第8卷 第1期 复合材料学报 Vol.8 No.1
1991年 1月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA January 1991

椭圆柱曲面缠绕滑线位置计算公式

冷 兴 武

（哈尔滨玻璃钢研究所，哈尔滨150036）

摘要：本文以非测地线稳定原理为基础，推导出椭圆柱（包括圆柱）曲面稳定及滑线位置的计算公式，使用简单、方便。

关键词：椭圆柱，非测地线，滑线位置

前 言

运输槽车是人们最常见的圆柱或椭圆柱曲面，其缠绕偏离测地线位置出现滑线现象也是经常遇到的。

本文根据非测地线稳定缠绕基本原理[1]，结合鼓型截面玻璃钢槽车缠绕实例，对椭圆柱（包括圆柱）曲面的缠绕滑线稳定公式进行了推导，并给出数字解析。

本文可供从事纤维缠绕复合材料制品设计与工艺制造以及高校师生教研工作参考。

一、椭圆柱(包括圆柱)曲面非测地线稳定缠绕的通式

缠绕纤维在测地线上最稳定，当它偏离测地线又能满足非测地线稳定缠绕条件时，也不会滑线、也是稳定的。

取微段圆柱体，过缠绕纤维所在密切面做垂直截面和芯轴X交角α_i。在缠绕纤维上取微元$\triangle S$长，其偏离测地线的缠绕角为$\triangle\alpha$。该微元的稳定不滑线条件是纤维层间（或纤维与芯模表面之间）的摩擦阻力T能阻止由纤维张紧力F引起的滑移，即非测地线稳定缠绕的基本原理。摩擦阻力T是由张紧纤维层对基底层的正压力引起的。经过取微元$\triangle S$在密切面上与垂直密切面两个方向建立受力平衡方程式，最后便可导得

$$dx=\frac{R_i}{f}\cos\alpha d\alpha \quad [1] \qquad (1)$$

取积分上、下限，引入安全系数K，则

$$L=\frac{K}{f}\int_{\alpha_0}^{\alpha} R_i\cos\alpha d\alpha \qquad (2)$$

本文1989年3月10日收到

式中 L 缠绕曲面沿芯轴X方向最小之稳定缠绕长度；

f 纤维层间（缠绕第一层时指纤维与芯模表面之间）的摩擦系数，对于玻璃纤维取0.10～0.13；

α_0 对圆柱体，为缠绕起始点之缠绕角；

α 对圆柱体，为缠绕终止点之缠绕角；

R_i 垂直纤维密切面做斜截面过缠绕纤维微元段长$\triangle S$，该微元的曲率半径；

K 缠绕不滑线之安全系数，取1.0～2.0。

工程实际和理论推导有差别，例如纤维层间松紧、架空使纤维贴紧长度、宽度有变化；纤维张紧力有松有紧现象，会直接影响产生的摩擦阻力的变化；吐丝嘴运动速度在芯轴方向上的变化及胶液粘度随时间、室温之变化，也都影响到所采用的摩擦系数的变化等等。我们把各种对滑线有影响的因素综合考虑为一个安全系数K，它是根据实际情况（不同的缠绕机，不同的形状等）由经验来确定的。

将圆柱体的半径R代入通式（2），得圆柱体非测地线稳定缠绕的一般公式

$$L=\pm\frac{KR}{f}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}-\frac{1}{\sin\alpha}\right) \qquad (3)$$

式中 ±号表示无论结果正负，均取正值。

对椭圆柱曲面，设过垂直缠绕纤维密切面做截面的座标为z和y_1，y_1与芯轴x交角即缠绕角α，则微元$\triangle S$之曲率半径公式为

$$R_i=\frac{(\dot{z}^2+\dot{y}_1^2)^{1.5}}{|\dot{y}_1\ddot{z}-\ddot{y}_1\dot{z}|} \qquad (4)$$

式中 $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$ $\ddot{z}=\frac{d^2z}{dt^2}$

$\dot{y}_1=\frac{dy_1}{dt}$ $\ddot{y}_1=\frac{d^2y_1}{dt^2}$

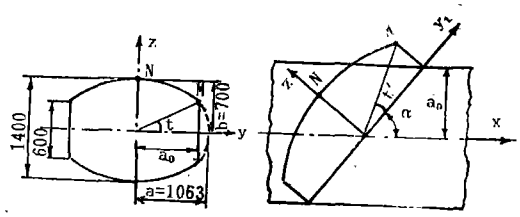
二、椭圆曲面非测地线稳定缠绕公式

如图1所示，槽车筒体截面为鼓形，两椭圆曲面和两平面。鼓形截面高1.4米，宽2.0米。

筒体椭圆柱面横截面椭圆曲线方程

$$\left.\begin{aligned}z&=b\sin t\\ y&=a\cos t\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

