频率，并且与 ABAQUS 有限元仿真结果进行对比，验证理论模型的正确性。此外，计算了不同边界条件下波纹夹芯板的基频，分析边界条件对波纹夹芯板振动特性的影响。同时，研究在四种不同边界条件下波纹夹芯板材料参数及结构几何参数的变化对波纹夹芯板基频的影响。

3.1　波纹夹芯板的固有频率

设波纹夹芯板的长 a=240 mm，宽 b=188.3 mm，上、下面板厚度 h_{f}=1 mm，波纹与面板的夹角 θ=45°，波纹壁厚 t_{c}=1 mm，芯层厚度 h_{c}=8 mm。波纹夹芯板三层所采用的基体均为铝材料，其材料参数为：杨氏模量 E_{s}=71 GPa，泊松比 ν_{s}=0.3，剪切模量 $G_{\mathrm{s}}=E_{\mathrm{s}}/2(1+\nu_{\mathrm{s}})$，密度 ρ_{s}=2 810 kg/m^3。

对波纹夹芯板系统进行无量纲化，无量纲化的频率可以定义为

$$\varpi=\frac{\omega a^2}{h}\sqrt{\frac{12\rho_{\mathrm{s}}(1-\nu_{\mathrm{s}}^2)}{E_{\mathrm{s}}}} \tag{31}$$

表 3 为 5 种不同板理论所求得的波纹夹芯板在四边简支边界条件下的前五阶固有频率。可以看出，采用 SSDT、TSDT、ESDT 理论所求得的固有频率与有限元误差较小，全部小于 3%，FSDT 由于需要剪切修正因子，所求结果误差比以上三个理论略偏大，CLPT 由于未考虑横向剪切变形，高估了固有频率，所求结果相比其余 4 种剪切变形理论，误差要大很多。其中，在基频处，波纹夹芯板的运动和变形相对稳定，剪切应力对板变形的影响相对较小，因此在五种理论中，所求基频与 ABAQUS 有限元仿真相比误差较小。随着固有频率的增加，波纹夹芯板的变形越来越大，运动也愈加剧烈，因此剪切应力影响变大，考虑剪切变形且满足上下表面处面力自由的 SSDT、TSDT 和 ESDT 相对于 CLPT 和 FSDT 所求结果更准确。

