复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica
第33卷 第8期 8月 2016年
Vol. 33 No. 8 August 2016

DOI：10.13801/j.cnki.fhclxb.20151029.001

基于三维梁理论的复合材料层合管等效抗弯刚度

张恒铭[1]，李峰[1,*]，潘大荣[2]

（1. 解放军理工大学 野战工程学院，南京 210007；2. 南京工程学院 建筑工程学院，南京 211167）

摘　要： 针对任意铺层形式和任意壁厚复合材料圆形层合管件，提出一种等效抗弯刚度的计算方法。此方法采用符合复合材料圆形管件梁真实变形的变形理论，考虑横向剪切变形，非均匀扭转效应，主、次挠曲效应和层合材料的三维弹性效应，按照壳壁中实际应力状态，建立了复合材料圆形管件等效抗弯刚度的计算模型。通过与4种铺层管件的三点弯曲实验结果以及经典层合板理论计算的等效抗弯刚度进行对比，验证了计算模型的正确性。通过退化与各向同性材料抗弯刚度的计算方法进行对比，分析了计算模型的适用性。

关键词： 等效抗弯刚度；复合材料层合管；三维梁理论；三维弹性效应；经典层合板理论

中图分类号： TB330.1；V414.8　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-3851(2016)08-1694-08

树脂基纤维增强复合材料层合圆形管件以其轻质高强、耐腐蚀及结构可设计性等优点，已经作为抗拉压构件、抗弯构件广泛地应用于桁架桥梁结构[1-2]、航空航天桁架支撑结构[3-4]、输电杆塔体系[5]和高速公路交通标志桁架结构等。在承压构件或受弯构件进行整体稳定性和抗弯性能设计中，需首先计算复合材料构件的等效抗弯刚度。

以往复合材料层合管构件抗弯刚度按照以每层等效模量乘以该层惯性矩进行分层叠加的等效方法[6]计算，没有把构件当作一个整体在实际受力状态下考虑，计算精度差。目前复合材料层合管构件抗弯刚度的计算方法主要有3种：经典层合板理论、基于纯弯构件应力应变场计算的弹性理论和梁理论。Wild和Vickers[7]在对复合材料圆形管件分析时，忽略了圆柱壳曲率影响，简化成板模型，按照经典层合板理论计算圆形管件的抗弯刚度，此种计算理论最为简单方便，但是经典层合板理论将三维应力应变关系退化为平面状态，对于圆柱形壳体还忽略了曲率的影响，计算精度较差。Jolicoeur和Cardou[8]、Chouchaoui和Ochoa[9]参考Lekhnitsk[10]应力函数，通过弹性力学理论求解复合材料圆管在纯弯作用下的应力应变场，从而得到了复合材料圆管的抗弯刚度，而经典弹性理论中纯弯计算模型中梁的变形是基于平截面假定的，对于一些中性层不在几何对称面上的圆形管件，平截面假定就不再适用，而且求解过程参数多且相互嵌套耦合，计算十分繁琐。Shadmehri等[11]利用Na[12]、Qin[13]梁的位移场，综合考虑了剪切效应、扭转效应及层合材料的三维应力应变效应，基于非经典梁理论，计算得到了复合材料圆管的抗弯刚度，但是非经典梁理论基于薄壁梁理论，因此计算方法适用于薄壁梁。文献民等[14-15]、Kim和White[16-17]，结合Levinson、Reedy等提出的梁的高阶剪切理论，提出了高阶理论计算方法，同时考虑了横向剪切效应以及层合材料的三维本构关系，基于厚壁梁理论，对复合材料圆管的抗弯刚度进行了预测，该计算方法虽然适用于任意壁厚的梁，但是由于考虑高阶剪切，计算十分冗长、复杂，而且假定扭转是均匀的，而在经典弹性理论圣维南扭转模型中扭转是非均匀的。

本文提出一种满足工程使用精度要求、计算方便的计算方法，此方法采用符合复合材料圆形管件梁真实变形的变形理论，考虑横向剪切变形，根据圣维南扭转模型假设扭转效应为非均匀的，不再做平截面假定，同时考虑了主、次挠曲效应，三维弹性效应和圆柱壳体初始曲率的影响，按照壳壁中实

收稿日期： 2015-08-16；**录用日期：** 2015-10-13；**网络出版时间：** 2015-10-29　13:55
网络出版地址： www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20151029.1355.002.html
基金项目： 国家自然科学基金(51408606)；国家科技支撑计划(2014BAB15B01-05)
通讯作者： 李峰，博士，讲师，研究方向为复合材料力学。　E-mail：lifeng7949@163.com

引用格式： *张恒铭，李峰，潘大荣. 基于三维梁理论的复合材料层合管等效抗弯刚度[J]. 复合材料学报，2016，33(8)：1694-1701.*
ZHANG H M, LI F, PANG D R. Equivalent bending stiffness of composite laminated tube based on 3D beam theory[J]. Acta Matriae Compositae Sinica, 2016, 33(8): 1694-1701 (in Chinese).

