复 合 材 料 学 报

ACTA NATERIAE COMPOSITAE SINICA

一九八四年　　第一期

复合材料闭口薄壁杆件的平衡问题

陈 烈 民

摘　　要

本文根据现有均匀各向同性材料薄壁杆件的理論，导出了复合材料閉口薄壁杆件拉伸、弯曲、自由扭轉和約束扭轉的基本方程和有关的公式，可供工程設計計算之用。

前　　言

纤维增强复合材料已在工程结构中得到日益广泛的应用。复合材料闭口薄壁杆件（如圆形、矩形及其它形状的薄壁管）是常用构件形式之一，可用来承受拉伸、弯曲及扭转载荷。因此，如何求解闭口薄壁杆件的平衡问题是一个需要解决的课题。

目前关于复合材料构件的分析工作均偏重于板、壳或板条梁（实际是板的特例），对薄壁杆件的分析尚缺乏适用的方法。本文目的在于：把均匀材料薄壁杆的经典梁弯曲理论、自由扭转理论和约束扭转理论（Уманский第二理论）推广到复合材料闭口薄壁杆情形，从而导出了求解拉伸、弯曲、自由扭转和约束扭转的基本方程和有关的公式，可供工程设计计算之用。

为了使问题简化，本文假设杆件只含0°、90°、±φ°的铺层方式。这种假设是符合目前大多数工程结构情形，因而本文在实用上仍不失其一般意义。

一　自由扭轉分析

任意形状的闭口薄壁杆件断面如图1。周边切向为S、法向为t，杆件纵向为z。薄壁由许多单层复合材料组成，总壁厚为$\delta(s)$。

假设$\sigma_t=0$，根据复合材料力学公式[1]，各单层的应力应变关系为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_s \\ \sigma_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_s \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

本文1983年11月收到。

其中Q_{ij}（i，j=1，2，6）为各单层的折减刚度系数。

进一步假设$\sigma_s=0$，则由（1）得到

$$\sigma_z=E\varepsilon_z+K\gamma_{sz} \tag{2}$$

$$\tau_{sz}=K\varepsilon_z+G\gamma_{sz} \tag{3}$$

其中

$$E=Q_{11}-\frac{Q_{12}^2}{Q_{22}}$$

$$K=Q_{16}-\frac{Q_{26}Q_{12}}{Q_{22}} \tag{4}$$

$$G=Q_{66}-\frac{Q_{26}^2}{Q_{22}}$$

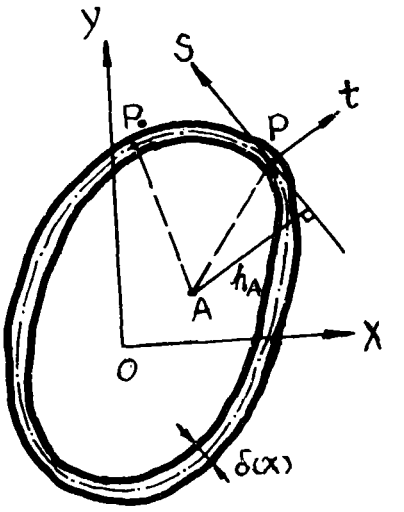

图1　薄壁杆件断面形状

因本文仅考虑单层方向为0°、90°、±φ°的实用情形，如把±φ°作为一个单层看待，由复合材料力学公式[1]可知，$K\equiv0$，故（2）、（3）简化为：

$$\sigma_z=E\varepsilon_z \tag{5}$$

$$\tau_{sz}=G\gamma_{sz} \tag{6}$$

（5）、（6）与均匀各向同性材料的应力应变关系形式相同，但E、G应按（4）计算，且它们沿壁厚方向是变化的。

对于自由扭转问题，因无纵向约束，故$\sigma_z=0$，由应力平衡方程可导出：

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_\delta \tau_{sz}dt=0$$

即

$$\int_\delta \tau_{sz}dt=T \tag{7}$$

这里常量T称为剪流。以（6）代入（7），并假设剪应变γ_{sz}沿壁厚不变，可得到

$$\gamma_{sz}(s)=\frac{T}{\overline{G\delta}(s)} \tag{8}$$

其中

$$\overline{G\delta}=\int_\delta Gdt \tag{9}$$

如图1，设h_A为自断面内某点A到中线切线的垂直距离，则由定义可得杆的扭矩为：

$$M_z=\oint\int_\delta \tau_{sz}h_Adtds=T\oint h_Ads=T\Omega \tag{10}$$

这里Ω为中线所围面积的两倍。与均匀材料杆情形不同，这里τ_{sz}沿壁厚是不均匀分布的，因此剪流T的作用线与中线一般并不相符，因此（10）具有一定的近似性。但因壁厚极薄，其误差是不大的。