在四边简支边界条件下，波纹夹芯板前五阶

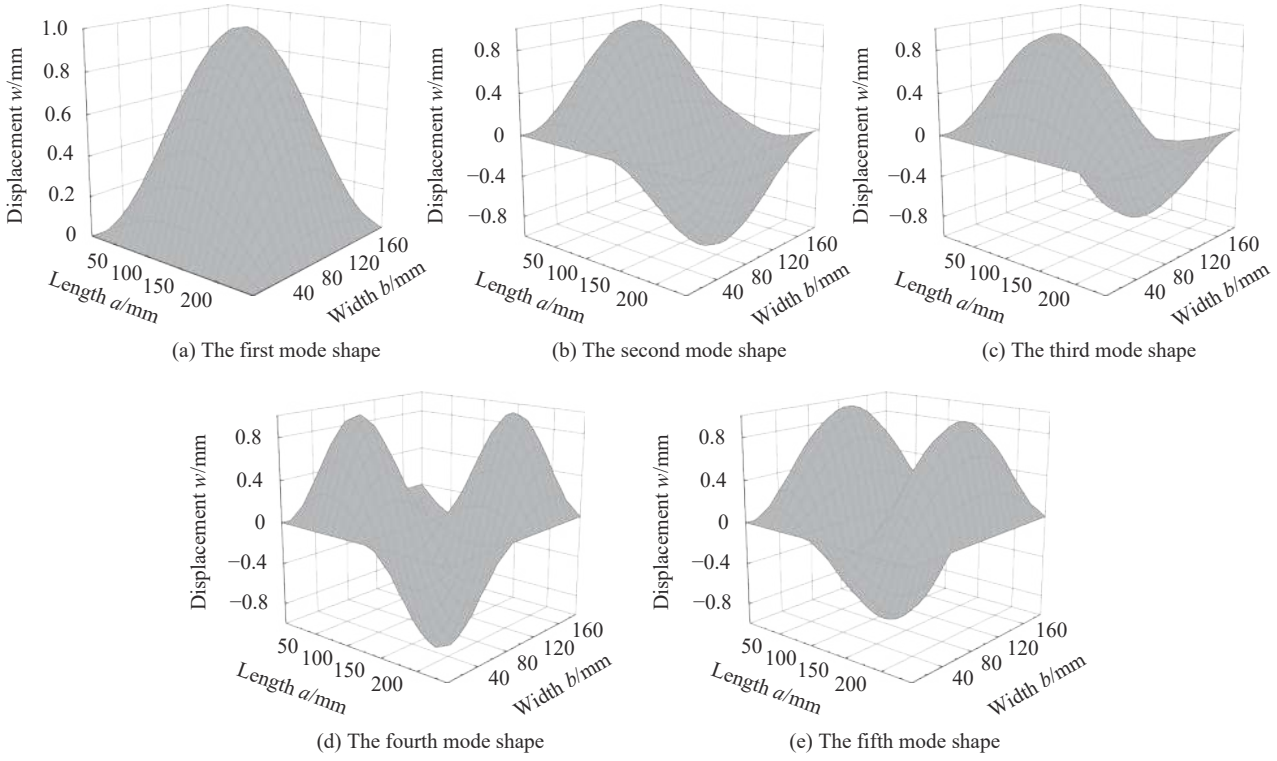
振型模态如图 3 所示。

在四种不同边界条件下，由不同板理论计算的波纹夹芯板在自由振动时的基频与有限元仿真结果如表 4 所示。可以看到，理论解与有限元仿真结果相比，CLPT 由于忽略横向剪切应力导致所求结果稍微偏大，考虑横向剪切变形且满足上下表面处面力自由的 SSDT、TSDT、ESDT 所求结果比 FSDT 和 CLPT 的误差小。因为基频处波纹夹芯板的变形相对高频小，剪应力的影响有限，所以 5 种板理论所求结果误差都在工程允许的误差范

表 3　四边简支波纹夹芯板在不同理论下的固有频率理论解与有限元仿真结果

Table 3　Theoretical solutions and finite element simulation results of natural frequency of simply supported corrugated sandwich plates using different theories

Mode	ABAQUS	CLPT		FSDT		SSDT		TSDT		ESDT	
		Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%
(1,1)	31.18	31.72	1.75	31.41	0.77	31.00	−0.57	31.01	−0.54	30.99	−0.58
(2,1)	65.39	69.52	6.32	68.09	4.13	65.82	0.66	65.88	0.75	65.79	0.61
(1,2)	86.48	88.51	2.36	86.23	−0.29	83.74	−3.16	83.78	−3.12	83.74	−3.17
(2,2)	116.13	125.70	8.24	121.21	4.38	115.60	−0.45	115.72	−0.35	115.57	−0.48
(3,1)	118.46	132.06	11.48	127.11	7.30	119.24	0.66	119.45	0.84	119.12	0.56



(a) The first mode shape　(b) The second mode shape　(c) The third mode shape

(d) The fourth mode shape　(e) The fifth mode shape

图 3　波纹夹芯板前五阶振型图

Fig. 3　The first five mode shapes of the corrugated sandwich plates

表 4　不同边界条件和板理论下波纹夹芯板的基频理论解与有限元仿真结果

Table 4　Theoretical solutions and finite element simulation results of fundamental frequency of corrugated sandwich plates with different boundary conditions and plate theories

Boundary conditons	ABAQUS	CLPT		FSDT		SSDT		TSDT		ESDT	
		Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%	Result	Error/%
SSSS	31.18	31.72	1.75	31.41	0.77	31.00	−0.57	31.01	−0.54	30.99	−0.58
CCCC	56.42	60.46	7.17	58.90	4.40	56.99	1.01	57.03	1.08	56.98	0.99
CCSS	40.47	43.19	6.71	42.44	4.87	41.23	1.88	41.26	1.96	41.22	1.84
CSSS	39.50	42.14	6.70	41.56	5.22	40.66	2.94	40.68	2.99	40.65	2.91

围之内，由此也可验证四种边界条件下所假设的位移函数的正确性。比较四种边界条件下所得到的固有频率可以发现，波纹夹芯板在 CCCC 边界条件下的基频最大，SSSS 边界条件下的基频最小，CCCC 边界条件下的基频基本可以达到 SSSS 的 1 倍左右，CCSS 和 CSSS 边界条件下的固有频率介于上述二者之间，并且两者相差较小，即四种边界条件下波纹夹芯板的基频的关系为 CCCC>CCSS>CSSS>SSSS，由此可以得知，固支边界条件会使波纹夹芯板系统在自由振动时的基频增大。同样这也说明了波纹夹芯板边界的约束越多，系统结构整体刚度越大，导致整个系统频率特征值增大。因此，可以通过设置不同的边界条件来调整波纹夹芯板的固有振动频率。