http://fhclxb.buaa.edu.cn

际应力状态，建立了复合材料厚壁圆形管件等效抗弯刚度的计算模型。

1 基本理论

1.1 基本假设

复合材料厚壁梁横向表现出较大的柔性，梁经典理论中横向剪切变形绝对刚性的假设将不再适用。以往分析中通常将挠曲变形假定为沿截面厚度大小不变的常量，且忽略次挠曲(沿截面壁厚垂直于中线轮廓的挠曲变形)，但对于圆形截面复合材料厚壁梁，壁厚相对于梁的其他几何尺寸往往不可忽略，且横向剪切较大，此时次挠曲在总挠曲变形中将占主要地位，挠曲变形不再为常量[18]。为了更真实地描述圆形复合材料梁挠曲变形，可引入圣维南扭转模型中扭转非均匀假定。基于以上分析，做出以下假设：

(1) 复合材料圆形管件的材料是均质、连续的各向异性材料；

(2) 周线在既有的平面不变形，即梁的横截面保持圆形；

(3) 变形在弹性阶段为小变形；

(4) 考虑横向剪切效应，并假设剪切应变横截面上均匀分布；

(5) 同时考虑主、次挠曲效应；

(6) 非均匀扭转模型假设，设 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z$ 为曲线坐标的函数。

1.2 位移场

对于复合材料圆形管件，采用笛卡尔直角坐标系 (x, y, z) 和曲线坐标系 (s, z, n)，如图 1 所示。图中曲线坐标为局部坐标，坐标原点位于中面线上，n 为中面线的法线方向，s 为中面线的切线方向。根据以上假设，梁截面上任一点三维位移场为[11-13]

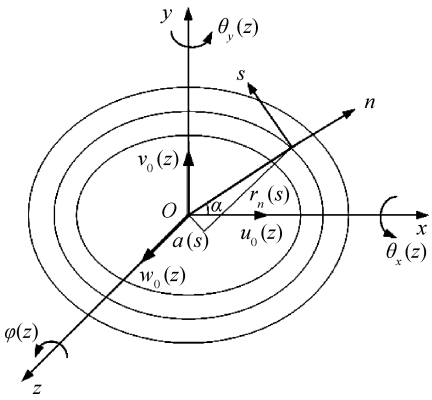

图 1 坐标系和复合材料圆管横截面

Fig. 1 Coordinate system and circular cross-section of composite tube

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(z) - y\varphi(z) \\ v(x, y, z) = v_0(z) + x\varphi(z) \\ w(x, y, z) = w_0(z) + \theta_x(z)\left(y(s) - n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + \\ \qquad \theta_y(z)\left(x(s) + n\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) - \\ \qquad \varphi'(z)(F_w(s) + na(s)) \end{cases} \tag{1}$$

式中：

$$\begin{cases} \theta_x(z) = \gamma_{yz}(z) - v_0'(z) \\ \theta_y(z) = \gamma_{xz}(z) - u_0'(z) \\ a(s) = -y(s)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - x(s)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\theta_x(z)$、$\theta_y(z)$ 分别为绕坐标轴 x、y 的转角；u、v、w 分别为沿坐标轴 x、y、z 方向的位移；F_w 为挠曲函数；$\varphi(z)$ 为绕坐标 z 轴的转角；$u_0(z)$、$v_0(z)$、$w_0(z)$ 为 3 个方向的刚体位移；$\gamma_{yz}(z)$、$\gamma_{xz}(z)$ 分别为平面 yz、xz 的剪切应变；$y(s)$、$x(s)$ 为在曲线坐标系 (s, z, n) 下 y、x 的函数；$a(s)$ 为几何关系中直角三角形的高。

$$F_w = \int_0^s (r_n(s) - \Psi)\mathrm{d}s \tag{3}$$

式中：Ψ 为扭转函数。

对圆形截面的管件，其几何参数定义为

$$\begin{cases} r_n(s) = R \\ R = \dfrac{r_{\mathrm{in}} + r_{\mathrm{out}}}{2} \\ \mathrm{d}s = (R + R_n)\mathrm{d}\alpha \\ x = (R + R_n)\cos\alpha \\ y = (R + R_n)\sin\alpha \end{cases} \tag{4}$$

其中：r_{in} 为内半径；r_{out} 为外半径；R_n 为径向厚度。

1.3 几何关系

根据环向刚性假设，可以得到以下应变场。

轴向应变为

$$\varepsilon_{zz}(n, s, z) = w_0'(z) + \left(x(s) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}n\right)\theta_y'(z) + \left(y(s) - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}n\right)\theta_x'(z) \tag{5}$$

环向切剪应变为

$$\gamma_{sz}(s, z) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left(u_0' + \theta_y(z)\right) +$$

http://fhclxb.buaa.edu.cn

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\left(v_0'+\theta_x(z)\right)+2\delta\varphi'(z) \tag{6}$$