设沿作用线的切向位移为 u，并假设断面在扭转后不产生变形而仅作刚体转动。因此，

$$u=h_A(s)\theta(z) \tag{11}$$

这里 θ 是断面的转角。

剪切应变与位移关系已知为

$$\gamma_{sz}=\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z} \tag{12}$$

这里 w 是沿 z 向的断面纵向翘曲位移。以（8）、（11）代入（12），对 s 积分后可得：

$$\omega(s)=T\int_{P_0}^{P}\frac{ds}{G\delta}-\omega_A(s)\frac{d\theta}{dz}+\zeta \tag{13}$$

这里 ζ 为常量，$\omega_A(s)$ 称为扇性坐标

$$\omega_A(s)=\int_{P_0}^{P}h_A ds \tag{14}$$

由于自 P_0 点沿中线绕一周后 w 仍回到起始值 ζ，故由（13）可得

$$T=\frac{\oint h_A ds}{\oint\frac{ds}{G\delta}}\frac{d\theta}{dz}=\frac{\Omega}{\oint\frac{ds}{G\delta}}\frac{d\theta}{dz} \tag{15}$$

以（15）代入（8）、（6）、（10）、（13），可得自由扭转的各个计算公式如下

$$\gamma_{sz}=e(s)\frac{d\theta}{dz} \tag{16}$$

$$\tau_{sz}=Ge(s)\frac{d\theta}{dz} \tag{17}$$

$$M_z=GI_0\frac{d\theta}{dz} \tag{18}$$

$$w=-\omega_A^*(s)\frac{d\theta}{dz}+\zeta \tag{19}$$

其中

$$e(s)=\frac{\Omega}{G\delta\oint\frac{ds}{G\delta}} \tag{20}$$

$$\overline{GI}_0=\frac{\Omega^2}{\oint\frac{ds}{G\delta}} \tag{21}$$

$$\omega_A^*(s)=\omega_A(s)-\int_{P_0}^{P}e(s)ds \tag{22}$$

如果 $G=const$，则（16）～（22）与均匀各向同性材料杆自由扭转公式[3][4]相一致。

二 考虑約束扭轉的薄壁杆件一般平衡問題分析

现在进一步考虑包括约束扭转在内的闭口薄壁杆件的一般平衡问题。仍假设断面不变形而仅作刚体运动，因此

$$u(s,z)=\xi(z)\frac{dx(s)}{ds}+\eta(z)\frac{dy(s)}{ds}+\theta(z)h_A \tag{23}$$

其中ξ、η为断面沿x、y向的刚体位移（即弯曲挠度），$x(s)$，$y(s)$为P点的坐标。以（23）代入（12），其中γ_{sz}仍采用上述自由扭转的公式（16），对s积分后可得：

$$w(s,z)=\zeta(z)-\frac{d\xi(z)}{dz}x(s)-\frac{d\eta(z)}{dz}y(s)$$

$$-\frac{d\beta(z)}{dz}\omega_A^*(s) \tag{24}$$

这里按照Уманский第二理论[2]，我们用另一个待定函数$\beta(z)$来代替转角$\theta(z)$。纵向应变与位移关系已知为

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{25}$$

以（23）、（24）代入（12）和（25），可得

$$\gamma_{sz}=\frac{d\theta}{dz}h_A-\frac{d\beta}{dz}(h_A-e)$$

$$\varepsilon_z=\frac{d\zeta}{dz}-\frac{d^2\xi}{dz^2}x-\frac{d^2\eta}{dz^2}y-\frac{d^2\beta}{dz^2}\omega_A^* \tag{26}$$