4 种不同边界条件下的波纹夹芯板的一阶振型模态如图 4 所示。

3.2 参数变化对波纹夹芯板振动特性的影响

波纹夹芯板的材料参数和结构几何参数对其振动有着重要的影响，通过进一步研究波纹夹芯板的振动特性，为其在工程应用方面提供足够的依据。本节将基于 ESDT，研究四种不同边界条件下，波纹夹芯板材料参数和结构几何参数的变化对系统基频的影响。

3.2.1 材料参数变化

波纹夹芯板的上面板、下面板、波纹芯层选用不同的基体材料：Ti 和 Al，研究不同材料组合

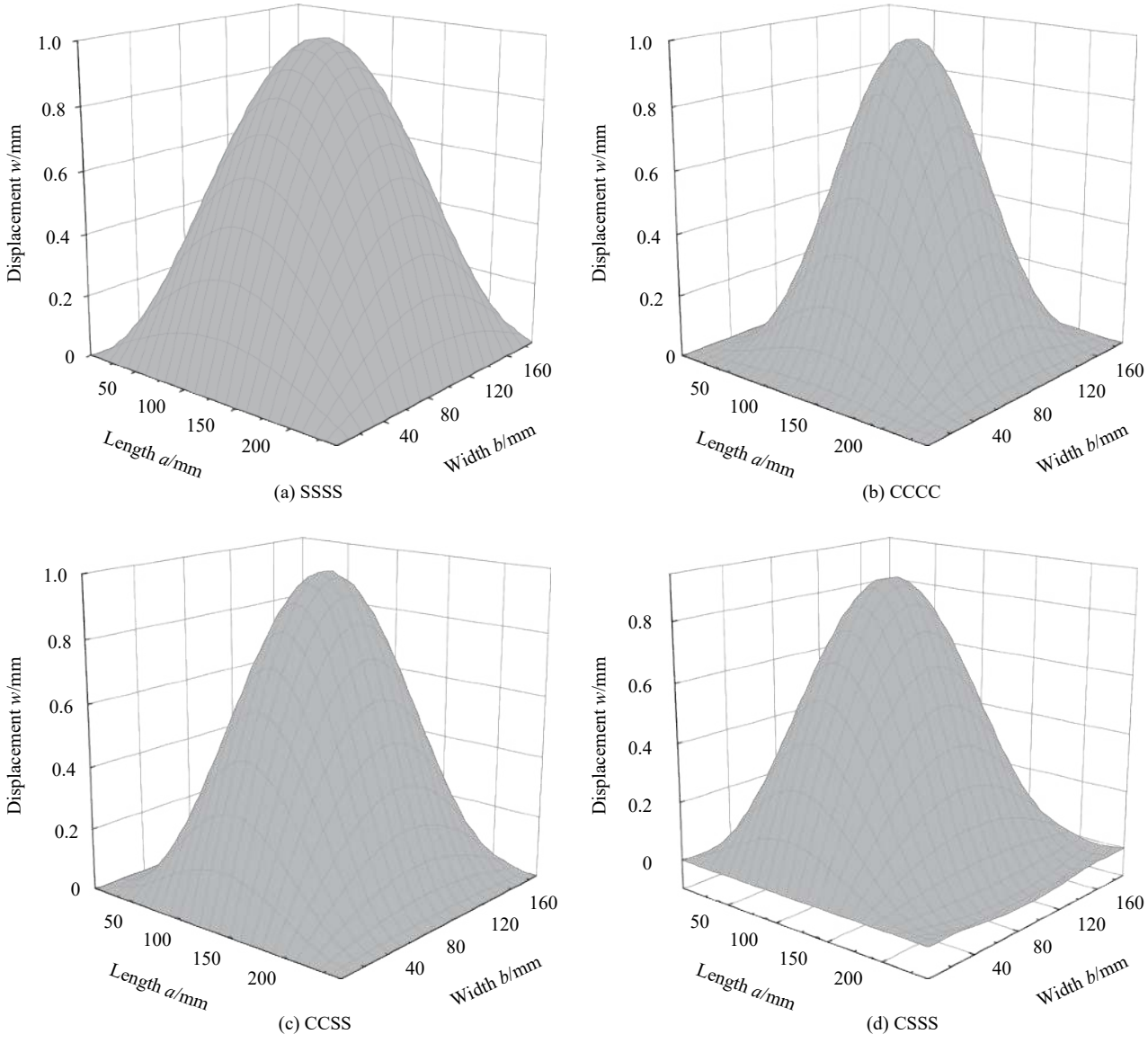


图 4 不同边界条件下波纹夹芯板一阶振型图

Fig. 4 The first mode shapes of corrugated sandwich plates under different boundary conditions

对波纹夹芯板固有频率的影响。Al 的物理参数在前文已给出，Ti 的材料参数为弹性模量 E_t= 177 GPa，泊松比 υ_t = 0.32，密度 ρ_t=4 540 kg/m^3。波纹夹芯板的组合方式为 Ti-Al-Ti、Ti-Ti-Ti、Al-Al-Al 和 Al-Ti-Al。板的其它尺寸与上述算例一致，得到四种边界条件下不同材料组合的波纹夹芯板的基频如表 5 所示。可知，对于每一种边界条件，基于 ESDT 理论计算所得的四种材料组合下波纹夹芯板的基频大小依次为 Ti-Al-Ti> Ti-Ti-Ti> Al-Al-Al> Al-Ti-Al，其中不同材料组合的频率在 CCCC 边界条件下变化稍大一些，但几种边界条件下的变化趋势基本一致。由式 (15) 可知，增大材料的弹性模量，即抗变形能力增强，波纹夹芯板结构的刚度增大，系统整体的频率会增大；增大材料的密度，波纹夹芯板的质量增大，波纹夹芯板的频率会降低，但对于波纹夹芯板的上、下面板，弹性模量的影响更显著；对于芯层，密度影响起主导作用。在工程应用中可以选取适当的材料组合以提高波纹夹芯板的固有频率。

表 5　不同材料组合下波纹夹芯板的基频