式中：δ 为梁壁中面线围成的面积与其周长的比值。

横向剪切应变为

$$\gamma_{nz}(s,z)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\left(u_0'+\theta_y(z)\right)-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left(v_0'+\theta_x(z)\right) \tag{7}$$

1.4　本构关系

对于正交各向异性层合管，任意第 k 层的非材料主方向的整体坐标系下本构关系为

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ss}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{nn}\\ \tau_{zn}\\ \tau_{sn}\\ \tau_{sz}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26}\\ \overline{Q}_{31} & \overline{Q}_{32} & \overline{Q}_{33} & 0 & 0 & \overline{Q}_{36}\\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0\\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{63} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}_k\begin{bmatrix}\varepsilon_{ss}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{nn}\\ \gamma_{zn}\\ \gamma_{sn}\\ \gamma_{sz}\end{bmatrix}_k \tag{8}$$

式中：$\overline{\boldsymbol{Q}}$ 为偏轴刚度矩阵，由正轴刚度矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 经过坐标转换得到；σ_{ss}、σ_{zz}、σ_{nn} 为 s、z、n 3 个方向的主应力；τ_{zn}、τ_{sn}、τ_{sz} 为 zn、sn、sz 3 个面内的剪应力；ε_{ss}、ε_{zz}、ε_{nn} 为 s、z、n 3 个方向的主应变；γ_{zn}、γ_{sn}、γ_{sz} 为 zn、sn、sz 3 个面内的剪应变。

正交异性的复合材料梁壁有很强的三维特性，需考虑三维本构关系，横截面面外应力 σ_{nn}、σ_{ss}、τ_{sn} 相对于面内应力是小量，可以忽略；但对于某些铺层的层合管泊松比效应影响较大，则横截面面外应力对应的应变 ε_{nn}、ε_{ss}、γ_{sn} 不能忽略[10-17]。

因此令

$$\sigma_{nn}=\sigma_{ss}=\tau_{sn}=0 \tag{9}$$

而相应的应变不为 0，横截面面外应变 ε_{nn}、ε_{ss}、γ_{sn} 通过面内应变按照泊松比耦合效应关系，表示为[17]

$$\begin{cases}\varepsilon_{ss}=\nu_{sz}\varepsilon_{zz}+\eta_{s,sz}\gamma_{sz}\\ \varepsilon_{nn}=\nu_{nz}\varepsilon_{zz}+\eta_{n,sz}\gamma_{sz}\\ \gamma_{sn}=\eta_{sn,zn}\gamma_{zn}\end{cases} \tag{10}$$

式中[18-19]：

$$\nu_{sz}=\frac{\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{23}-\overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{33}}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33}-\overline{Q}_{13}^2}$$

为 z 方向引起 s 方向的泊松耦合系数；

$$\nu_{nz}=\frac{\overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{13}-\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{23}}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33}-\overline{Q}_{13}^2}$$

为 z 方向引起 n 方向的泊松耦合系数；

$$\eta_{s,sz}=\frac{\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{36}-\overline{Q}_{16}\,\overline{Q}_{33}}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33}-\overline{Q}_{13}^2}$$

为 s 方向剪拉耦合系数；

$$\eta_{n,zs}=\frac{\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{16}-\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{36}}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33}-\overline{Q}_{13}^2}$$

为 n 方向剪拉耦合系数；

$\eta_{sn,zn}=-\dfrac{\overline{Q}_{45}}{\overline{Q}_{55}}$ 为交叉耦合系数。

将式(10)代入式(8)，可得到简化的本构关系：

$$\begin{bmatrix}\sigma_{zz}\\ \tau_{sz}\\ \tau_{zn}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{21} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix}_k\begin{bmatrix}\varepsilon_{zz}\\ \gamma_{sz}\\ \gamma_{zn}\end{bmatrix}_k \tag{11}$$

式中矩阵中的 C_{ij} 见附录 A。

1.5　内力平衡方程

在梁壳体壁板上的应力沿截面积分，可得到作用在截面上的合力和合力矩：

$$\begin{cases}F(z)=\iint_A\sigma_{zz}\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s\\ Q_x(z)=\iint_A\left(\tau_{zs}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\tau_{zn}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}s\\ Q_y(z)=\iint_A\left(\tau_{zs}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\tau_{zn}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}s\\ M_w(z)=\iint_A\sigma_{zz}w\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s\\ M_x(z)=\iint_A\sigma_{zz}y\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s\\ M_y(z)=\iint_A\sigma_{zz}x\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s\end{cases} \tag{12}$$

式中：$F(z)$ 为 z 方向的轴向应力；$Q_x(z)$、$Q_y(z)$ 分别为 x、y 方向的剪力；$M_w(z)$ 为绕 z 轴的扭矩；$M_y(z)$、$M_x(z)$ 分别为绕 y、x 方向的弯矩。其中扭矩平衡方程里包含了扭转挠曲对截面的影响。

将式(11)代入式(12)并结合式(5)～式(7)可得到内力与位移的关系：

$$\begin{bmatrix}F\\ M_y\\ M_x\\ Q_x\\ Q_y\\ M_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36}\\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46}\\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56}\\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_0'\\ \theta_y'\\ \theta_x'\\ u_0'+\theta_y\\ v_0'+\theta_x\\ \varphi'\end{bmatrix} \tag{13}$$