利用（5）、（6），杆单位长度的应变能表示为

$$V=\frac{1}{2}\oint\int_\delta(G\gamma_{sz}^2+E\varepsilon_z^2)dtds \tag{27}$$

引进如下条件

$$\oint\int_\delta Exdtds=0,\qquad \oint\int_\delta Eydtds=0 \tag{28 a}$$

$$\oint\int_\delta Exydtds=0 \tag{28 b}$$

$$\oint\int_\delta Ex\omega_A^*dtds=0,\qquad \oint\int_\delta Ey\omega_A^*dtds=0 \tag{28 c}$$

$$\oint\int_\delta E\omega_A^*dtds=0 \tag{28 d}$$

以(26)代入（27），并引用（28）可得

$$V=\frac{1}{2}\overline{EF}\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2+\frac{1}{2}\overline{EJ_y}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}\right)^2+\frac{1}{2}EJ_x\left(\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\overline{EJ_w}\left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)^2+\frac{1}{2}\overline{GI_\rho}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2+\frac{1}{2}(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})$$

$$\cdot\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2-(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})\frac{d\beta}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz} \tag{29}$$

其中

$$\overline{EF}=\oint\int_\delta Edtds,\qquad \overline{EJ_y}=\oint\int_\delta Ex^2dtds$$

$$\overline{EJ_x}=\oint\int_\delta Ey^2dtds,\qquad \overline{EJ_w}=\oint\int_\delta E(\omega_A^*)^2dtds \tag{30}$$

$$\overline{GI_\rho}=\oint\int_\delta Gh_A^2dtds,\qquad \overline{GI_0}=\frac{\Omega^2}{\oint\frac{ds}{G\delta}}$$

设杆表面受到沿 x、y、z 向的单位面积分布载荷 p_x、p_y、p_z，因而在单位杆长上作用的力与力矩载荷可定义为

$$q_x=\oint p_xds,\qquad m_x=\oint p_zyds$$

$$q_y=\oint p_yds,\qquad m_y=\oint p_zxds$$

$$q_z=\oint p_zds,\qquad m_z=\oint[p_y(x-x_A)-p_x(y-y_A)]ds$$

$$b=\oint p_z\omega_A^*ds, \tag{31}$$

其中 b 为由外载 p_z 引起的双力矩。

单位杆长上分布载荷所作功为：

$$W=q_x\xi+q_y\eta+m_z\theta+\oint p_zwds$$

以（24）代入，并引用（31）定义，可得

$$W=q_x\xi+q_y\eta+m_z\theta+q_z\xi-m_y\frac{d\xi}{dz}-m_x\frac{d\eta}{dz}-b\frac{d\beta}{dz} \tag{32}$$

现在引进内力和内力矩定义如下

$$P=\oint\int_\delta\sigma_zdtds,\qquad Q_x=\frac{dM_y}{dz}+m_y$$

$$M_x=\oint\int_\delta\sigma_zydtds,\qquad Q_y=\frac{dM_x}{dz}+m_x$$

$$M_y = \oint\!\!\int_\delta \sigma_z x dt ds, \qquad B = \oint\!\!\int_\delta \sigma_z \omega_A^* dt ds \tag{33}$$

$$M_z = \oint\!\!\int_\delta \tau_{sz} h_A dt ds,$$

其中 P 为轴向力，M_x、M_y 为弯矩，M_z 为扭矩，Q_x、Q_y 为剪力，B 为双力矩。由于 σ_z、τ_{sz}沿壁厚是不均匀分布，故其合力作用线与断面中线一般并不相符。因此（33）中的 M_x、M_y、M_z公式有一定近似性，但对薄壁断面情形其误差是不大的。

以（5）、（6）代入（33），并利用（26），亦可把内力及内力矩用广义位移表示

$$P = \overline{EF}\frac{d\zeta}{dz}, \qquad Q_x = -\overline{EJ_y}\frac{d^3\xi}{dz^3} + m_y$$

$$M_x = -\overline{EJ_x}\frac{d^2\eta}{dz^2}, \qquad Q_y = -\overline{EJ_x}\frac{d^3\eta}{dz^3} + m_x$$

$$M_y = -\overline{EJ_y}\frac{d^2\xi}{dz^2}, \qquad B = -\overline{EJ_w}\frac{d^2\beta}{dz^2}$$

$$M_z = \overline{GI_\rho}\frac{d\theta}{dz} - (\overline{GI_\rho} - \overline{GI_0})\frac{d\beta}{dz} \tag{34}$$