Table 5　Fundamental frequencies of corrugated sandwich panels with different material combinations

Boundary conditon	Al-Al-Al	Ti-Ti-Ti	Al-Ti-Al	Ti-Al-Ti
SSSS	30.99	38.72	29.07	40.53
CCCC	56.98	71.16	54.31	71.99
CCSS	41.22	51.46	39.96	52.38
CSSS	40.65	50.76	39.03	52.17

3.2.2　结构几何参数变化

作为一种复合结构材料，波纹夹芯板的结构参数对其振动同样有着重要的影响，为了更好地观察波纹夹芯板的基频随结构几何参数的变化趋势，以下计算不再对系统固有频率进行无量纲化，波纹夹芯板各层采用的材料均为铝。

保持波纹夹芯板的基本尺寸和芯层高度及总高度不变，波纹夹芯板在四种边界条件下的基频随波纹与面板夹角 θ 的变化如图 5 所示。可以看出，随着波纹与面板夹角 θ 的增大，在四种边界条件下，波纹夹芯板基频的变化趋势基本接近，都随着夹角 θ 的增大呈缓慢下降的趋势。由式 (1) 可知，波纹与面板夹角从30°变化到80°度时，芯层弹性模量 E_1 和剪切模量 G_{13} 增大，等效密度增大，其它等效参数变化相对较小，波纹夹芯板系统的刚度虽有一定的增大，但等效密度增大更明显，导致波纹夹芯板的基频呈下降趋势。另外，四种边界条件下，CCCC 和 SSSS 边界条件下基频相差较大，且 CCCC>SSSS；CSSS 和 CCSS 边界条件下所得到的基频位于 CCCC 和 SSSS 之间，CCSS 稍大于 CSSS，但随着夹角的增大两者对应的波纹夹芯板的基频差值增大。波纹与面板的夹角 θ 越大，即波纹折皱密度越大，铝制波纹夹芯板越接近实体铝板。由此也可以得知，铝制波纹夹芯板的固有频率大于相同尺寸的实体铝板。

波纹芯层高度对波纹夹芯板基频的影响如图 6 所示。可知，随着芯层高度占比 h_c/h 的增大，即芯层厚度增大，上、下面板厚度减小，4 种边界条件下波纹夹芯板基频的变化趋势基本接近。由式 (1) 可知，随着波纹芯层高度 h_c 的增大，波纹的结构参数 (斜边长 l_c、半底边长 p) 增大，波纹