其中：K 为等效刚度，可由式(12)积分求得。

1.6　等效抗弯刚度

根据层合管环向刚度一致(即 CUS 型，Circumferentially Uniform Stiffness)的铺层特点，可以将式(13)化简为[11-13]

http://fhclxb.buaa.edu.cn

$$\begin{bmatrix} F \\ M_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{16} \\ K_{61} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0' \\ \varphi' \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & 0 & 0 & K_{25} \\ 0 & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & K_{43} & K_{44} & 0 \\ K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y' \\ \theta_x' \\ u_0' + \theta_y \\ v_0' + \theta_x \end{bmatrix} \tag{15}$$

假设梁只受纯弯曲作用，对式(15)求逆，求得其平衡方程，得到弯矩与曲率的关系：

$$\theta_x' = \frac{K_{44}}{K_{33}K_{44} - K_{34}^2} M_x \tag{16}$$

式中相关 K 值见附录 A。

将经典梁理论 $\theta_x' = \frac{1}{EI} M_x$（其中：$E$ 为弹性模量；I 为截面惯性矩）和式(16)对比可得到等效抗弯刚度

$$[EI] = \frac{K_{33}K_{44} - K_{34}^2}{K_{44}} \tag{17}$$

2 实验验证与分析

2.1 与各向同性材料对比分析

退化为各向同性圆形截面管件，式(17)的等效抗弯刚度为

$$[EI] = \pi E h R^3 \left[\frac{5}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + 1 \right] \tag{18}$$

式中：h 为管壁厚。

而根据材料力学，各向同性圆形截面管件抗弯刚度 EI 定义为

$$EI = \pi E h R^3 \left[\frac{3}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + 1 \right] \tag{19}$$

对比式(18)和式(19)可以看出，厚径比 h/R 不同对抗弯刚度影响也不同，这主要是因为考虑材料三维本构关系效应(对于各向同性材料为厚度方向的泊松比效应；对于复合材料为三维应变效应)的影响；其次还由于在传统的梁理论中，梁的横向变形是自由的，而实际上梁板壁的横向变形是受到临近板壁约束的。

对于相同的截面尺寸的各向同性的圆形管件，可以得到

$$\frac{[EI]}{EI} = \frac{\frac{5}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 1}{\frac{3}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 1} \tag{20}$$

定义径厚比为 $\lambda = r_{\text{out}}/h$ 。将圆形管件大致分为 3 类[20-21]：薄壁管件（$\lambda > 20$）、中厚壁管件（$10 < \lambda < 20$）、厚壁管件（$\lambda < 10$）。因此可知 $0 < 1/\lambda \leqslant 1$。

对于这 3 种不同径厚比类型的管件，分别用式(18)和式(19)计算得到抗弯刚度比值，其误差如图 2 所示。

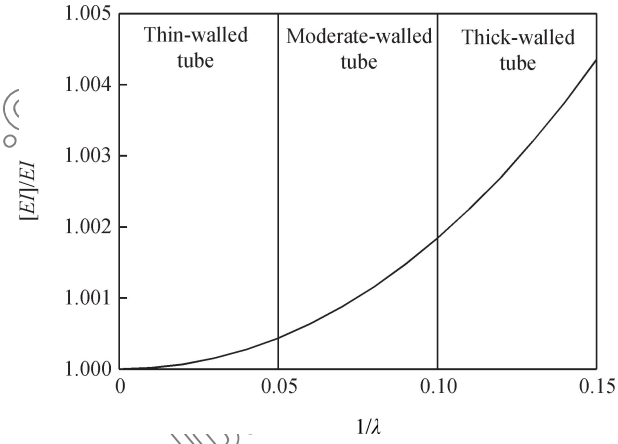

图 2 2 种方法计算的 3 类不同径厚比的各向同性管件抗弯刚度比值

Fig. 2 Ratio of bending stiffness of three kinds of diameter-thickness ratio isotropic tube using two calculation theories

从图 2 可以看出，对于薄壁管件、中厚壁管件 2 种计算方法误差不到 1%；厚壁管件，$1/\lambda < 0.15$ 时误差也不到 1%，2 种理论计算结果大致相等；随着径厚比不断减小，其误差将越来越大。

图 3 为厚壁各向同性的管件 2 种计算理论计算的抗弯刚度比值，可以看出，在 $1/\lambda$ 合理取值范围内，其最大误差可达到 33.3%，此时为实心构件，当 $1/\lambda = 0.59$ 时误差为 10%，当 $1/\lambda = 0.79$ 时误