式中 a、b——分别为椭圆之长、短半轴长。



(A) (B)

图 1

设筒身缠绕角为α，过垂直密切面之缠绕纤维在该截面上的曲率半径R_i由公式（4）决定。式中有z和y对t的导数，因此需将α变为t的函数。由异型截面螺旋缠绕基本原理可知：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\pi r_i}{l_1}=\frac{2\pi\sqrt{z^2+y^2}}{l_1}=\frac{2\pi}{l_1}\sqrt{a^4-(a^2-b^4)\sin^2 t} \tag{6}$$

式中 l_1——螺距，芯模每转360°吐丝嘴沿芯轴方向前进之距离，链条为直线时l_1=常数。

由公式（6）可得

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=2\pi\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^4)\sin^2 t}{l_1^2+4\pi^2[a^4-(a^2-b^4)\sin^2 t]}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}} \tag{7}$$

式中 $\triangle=a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t$

由图1可得

$$y_1=y/\sin\alpha \tag{8}$$

将式（5）、（7）代入上式

$$y_1=\frac{a\cos t}{2\pi}\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}} \tag{9}$$

对上式求导数

$$\dot{y}_1=\frac{a}{2\pi}\left\{-\sin t\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}+\cos t\frac{\frac{\triangle 4\pi^2\dot{\triangle}-\dot{\triangle}(l_1^2+4\pi^2\triangle)}{\triangle^2}}{2\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}}\right\}$$

$$=\frac{a}{2\pi}\left\{-\sin t\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}-\frac{l_1^2(b^2-a^2)}{2}\left(\frac{\cos t\sin 2t}{\triangle^2}\right)\sqrt{\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}}\right\} \tag{10}$$

$$\ddot{y}_1=\frac{a}{2\pi}\left\{-\cos t\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}-\sin t\frac{\left(\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}\right)'}{2\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}}-\frac{l_1^2(b^2-a^2)}{2}\right.$$

$$\left.\left[\left(\frac{\cos t\sin 2t}{\triangle^2}\right)'\sqrt{\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}}+\frac{\cos t\sin 2t}{\triangle^2}\frac{\left(\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}\right)'}{2\sqrt{\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}}}\right]\right\} \tag{11}$$

将导数化简后

$$\ddot{y}_1=\frac{a}{2\pi}\left\{\sqrt{\frac{\triangle}{l_1^2+4\pi^2\triangle}}\cdot\frac{l_1^2(a^2-b^2)[-\triangle\sin t\sin 2t+\triangle\cos t\cos 2t+(a^2-b^2)\cos t\sin^2 2t]}{\triangle^3}\right.$$

$$-\sqrt{\frac{l_1^2+4\pi^2\triangle}{\triangle}}\left[\cos t+\frac{l_1^4(b^2-a^2)^2\cos t\sin^2 2t}{4\triangle^2(l_1^2+4\pi^2\triangle)^2}\right] \tag{12}$$

$$z=b\cos t \tag{13}$$

$$z=-b\sin t \tag{14}$$

将式 (10) 、 (12) 、 (13) 、 (14) 代入式 (4) ，得

$$R_i=\frac{2\pi}{ab}\cdot\frac{\xi}{|\zeta+\lambda|} \tag{15}$$

式中

$$\xi=\left\{b^2\cos^2 t+\frac{a^2}{4\pi^2}\left[\frac{-2\pi\sin t}{\sin\alpha}+\frac{l_1^2(a^2-b^2)\sin 2t\cos t\sin\alpha}{4\pi\triangle^2}\right]^2\right\}^{1.5} \tag{16}$$

$$\zeta=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\cos^4\alpha(a^2-b^2)^2\sin^2 2t\cos^2 t}{4\triangle^2}-1\right]+\frac{l_1^2(a^2-b^2)\sin^2 2t\sin\alpha}{8\pi\triangle^2} \tag{17}$$

$$\lambda=\frac{l_1(a^2-b^2)\cos t\sin\alpha[-\triangle\sin t\sin 2t+\triangle\cos t\cos 2t+(a^2-b^2)\sin^2 2t\cos t]}{2\pi\triangle^3} \tag{18}$$

将公式 (15) 代入公式 (2) ，得

$$L=\frac{2\pi K}{abf}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{|\zeta+\lambda|}\cos\alpha d\alpha \tag{19}$$