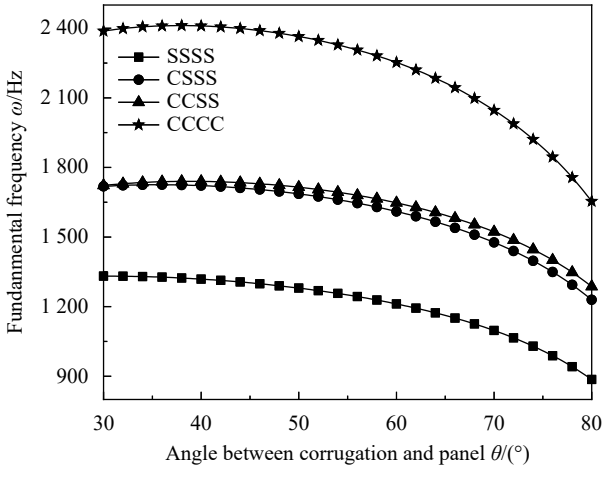


图 5　波纹与面板夹角对波纹夹芯板基频的影响

Fig. 5　Influence of the angle between corrugation and panel on the fundamental frequency of corrugated sandwich panel

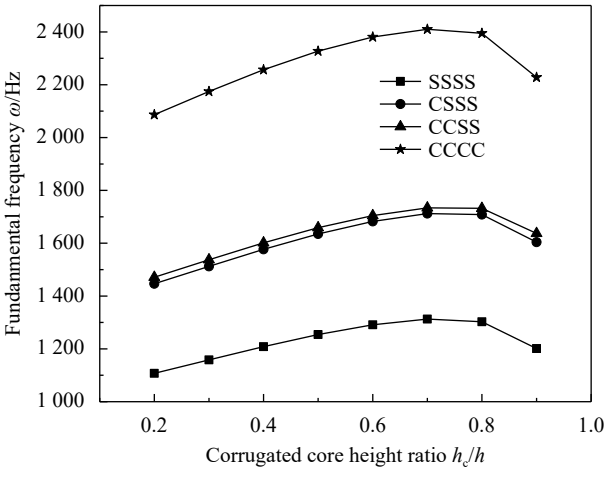


图 6　波纹芯层高度占比对波纹夹芯板基频的影响

Fig. 6　Influence of corrugated core height ratio on the fundamental frequency of corrugated sandwich panel

芯层各个方向的弹性模量和剪切模量减小，导致系统的刚度减小，从而使基频降低，但是随着芯层高度占比 h_c/h 的增大，波纹芯层的等效密度减小，使系统基频增大。因为在 $h_c/h\leqslant0.8$ 时芯层等效密度的影响起主导作用，之后弹性模量和剪切模量的影响起主导作用，所以导致波纹夹芯板的基频先增大后减小。在 $h_c/h=0.8$ 附近，基频达到最大值，在 $h_c/h>0.8$ 时，波纹夹芯板的基频迅速下降。因此可以得知，在实际工程应用中选取适当的芯层占比可以提高波纹夹芯板的固有频率。

波纹夹芯板的基频随波纹壁厚的变化如图 7 所示。由等效参数计算式 (1)，随着壁厚的增加，波纹芯层的剪切模量和弹性模量增大，且 E_{12} 呈直线增大，系统刚度增大，同样芯层的等效密度也呈直线增大，导致系统的基频减小。因为等效密度的影响起主导作用，所以波纹夹芯板的基频持续减小。另外，CCSS 和 CSSS 两种边界条件下的基频的差值略微增大，且 4 种边界条件下，CCCC 边界条件下波纹夹芯板的基频相对于其他 3 种边界条件在壁厚 $t_c\leqslant3$ mm 时下降速度略快一些，其余边界条件下，波纹夹芯板基频的下降趋势基本一致。