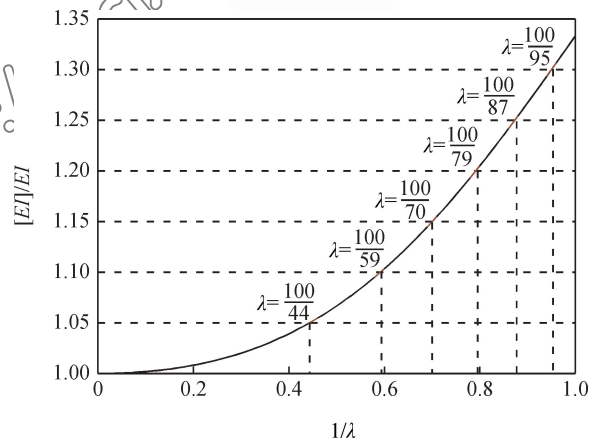

图 3 厚壁各向同性的管件 2 种计算理论计算的抗弯刚度比值

Fig. 3 Ratio of bending stiffness calculated by two calculation theories for thick isotropic tube

http://fhclxb.buaa.edu.cn

差为 20%，当 $1/\lambda = 0.95$ 时误差为 30%。

2.2　与复合材料圆管实验对比分析

通过文献[11]实验数据和本文 2 组三点弯曲实验对该理论进行验证，并与最常用的经典层合板理论计算值进行对比分析。试件材料性能工程常数见表 1。表中：E_1、E_2、E_3 分别为材料在 1、2、3 弹性主方向上的弹性模量；G_{12}、G_{13} 分别为 1-2、1-3 平面内的剪切弹性模量；ν_{12}、ν_{13}、ν_{23} 为泊松比。

表 1　材料性能数据

Table 1　Data of material properties

Material property	Value	
	AS4/PEKK[11]	T700/epoxy
E_1/GPa	138.3	115
$E_2=E_3$/GPa	10.1	7.4
$G_{12}=G_{13}$/GPa	5.56	3.60
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.31	0.30
ν_{23}	0.33	0.35

实验中复合材料圆形管件的铺层顺序和几何尺寸[11]如表 2 所示。表中：D_{in} 为内直径；D_{out} 为外直径；L 为圆管长度；铺层角度为纤维方向与轴向即 z 轴方向的夹角。实验方案为三点弯曲加载。

为了保留原始实验数据并与之对比，根据式(17)将理论计算的抗弯刚度转化为相当于三点弯曲实验中施加的载荷和梁中间底部应变的斜率。

图 4 为文献[11]中复合材料圆形管件 Tube 1 2 种计算理论和实验的载荷-应变曲线。表 3 为文献[11]Tube 1 等效抗弯刚度的理论值与实验值对比。

由图 4 和表 3 可以看出，三维梁理论和经典层合板理论与实验值吻合很好，与实验值的误差分别为 1.5% 和 3.3%。这是因为 Tube 1 的铺层是由 90°、0°、±45°等组成，存在三维应变效应，但无论 0°、90°还是±45°之间是正交铺层，三维应变效应的影响不大。但经典层合板理论未考虑三维应变效应，因此三维梁理论的计算精度要稍好于经典层合板理论。

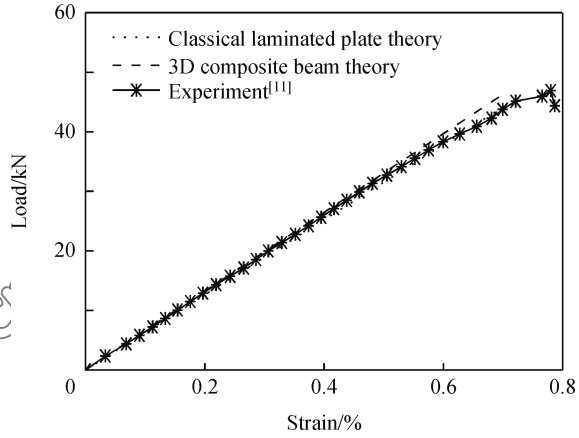

图 4　AS4/PEKK 复合材料 Tube 1 载荷-应变(中间底部)曲线

Fig. 4　Load-strain(at mid-length bottom) curves of AS4/PEKK composite Tube 1

表 3　AS4/PEKK 复合材料 Tube 1 的抗弯刚度理论计算值与实验值对比

Table 3　Bending stiffness of AS4/PEKK composite Tube 1 using calculation theories compared with experiment

Experiment/theory	Bending stiffness/(N·m²)	Difference/%
Experiment[11]	56 553	—
Classical laminated plate theory	54 704	3.3
3D composite beam theory	57 378	1.5

表 2 中 Tube 1 的径厚比 $\lambda = 39/11$，如果Tube 1 为各向同性材料，则三维梁理论与经典材料力学所得抗弯刚度误差只有 1.7%。因此对于正交铺层的管构件，可以用经典材料力学公式计算抗弯刚度。

图 5 为本文三点弯曲实验复合材料圆形管件 Tube 3 2 种计算理论和实验的载荷-应变曲线。表 4 为本文三点弯曲实验 Tube 3 等效抗弯刚度的理论值与实验值对比。由图 5 和表 4 看出，三维梁理论和经典层合板理论与实验值吻合都较好，与实验值误差都在 5% 以内，三维梁理论计算模型精度稍优于经典层合板计算模型。这是因为 Tube 3 最外层的±45°环裹层存在三维应变效应，但是±45°也