采用数字积分方法计算，取$\phi=\xi\cos\alpha/|\zeta+\lambda|$，并设$h=(\alpha-\alpha_0)/n$，取$n=4$，则

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{|\zeta+\lambda|}\cos\alpha d\alpha\approx\frac{h}{3}(\phi_0+4\phi_1+2\phi_2+4\phi_3+\phi_4) \tag{20}$$

三、缠绕槽车实例

1. 基本参数

已知 $l_1=12436.6$mm; $a=1063$mm; $b=700$mm; 代入式 (16) 、 (17) 、 (18) ，得ξ、ζ、λ代入φ式得缠绕角α_i在19°34′～27°49′之间的诸ϕ_i值

$\alpha_i=19°34'$; $21°34'$; $22°56'$; $23°48'$

$\phi_i=16.200\times10^8$; 4.886×10^8; 2.993×10^8; 2.031×10^8

$\alpha_i=24°18'$; $24°40'$; $25°44'$; $27°49'$

$\phi_i=1.642\times10^8$; 1.370×10^8; 0.728×10^8; 0.206×10^8

将诸数字画成曲线，便可查到所需ϕ_i值。

2. 滑线计算

验算由M点缠绕到N点是否滑线，可按纤维在空间缠绕落纱点理论计算椭 圆曲 面中点N处的缠绕角值为最小；

$$tg\alpha_{min}=\frac{2\pi\gamma_{min}}{l_1}=0.35365,\ \alpha_{min}=19°29'$$

椭圆曲面棱线处M点缠绕角为最大：

$tg\alpha_{max}=0.52760$，　　$\alpha_{max}=27°49'$

$$h=\frac{27°49'-19°29'}{4}=2.083°,\quad \frac{h}{3}=0.694°=0.01212$$

选$\alpha_0=19°29'$；$\alpha_1=21°34'$；$\alpha_2=23°39'$；$\alpha_3=25°44'$；$\alpha_4=27°49'$其相应ϕ值为：$\phi_0=16.2\times10^8$；$\phi_1=4.886\times10^6$；$\phi_2=2.14\times10^8$；$\phi_3=0.728\times10^8$；$\phi_4=0.206\times10^8$；

代入式（20），取K=2.0，f=0.10，则

$$\frac{h}{3}(\phi_0+4\phi_1+2\phi_2+4\phi_3+\phi_4)=0.52288\times10^8$$

代入式（19）得

$L=0.000168\times0.52288\times10^8=8784.4mm>2214nm$（M点到N点沿芯轴方向的实际筒身长度）

故滑线。

3. 滑线后之稳定位置

采用公式（20)进行运算，按符合稳定长度要求，可得N点最终稳定缠绕角$\alpha_N=22°56'$，即取

$\alpha_i=22°56'$；$23°48'$；$24°40'$；$25°32'$；$26°24'$。

$\phi_i=3.90\times10^8$；2.52×10^8；1.65×10^8；0.91×10^8；0.483×10^8。

则$L=0.000168\times0.0060844\ (3.90\times4\times2.52+2\times1.65+4\times0.91+0.483)\times10^8$

$=2187.77mm<2214mm$

故N点缠绕角为$22°56'$时稳定不滑线。

四、园柱曲面稳定公式

将园柱半径R=a=b代入椭园曲面公式便可很方便导出园柱曲面稳定缠绕公式。如公式（16）、（17）、（18）可分别变为：

$$\xi=\left[b^2\cos^2t+\frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{-2\pi\sin t}{\sin\alpha}\right)^2\right]^{1.5}=\left[R^2\left(\cos^2t+\frac{\sin^2t}{\sin^2\alpha}\right)\right]^{1.5}$$

$$\zeta=-\frac{2\pi}{\sin\alpha}$$

$$\lambda=0$$

代入公式（19）得

$$L=\pm\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{-\sin\alpha}{2\pi}\cdot\left[R^2\left(\cos^2t+\frac{\sin^2t}{\sin^2\alpha}\right)\right]^{1.5}\cdot\left(\frac{2\pi K}{R^2f}\right)\cos\alpha d\alpha$$

$$=\pm\frac{KR}{2f}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sin2\alpha\left(\cos^2t+\frac{\sin^2t}{\sin^2\alpha}\right)^{1.5}d\alpha$$