在杆两端处（$z=0$，l）外载所作功为

$$W_1 = \oint\!\!\int_\delta \overline{\sigma_z} w dt ds + \overline{Q}_x\xi + \overline{Q}_y\eta + \overline{M}_z\theta$$

以（24）代入，并引用（33）定义，可得

$$W_1 = \overline{P}\zeta - \overline{M}_y\frac{d\xi}{dz} - \overline{M}_x\frac{d\eta}{dz} - \overline{B}\frac{d\beta}{dz} + \overline{Q}_x\xi + \overline{Q}_y\eta + \overline{M}_z\theta \tag{35}$$

以上各符号上加“—”者均表示为端点给定值。

整个杆的势能为

$$\Pi = \int_0^l (V - W)dz - W_1 \tag{36}$$

把（29）、（32）、（35）代入（36），以ζ、ξ、η、θ、β 作为自变函数，由最小势能原理$\delta\Pi = 0$，可导出闭口薄壁杆件所有的基本平衡方程和两端的自然边界条件如下

$$EF\frac{d^2\zeta}{dz^2} = -q_z \tag{37}$$

$$\overline{EJ_y}\frac{d^4\xi}{dz^4} = q_x + \frac{dm_y}{dz} \tag{38 a}$$

$$\overline{EJ_x}\frac{d^4\eta}{dz^4} = q_y + \frac{dm_x}{dz} \tag{38 b}$$

$$\overline{GI_\rho}\frac{d^2\theta}{dz^2} - (\overline{GI_\rho} - \overline{GI_0})\frac{d^2\beta}{dz^2} = -m_z \tag{39 a}$$

$$\overline{EJ_w}\frac{d^4\beta}{dz^4}-(\overline{GI_\rho}-GI_0)\frac{d^2\beta}{dz^2}+(GI_\rho-\overline{GI_0})\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

$$=\frac{db}{dz} \qquad (39)\ b$$

$z=0$，l 时

$$P=\overline{P} \qquad 或 \qquad \xi=\overline{\xi} \qquad (40)$$

$$M_y=\overline{M}_y \qquad 或 \qquad \frac{d\xi}{dz}=\frac{\overline{d\xi}}{dz} \qquad (41)\ a$$

$$Q_x=\overline{Q}_x \qquad 或 \qquad \xi=\overline{\xi} \qquad (41)\ b$$

$$M_x=\overline{M}_x \qquad 或 \qquad \frac{d\eta}{dz}=\frac{\overline{d\eta}}{dz} \qquad (42)\ a$$

$$Q_y=\overline{Q}_y \qquad 或 \qquad \eta=\overline{\eta} \qquad (42)\ b$$

$$M_z=\overline{M}_z \qquad 或 \qquad \theta=\overline{\theta} \qquad (43)\ a$$

$$B=\overline{B} \qquad 或 \qquad \frac{d\beta}{dz}=\frac{\overline{d\beta}}{dz} \qquad (43)\ b$$

以上（37）、（40）组成拉伸平衡方程及其边界条件；（38）a、（41）和（38）b、（42）组成 x、y 向弯曲平衡方程及其边界条件；（39）、（43）组成约束扭转平衡方程及其边界条件。以上符号上带“—”者均表示为边界给定值（包括给定零值）。

由（39）a、（39）b 可消去函数 $\beta(z)$，而得到仅含 $\theta(z)$ 的平衡方程如下：

$$\frac{EJ_w}{\mu}\frac{d^4\theta}{dz^4}-\overline{GI_0}\frac{d^2\theta}{dz^2}=m_z+\frac{db}{dz}-\frac{\overline{EJ_w}}{(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})}\left(\frac{d^2m_z}{dz^2}\right) \qquad (44)$$

其中

$$\mu=1-\frac{\overline{GI_0}}{\overline{GI_\rho}} \qquad (45)$$

由（39）亦可求得

$$\frac{d\beta}{dz}=\frac{d\theta}{dz}+\frac{EJ_w}{(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})^2}\left(\overline{GI_\rho}\frac{d^3\theta}{dz^3}+\frac{dm_z}{dz}\right)-\frac{b}{(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})}$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2}=\frac{1}{\mu}\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{m_z}{(\overline{GI_\rho}-\overline{GI_0})} \qquad (46)$$