表 2　复合材料圆管的铺层顺序和几何尺寸[11]

Table 2　Lay-up sequence and geometry dimension of composite tubes[11]

Tube	Material	Lay-up	D_{in}/mm	D_{out}/mm	L/mm
1	AS4/PEKK	$[(90°_{10}/0°_{10})_3/\pm45°_{25}]$	56	78	890
2	AS4/PEKK	$[90°_{10}/\pm25°_{45}/90°_5/\pm30°_{20}/90°_5/\pm45°_{20}]$	56	98	890
3	T700/epoxy	$[90°_4/\pm45°]$	18	19.8	980
4	T700/epoxy	$[90°_4/\pm60°]$	18	19.8	980

http://fhclxb.buaa.edu.cn

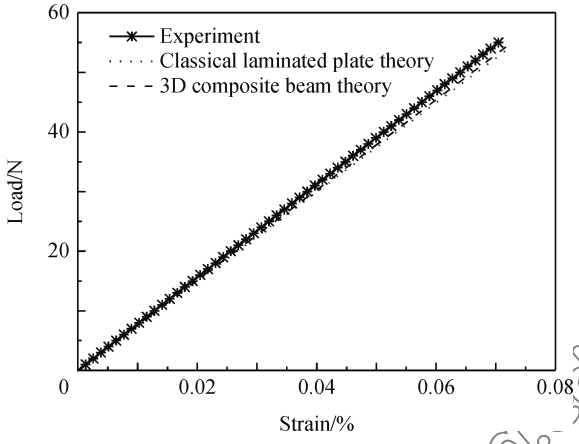

图 5　T700/epoxy 复合材料 Tube 3 载荷-应变(中间底部)曲线

Fig. 5　Load-strain(at mid-length bottom) curves of T700/epoxy composite Tube 3

表 4　T700/epoxy 复合材料 Tube 3 的抗弯刚度理论计算值与实验值对比

Table 4　Bending stiffness of T700/epoxy composite Tube 3 using calculation theories compared with experiment

Experiment/theory	Bending stiffness/(N·m²)	Difference/%
Experiment	189 409	—
Classical laminated plate theory	181 478	4
3D composite beam theory	183 505	3

是正交铺层，三维效应影响不大，但经典层合板理论未考虑三维应变效应，因此三维梁理论较层合板理论精确。

综合 Tube 1 和 Tube 3 实验、理论数据和误差对比分析，对于正交铺层，三维应变效应较小，经典层合板理论和三维梁理论计算模型精度都较高，误差较小，三维梁理论计算模型稍优于经典层合板理论计算模型。

图 6 为文献[11]中的复合材料圆形管件 Tube 2 2 种计算理论和实验值的载荷-应变曲线。表 5 为文献[11]中的复合材料圆形管件 Tube 2 等效抗弯刚度的理论值与实验值对比。由图 6 和表 5 可以看出，三维梁理论与实验值相差较小，而经典层合板理论与实验值相差较大，与实验值的误差达到 68%。

图 7 为本文三点弯曲实验的复合材料圆形管件 Tube 4 2 种计算理论和实验的载荷-应变曲线。表 6 为本文三点弯曲实验的复合材料圆形管件Tube 4 等效抗弯刚度的理论值与实验值对比。从图 7 和

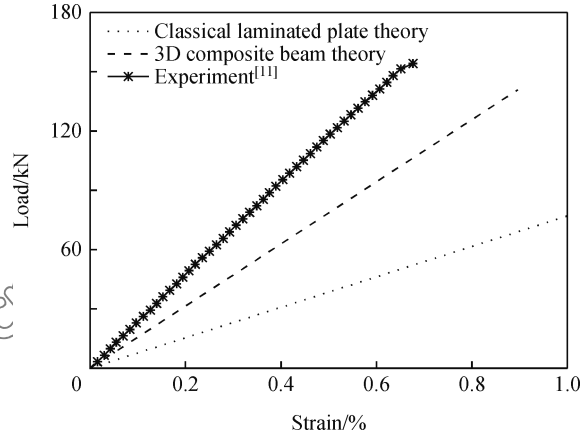

图 6　AS4/PEKK 复合材料 Tube 2 载荷-应变(中间底部)曲线

Fig. 6　Load-strain(at mid-length bottom) curves of AS4/PEKK composite Tube 2

表 5　AS4/PEKK 复合材料 Tube 2 抗弯刚度理论计算值与实验值对比

Table 5　Bending stiffness of AS4/PEKK composite Tube 2 using calculation theories compared with experiment

Experiment/theory	Bending stiffness/(N·m²)	Difference/%
Experiment[11]	258 309	—
Classical laminated plate theory	83 949	68
3D composite beam theory	186 050	28