如图 1 所示由M点缠到N点，t=90°代入上式，则

$$L=\pm\frac{KR}{2f}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\sin2\alpha}{\sin^3\alpha}d\alpha=\pm\frac{KR}{f}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

$$=\pm\frac{KR}{f}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

此式与（3）相同，即圆柱体公式。

假定有一圆柱体其半径R=909mm（正好是前例槽车“相当圆”半径），有一点M之缠绕角$\alpha_0=26°24'$，沿芯轴长L=2214mm方向缠绕至N点，利用上式便可求得N点非测地线稳定缠绕角α，取K=2，f=0.10时，则

$$2214=\pm\frac{2\times909}{0.10}\left(\frac{1}{\sin26°24'}-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$\therefore\alpha_{max}=28°03'$；$\alpha_{min}=24°52'$

有关圆柱体计算实例，还可参考文献[2]。

结 语

1. 本文给出之公式适于各种缠绕机械，它与设备种类、先进程度无关。对于干、湿法缠绕工艺或纤维种类、树脂粘度等因素均反应在摩擦系数f值大小上。

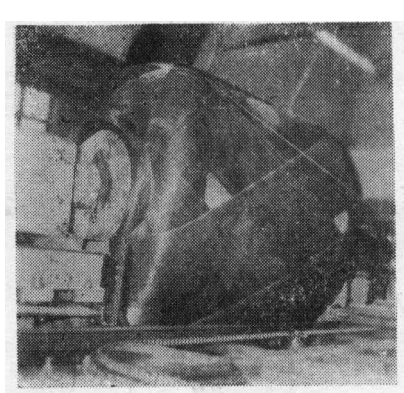
2. 安全系数K=1.0～2.0，它的大小主要由工艺因素决定如缠绕纤维层间接触面密切、纤维层间贴合紧密均匀、张力均匀等，带动吐丝嘴之车速运动均速、惯性小、树脂粘度不稀、环境温度适宜，此时K值可取小些偏下限；反之K应取大些偏上限。

由于以前采用的旧式链条缠绕机传动惯性大等不利因素，故我们早期发表的论文，如发表于全国纤维缠绕技术与设备会议上，并刊登于1978年9月《玻璃钢资料》第2期的公式

$$L=\pm\frac{2R}{f}\left(\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha_0}+\sin\alpha_0-\sin\alpha\right)$$

后于1982年在文献[1]上发表时简化为

$$L=\pm\frac{2R}{f}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$



当时均取K=2，并在推导时已直接写入基本方程式中，多年实践证明是安全的。

3. 在实现椭圆柱曲面非测地线缠绕时，如吐丝嘴不能实现贴近椭圆（非回转体）芯模表面缠绕，必须考虑到超越长度计算问题[3]，综合截面长、短半径不等之

因素，以达到稳定不滑线之目的。

4. 大型椭圆柱面槽车缠绕实例见照片所示。

参 考 文 献

〔1〕 冷兴武，非测地线稳定缠绕的基本原理，宇航学报，1982年，第3期，P90

〔2〕 冷兴武，不等开口容器纤维缠绕及其滑线计算，玻璃钢，1982年增刊，P115

〔3〕 冷兴武，纤维缠绕超越长度的计算，玻璃钢，1980年，第6期，P5

CALCULATION OF SLIDING AND STABLE POSITIONS OF FILAMENT WINDING CYLINDRICAL (ELLIPSOIDAL) CURVATURES

Leng Xingwu

(Harbin FRP Research Institute)

On the basis of principle of stable non-geodesic filament winding, the formula for calculating the sliding and stable positions of ellipsoidal(cylindrical) curvatures is derived, and the obtained formula is useful and simple。

Key words: elliptical cylinder, non-geodesic, sliding position

复合材料文摘：　（上接第26页）

短纤维/液晶聚合物复合材料的冲击行为

对液晶聚合物与GF、CF短纤维的两种FRP进行了冲击行为的观察。冲击试验用Izod冲击法和落锤冲击试验法进行，对力学行为全都分别绘制载荷-位移曲线，就两种试验结果的相互关系进行了分析。

还对各试验结果的破坏载荷和破坏能求出了随纤维含量的变化，对破坏形貌也进行了模拟，对断面的细节则进行了SEM观察。

非对称铺层GRP管的强度

对直径100mm、壁厚1.7mm、±75°斜交铺层的FW管（E玻璃/环氧）进行内压破坏试验，就容器的破坏强度进行了实验研究。实验中用贴在试件内外侧的应变片测定由内压导致破坏的全过程中的应力，在研究该行为的同时，还研究了端部夹持部分附近的应力分布。

关于破坏状况，还切取破坏附近处的断面，观察了内部的剥离状况。