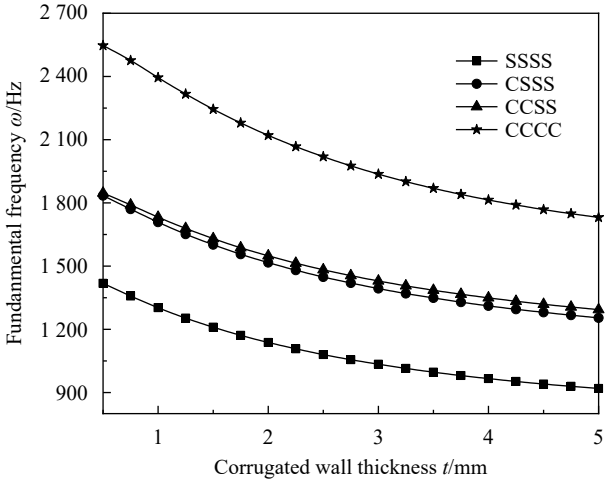


图 7　波纹壁厚度对波纹夹芯板基频的影响

Fig. 7　Influence of corrugated wall thickness on the fundamental frequency of corrugated sandwich panel

波纹夹芯板厚度 h 对波纹夹芯板基频的影响如图 8 所示。可见，波纹夹芯板芯层在各方向的弹性模量和剪切模量在 $h\leqslant30$ 时迅速减小，芯层刚度随之减小，之后几乎保持不变，导致系统的固有频率减小。但是由式 (1) 可知，芯层的等效密度同样在 $h\leqslant30$ 时迅速减小，之后几乎保持不变，且等效密度的影响起着主导作用。当波纹夹

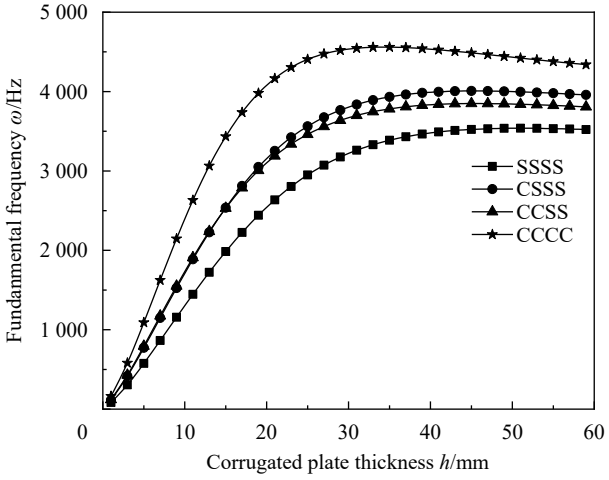


图 8　波纹夹芯板厚度h对波纹夹芯板基频的影响

Fig. 8　Influence of corrugated plate thickness on the fundamental frequency of corrugated sandwich panel

芯板的总厚度 $h<30$ mm时，四种边界条件下波纹夹芯板系统的基频呈现明显增大的趋势，CCCC 边界条件下的基频增长速率最快，CSSS 和 CCSS 边界条件所对应的基频曲线接近重合，在 $h=15$ mm 附近 CSSS 条件下所求的基频开始高于 CCSS 边界条件下所求的基频。当 $h>30$ mm时，四条曲线都趋于平稳，波纹夹芯板基频变化波动很小，此时板的宽厚比 $b/h<6$，波纹夹芯板由薄板逐渐变为厚板。根据以上分析可以得知，在工程应用中适当提高波纹夹芯板的厚度可以提高系统的固有频率。

设 k 为变化比例因子，将波纹夹芯板结构的所有几何尺寸分别乘以比例因子 k，即波纹夹芯板结构整体变大或者缩小，得到的波纹夹芯板基频的变化曲线如图 9 所示。随着 k 的变化，波纹

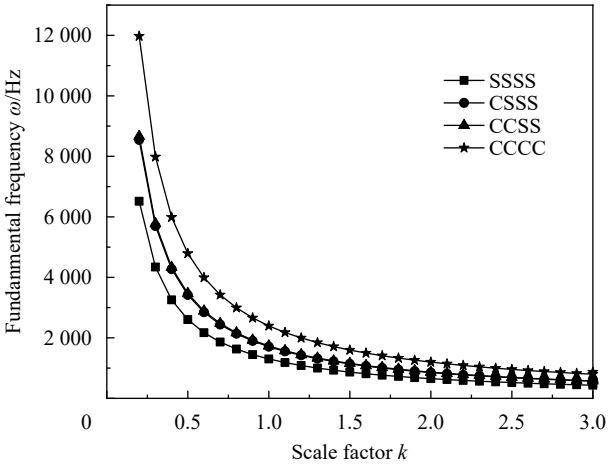


图 9　比例因子k对波纹夹芯板基频的影响

Fig. 9　Influence of scale factor on the fundamental frequency of corrugated sandwich panel