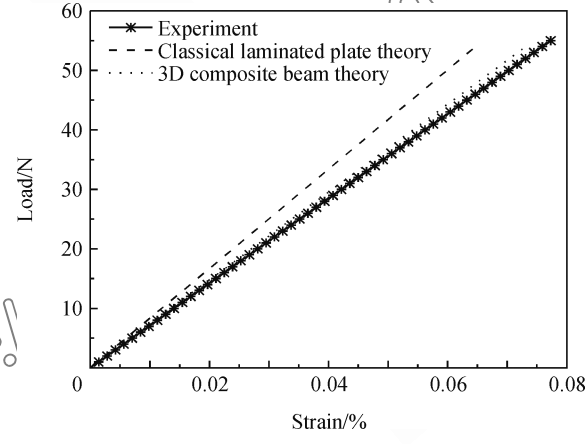

图 7　T700/epoxy 复合材料 Tube 4 载荷-应变(中间底部)曲线

Fig. 7　Load-strain(at mid-length bottom) curves of T700/epoxy composite Tube 4

表 6 可以看出三维梁理论计算结果与实验值吻合较好，而经典层合板理论较三维梁理论吻合较差。经典层合板理论与实验值误差达 17%，而三维梁理论误差为 4%。这主要是因为外面环裹层为±60°，为非正交铺层，三维应变效应影响较大，因此经典层合板计算模型比三维梁理论误差大。

http://fhclxb.buaa.edu.cn

表 6　T700/epoxy 复合材料 Tube 4 抗弯刚度理论计算值与实验值对比

Table 6　Bending stiffness of T700/epoxy composite Tube 4 using calculation theories compared with experiment

Experiment/theory	Bending stiffness/(N · m²)	Difference/%
Experiment	172 573	—
Classical laminated plate theory	202 464	17
3D composite beam theory	179 133	4

综合 Tube 2 和 Tube 4 实验、理论数据和误差对比分析，可以发现对于非正交铺层，经典层合板理论计算模型计算精度较低，而三维梁理论计算模型计算精度较高。

3　结　论

（1）采用符合复合材料圆形管件梁真实变形的变形理论，考虑壳壁中实际应力状态，建立了复合材料圆形管件等效抗弯刚度计算模型，通过公式退化与各向同性材料圆形管件的抗弯刚度公式进行了对比分析，认为该计算模型适用于薄壁、中厚壁以及径厚比(λ)较大的厚壁管件，当 $1/\lambda = 0.59$ 时误差为 10%。

（2）与经典层合板理论相比，三维梁理论与实验值误差较小，这是由于计算模型考虑了复合材料梁变形的真实模态和三维效应影响。

（3）三维梁理论和经典层合板理论在计算正交铺层复合材料圆形管件抗弯刚度上精度均较高，具有较好的适用性。

（4）对于非正交和非对称的复杂铺层复合材料圆形管件，三维应变效应影响很大，采用经典层合板理论计算抗弯刚度误差较大，不再适用。

附录 A：

$$C_{11} = \overline{Q}_{22} + \frac{(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{23} - \overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{33})\,\overline{Q}_{21} + \overline{Q}_{23}(\overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{13} - \overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{23})}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33} - \overline{Q}_{13}^2}$$

$$C_{12} = \overline{Q}_{26} + \frac{\overline{Q}_{21}(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{36} - \overline{Q}_{16}\,\overline{Q}_{33}) + \overline{Q}_{23}(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{16} - \overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{36})}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33} - \overline{Q}_{13}^2}$$

$$C_{21} = \overline{Q}_{62} + \frac{\overline{Q}_{61}(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{23} - \overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{33}) + \overline{Q}_{63}(\overline{Q}_{12}\,\overline{Q}_{13} - \overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{23})}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33} - \overline{Q}_{13}^2}$$

$$C_{22} = \overline{Q}_{66} + \frac{\overline{Q}_{61}(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{36} - \overline{Q}_{16}\,\overline{Q}_{33}) + \overline{Q}_{63}(\overline{Q}_{13}\,\overline{Q}_{16} - \overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{36})}{\overline{Q}_{11}\,\overline{Q}_{33} - \overline{Q}_{13}^2}$$

$$C_{33} = \overline{Q}_{44} - \frac{\overline{Q}_{45}^2}{\overline{Q}_{55}}$$

$$K_{33} = \iint_A C_{11}\left(y(s) - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}n\right)y\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s$$

$$K_{34} = \iint_A C_{12}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}y\,\mathrm{d}n\mathrm{d}s$$

$$K_{44} = \iint_A \left(C_{22}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + C_{33}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}s$$

参考文献：

[1] ZHANG D D, HUANG Y X, ZHAO Q L, et al. Flexural properties of a lightweight hybrid FRP-aluminum modular space truss bridge system[J]. Composite Structures, 2014, 108: 600-615.

[2] LI F, ZHAO Q L, CHEN L, et al. Experimental and theoretical research on the compression performance of CFRP sheet confined GFRP short pipe[J]. The Scientific World Journal, 2014, 2014: 1-12.

[3] JEGLEY D C, WU K C, PHELPS J E, et al. Structural efficiency of composite struts for aerospace applications[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2012, 49(5): 915-924.