利用（46），可把（24）、（26）、（34）、（43）b 中的 $\frac{d\beta}{dz}$、$\frac{d^2\beta^2}{dz^2}$ 项也均用 θ 来表示。因而，如果已由上述方程及相应边界条件解出 ζ、η、ξ、θ，则可进一步由（34）求出内力或内力矩，由（26）求出应变，由（5）、（6）求出各单层内的应力，由（24）求出断面翘曲量。

如果 $E=const$，$G=const$，则本节所有方程及公式均与均匀各向同性材料杆情形[3][4]相一致。

三、断面几何参数的确定

以上推导中尚未说明所选断面几何参数，如坐标中心O、坐标 x、y 轴方位、A点及P_0点位置等是如何确定的。实际上它们应该由条件（28）来规定。

如图 2，取任意坐标x'、y'，可得

$$\oint\int_\delta Ex'dtds=\oint\int_\delta E(x+\bar{x})dtds$$

由（28）a及（30）定义得到

$$\bar{x}=\frac{\oint\int_\delta Ex'dtds}{\overline{EF}} \qquad (47)\ a$$

同理，

$$\bar{y}=\frac{\oint\int_\delta Ey'dtds}{\overline{EF}} \qquad (47)\ b$$

由（47）可确定中心O的位置。注意对复合材料杆而言，O点不一定在断面的几何形心上。

现在再通过O点取任意坐标轴x_1、y_1，它们与x、y轴的夹角为ψ，则

$$x=x_1cos\psi+y_1sin\psi, \qquad y=y_1cos\psi-x_1sin\psi$$

代入（28）b，导出

$$tan2\psi=\frac{2\oint\int_\delta Ex_1y_1dtds}{\oint\int_\delta E(x_1^2-y_1^2)dtds} \qquad (48)$$

由（48）可确定x、y坐标轴方位。此坐标轴可称为主惯性轴。

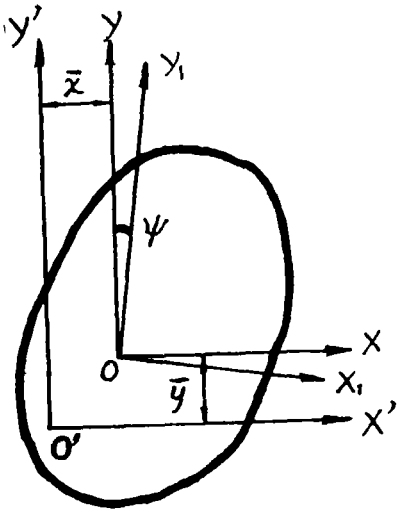

图 2　中心位置及主惯性軸方位的确定

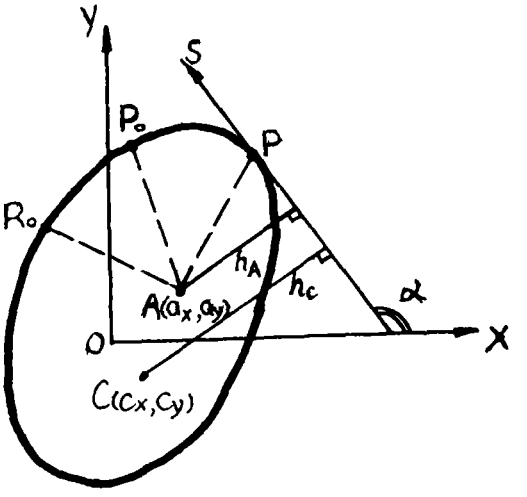

图 3　断面刚心及主扇性坐标原点位置的确定

如图 3，取断面上任意点C，则

$$h_A=(a_y-c_y)\cos\alpha-(a_x-c_x)\sin\alpha+h_c$$

对 s 积分并引用（22）定义，可得

$$\omega_A^{**}=(a_y-c_y)x-(a_x-c_x)y+\omega_c^{**}+c_1$$

这里c_1为积分常数，上式代入（28）c并利用（28）a、（28）b及（30）定义，可导出

$$a_x=c_x+\frac{\oint\int_\delta E\omega_c^{**}y\,dt\,ds}{\overline{EJ_x}}$$

$$a_y=c_y-\frac{\oint\int_\delta E\omega_c^{**}x\,dt\,ds}{\overline{EJ_y}} \tag{49}$$