夹芯板芯层的弹性模量、剪切模量和密度保持不变。由于波纹夹芯板长和宽的增大，导致整个系统质量增加，因此系统的固有频率将减小。图中所取变化比例因子 k 为 0.2~3，四种边界下波纹夹芯板的基频在 $k\leqslant 1$时急剧下降，CCSS 和 CSSS 曲线基本重合；在 $k\geqslant 1$时，四种边界条件下的波纹夹芯板系统的基频越来越接近。由此可知，当波纹夹芯板尺寸无限大时，四种边界条件下波纹夹芯板系统的基频会接近相等，且波纹夹芯板尺寸越大系统的基频就越小。

4 结 论

研究了波纹夹芯板在四种边界条件下的自由振动特性，对比了不同板理论所求得的固有频率，并与有限元仿真结果进行了对比。此外，基于指数剪切变形理论 (ESDT) 分析了波纹夹芯板材料参数和结构几何参数的变化对系统固有频率的影响。

(1) 对于基尔霍夫经典板理论 (CLPT)、一阶剪切变形理论 (FSDT)、正弦剪切变形理论 (SSDT)、三阶剪切变形理论 (TSDT)、ESDT 五种板理论，其中 CLPT 由于不考虑板的横向剪切变形，因此求得系统自由振动的固有频率误差最大，FSDT 所求固有频率次之，SSDT、TSDT、ESDT 所求固有频率相近，且与有限元仿真结果相比，误差最小。

(2) 四种边界条件下波纹夹芯板自由振动的基频大小依次为：四边固支 (CCCC)>对边简支和固支 (CCSS)>一边固支三边简支 (CSSS)>四边简支 (SSSS)，且 CCCC 的基频比 SSSS 的基频约大 1 倍，即波纹夹芯板结构的边界约束越多，系统的固有频率越大。

(3) 增大波纹夹芯板材料的弹性模量会导致其刚度变大，进而使系统的基频增大；增大材料密度会导致波纹夹芯板的质量增大，进而使系统的基频减小，对于上、下面板，弹性模量的影响较显著，而对于夹芯层，密度的影响起主导作用。

(4) 波纹夹芯板的结构几何参数对系统的振动有着重要影响。随着波纹与面板的夹角θ或波纹壁厚 t_c 的增大，波纹夹芯板的基频变小；随着芯层占比 h_c/h 的增大，波纹夹芯板的基频先增大后减小；保持 h_c/h、面板占比 h_f/h 不变，随着波纹夹芯板厚度 h 的增大，波纹夹芯板的基频增大明显；随着波纹夹芯板尺寸的增大其基频下降，且四种边界条件下波纹夹芯板的基频趋近相等。

参考文献：

[1] 岳灿甫, 吴始栋. 国外船用激光焊接波纹夹芯板的开发与应用[J]. 鱼雷技术, 2007, 15(4)：1-5.
YUE C F, WU S D. Introduction to development and applications of marine laser welded lightweight sandwich panel in the US navy and european countries[J]. Torpedo Technology，2007，15(4)：1-5(in Chinese).

[2] 贺梦豪, 吴昊, 程远胜. 波纹夹芯杂交夹层板入水砰击动力响应特性研究[J]. 舰船科学技术, 2016, 38(8)：11-17.
HE M H, WU H, CHENG Y S. Dynamic response analysis of hybrid sandwich plate with corrugated-cores subjected to slam-ming impact[J]. Ship Science and Technology，2016，38(8)：11-17(in Chinese).

[3] 孙小曼. 车用波纹夹芯板弯曲性能研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
SUN X M. Analysis of bending performance of vehicle corrugated core sandwich structure[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013(in Chinese).

[4] KUJALA P, KLANAC A. Steel sandwich panels in marine applications[J]. Brodogradnja，2005，56(4)：305-314.

[5] PENG L X, LIEW K M, KITIPORNCHAI S. Analysis of stiffened corrugated plates based on the FSDT via the meshfree method[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2006，49(3)：364-378.

[6] SEMENYUK N P, NESKHODOVSKAYA N A. On design models in stability problems for corrugated cylindrical shells[J]. International Applied Mechanics，2002，38(10)：1245-1252.

[7] BRIASSOULIS D. Equivalent orthotropic properties of corrugated sheets[J]. Computers & Structures，1986，23(2)：129-138.