[4] SCHÜTZE R. Lightweight carbon fibre rods and truss structures[J]. Materials & Design, 1997, 18(4-6): 231-238.

[5] 张兴虎，刘永辉，冯海潮. FRP 管材轴心受压构件的稳定性能[J]. 玻璃钢/复合材料，2014(2)：19-22.
ZHANG X H, LIU Y H, FENG H C. Stable performance of FRP tube axial compression members[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2014(2): 19-22 (in Chinese).

[6] 钱鹏，叶列平，翁冠群. CFRP 杆轴心受力失效模式与变形性能研究[C]//第三届全国 FRP 学术交流会议论文集. 北京：中国土木工程学会，2004：349-355.
QIAN P, YE L P, WENG G Q. Study of failure models and deformation of CFRP poles under uni-axial loading[C]// Proceeding of the 3rd National FRP Conference. Beijing: China Civil Engineering Society, 2004:349-355 (in Chinese).

[7] WILD P M, VICKERS G W. Analysis of filament-wound cylinderical shells under combined centrifugal pressure and axial loading[J]. Composites Part A: Applied Science & Manufacturing, 1997, 28(1): 47-55.

[8] JOLICOEUR C, CARDOU A. Analytical solution for bending of coaxial orthotropic cylinders[J]. Engineering Mechanics, 1994, 120(12): 2556-2574.

[9] CHOUCHAOUI C S, OCHOA O. Similitude study for a laminated cylindrical tube under tensile, torsion, bending, internal and external pressure. Part I: Governing equations[J]. Composite Structures, 1999, 44(4): 221-229.

[10] LEKHNITSKII S G. Theory of elasticity of an anisotropic body[M]. Moscow: MIR Publishers, 1981: 215-256.

[11] SHADMEHRI F, DERISI B, HOA S V. On bending stiff-

http://fhclxb.buaa.edu.cn

ness of composite tubes[J]. Composite Structures, 2011, 93(9): 2173-2179.

[12] NA S. Control of dynamic response of thin-walled composite beams using structural tailoring and piezoelectric actuation [D]. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.

[13] QIN Z M. Vibration and aeroelasticity of advanced aircraft wings modeled as thin-walled beams: Dynamics, stability and control[D]. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.

[14] 姜鲁珍，文献民，马兴瑞，等. 复合材料圆管件的等效模型研究[J]. 工程力学，2000，17(3)：127-132.
JIANG L Z, WEN X M, MA X R, et al. On the equivalent model of composite tubular element[J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(3): 127-132 (in Chinese).

[15] 文献民，王本利，马兴瑞. 复合材料圆管件等效模量的计算方法[J]. 复合材料学报，1999，16(2)：136-140.
WEN X M, WANG B L, MA X R. On the effevtive modulus of composite tubulus element[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 1999, 16(2): 136-140 (in Chinese).

[16] KIM C, WHITE S R. Analysis of thick hollow composite beams under general loadings[J]. Composite Structures, 1996, 34(3): 263-277.

[17] KIM C, WHITE S R. Thick-walled composite beam theory including 3D elastic effects and torsional warping[J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(31-32): 4237-4259.

[18] ODEN J T, RIPPERGER E A. Mechanics of elastic structures[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980: 125-134.

[19] 沃丁柱. 复合材料大全[M]. 北京：化学工业出版社，2001：479-483.
WO D Z. Encyclopedia of composites[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2001: 479-483 (in Chinese).

[20] DERISI B. Development of thermoplastic composite tubes for large deformation[D]. Oregon: Concordia University, 2008.

[21] 彭超义. 空间运载器推力支架用复合材料管件轴压性能研究[D]. 长沙：国防科学技术大学，2006.
PENG C Y. Study on the axial compression properties of the composite cylinders for the thruster truss structures in aerospace launch vehicles[D]. Changsha: National University of Defence Technology, 2006 (in Chinese).

Equivalent bending stiffness of composite laminated tube based on 3D beam theory

ZHANG Hengming[1], LI Feng[1,*], PAN Darong[2]

(1. College of Field Engineering, PLA University of Science & Technology, Nanjing 210007, China;
2. School of Architecture Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

Abstract: In response to composite tube with arbitrary lamination and thickness, an approach of the equivalent bending stiffness was presented. The deformation theory with realistic deformation of composite tube beam was used in this analysis. Transverse shear deformation, non-uniform torsion effects, the primary and the secondary warping effects and 3D elastic effects in laminate material were considered. According to the actual stress state of the shell wall, the caculation model of the equivalent bending stiffness of the composite tube was established. By comparison with three-point bending experimental data and the equivalent bending stiffness calculated by classical laminated plate theory of four composite tubes, the calculation model was validated. The application of the calculation model was analyzed by comparing degradation of the present theory with the calculation method of bending stiffness of isotropic material.

Keywords: equivalent bending stiffness; composite laminated tubes; 3D beam theory; 3D elastic effects; classical laminated plate theory

http://thcxb.buaa.edu.cn