由（49）可确定A的位置，A可称为刚心或扭转中心。

以上ω_c^{**}的扇性坐标原点为任意点R_0，设有另外一点P_0，由定义可得

$$\omega_A^{**}(P,\ P_0)=\omega_A^{**}(P,\ R_0)-d$$

这里d为一个常量。使$\omega_A^{**}(P,\ P_0)$满足（28）d，并利用（30）定义，可导出

$$\omega_A^{*}(P,\ P_0)=\omega_A^{**}(P,\ R_0)-\frac{\oint\int_\delta E\omega_A^{*}(P,\ R_0)\,dt\,ds}{\overline{EF}} \tag{50}$$

由（50）可确定扇性坐标ω_A^{*}的计算原点P_0，此时$\omega_A^{*}(P,\ P_0)$可称为主扇性坐标。

四　結　　論

1．本文适用于只含0°、90°、±φ°单层的任意鋪层方式和任意断面形状的复合材料闭口薄壁杆件情形，它是目前工程上较普遍适用的情形。

2．本文导出了在任意载荷作用及任意边界条件下闭口薄壁杆件平衡问题的全部方程及计算公式，包括求解拉伸、弯曲、自由扭转、约束扭转的基本微分方程和边界条件，以及计算各种内力、应变、应力、位移的公式。

3．本文导出的基本微分方程和边界条件形式与均匀各向同性材料杆情形相同，但所含的各种参数的计算公式不同，因此方程的求解可以借鉴现成的方法或公式。

4．薄壁杆断面的各个几何特性参数（中心、刚心、主惯性轴、主扇性坐标原点）、位置与均匀各向同性材料杆的情形不同，而应按本文的公式来确定。正确地说，它们已不是单纯的几何特性，而且也与材料特性有关。

5．虽然本文所有结果均基于较成熟的薄壁杆件经典理论和复合材料力学基本公式，但为了使结果更加可信，尚待作进一步的试验验证。

参 考 文 献

[1] Tsai,S.W., and Hahn,H.T., Introduction to Composite Materials, TECHNOMIC Publishing co, Inc, 1980.

[2] Уманский, А.А., О Нормальных Напряжениях при кручений крыла Самолёта, Техника Воздущного Флота, №. 12, 1940.

[3] ДЖанелидзе, Г.Ю., и Пановко, Я. Г., Статика Упругих Тонкостенных Стерженей, ОГИЗ Гостехиздаг, 1948 (中譯本：胡海昌、解伯民譯，弹性薄壁杆件的静力学，科学出版社，1955)

[4] Guo Zhong-heng (郭仲衡), A Unifiedy Theory of Thin-walled Elastic Structures, Journal of Structural Mechanics, Vol. 9, №. 2, 1981.

学术活动简讯（四）

第四届国际复合材料会议（ICCM—Ⅳ）简介

第四届国际复合材料会议于1982年10月25日至28日在日本东京举行。有来自17个国家的490名科技工作者参加了会议。有七位著名科学家在大会上作了邀請报告，在 22 个分组会议上共宣读了205篇论文，其中包括（1）、组分与界面胶接，占15%、（2）力学特性及其它物性，占 36%，（3）断裂，占6%，（4）耐环境性，占 6%，（5）纤维增强金属（*FRM*），占12%，（6）陶瓷与混凝土，占2%，（7）成形、制造，占5%，（8）设计、应用、试验，占15%，（9）现状与发展方向，占3%。

在会议期间还组织了五次专题讨论会。

（1）复合材料的冲击和能量吸收　（2）高温用的*FRM*和*FRP*　（3）设计与制造，现状与未来　（4）复合材料的实验与可靠性　（5）复合材料的资源、经济性和节能

会议的论文集分上下两卷，每卷1000页，共收入229篇论文。书名为“*Progress in Science and Engineering of Composites*”。

我国有九名代表参加了会议。

（杨秉宪）