[8] SOHRAB K, DAN Z. Corrugated all-composite sandwich structures. Part 2: Failure mechanisms and experimental programme[J]. Composites Science and Technology，2009，69(7)：920-925.

[9] TIAN Y S, LU T J. Optimal design of compression corrugated panels[J]. Thin-Walled Structures，2005，43(3)：477-498.

[10] SAMANTA A, MUKHOPADHYAY M. Finite element static and dynamic analyses of folded plates[J]. Engineering Structures，1999，21(3)：277-287.

[11] XIA Y, FRISWELL M I, FLORES E I S. Equivalent models of corrugated panels[J]. International Journal of Solids and Structures，2012，49(13)：1453-1462.

[12] LI X, WANG Z, ZHU F, et al. Response of aluminium corrugated sandwich panels under air blast loadings: Experiment and numerical simulation[J]. International Journal of Impact Engineering，2014，65：79-88.

[13] 王红霞, 王德禹, 李喆. 三角形夹芯板夹心层的等效弹性常

数[J]. 固体力学学报, 2007, 28(2)：178-182.
WANG H X, WANG D Y. LI Z. Equivalent elastic constants of truss-core sandwich plates[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，2007，28(2)：178-182(in Chinese).

[14] 王青伟, 赵才其. 三角形桁架夹芯层等效弹性常数研究和夹芯板参数优化设计[J]. 特种结构, 2010, 27(5)：61-66.
WANG Q W, ZHAO C Q. Research of equivalent elastic constants of triangle truss-core sandwich panels and optimization design of constants of core sandwich panels[J]. Special Structures，2010，27(5)：61-66(in Chinese).

[15] 吴建均, 王永静, 谢敬尧, 等. 泡沫波纹复合夹心梁等效弹性常数的推导及其振动特性研究[J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(11)：73-80.
WU J J, WANG Y J, XIE J Y, et al. Derivation of equivalent elastic constant and vibration analysis of foam-corrugated composite sandwich beam[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University，2018，52(11)：73-80(in Chinese).

[16] 崔岸, 刘芳芳, 张晗, 等. 车身泡沫填充铝合金波纹夹芯板结构性能分析与优化[J]. 汽车工程, 2019, 41(10)：1221-1227.
CUI A, LIU F F, ZHANG H, et al. Performance analysis and optimization of foam-filled aluminum-alloy corrugated sandwich panel structure for vehicle body[J]. Automotive Engineering，2019，41(10)：1221-1227(in Chinese).

[17] 李静雯, 张博明, 孙义亮, 等. 不同铺层方式下连续玻璃纤维/聚丙烯复合材料波纹夹芯板的力学性能[J]. 复合材料学报, 2019, 36(5)：1074-1082.
LI J W, ZHANG B M, SUN Y L, et al. Mechanical properties of continuous glass fiber/polypropylene corrugated sandwich boards under different laminates[J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2019，36(5)：1074-1082(in Chinese).

[18] 刘昆, 王哲, 王自力. 波纹夹层板冲击响应理论计算方法研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(2)：90-97.
LIU K, WANG Z, WANG Z L. Theoretical calculation method for the impact responses of corrugated sandwich panels[J]. Journal of Vibration and Shock，2019，38(2)：90-97(in Chinese).

[19] REDDY J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis[M]. New York: CRC Press, 2004.

[20] CROCE L D, VENINI P. Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2004，193(9–11)：705-725.

[21] MATSUNAGA H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory[J]. Composite Structures，2008，82(4)：499-512.

[22] TALHA M, SINGH B N. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory[J]. Applied Mathematical Modelling，2010，34(12)：3991-4011.

[23] WU C P, LI H Y. An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates[J]. Composite Structures，2010，92：2591-2605.

[24] THAI H T, VO T P. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates[J]. Applied Mathematical Modelling，2013，37：3269-3281.

[25] 曹源, 雷剑. 基于正弦剪切变形理论的功能梯度材料三明治微梁的静动态特性[J]. 复合材料学报, 2020, 37(1)：223-235.
CAO Y, LEI J. Static and dynamic properties of functionally graded materials sandwich microbeams based on sinusoidal shear deformation theory[J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2020，37(1)：223-235(in Chinese).

[26] KARAMA M, AFAQ K S, MISTOU S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity[J]. International Journal of Solids and Structures，2003，40(6)：1525-1546.

[27] REDDY J N. Energy principles and variational methods in applied mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2002.